

УДК 517.956.32

В. И. КОРЗЮК^{1,2}, Н. В. ВИНЬ¹

КЛАССИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО БИВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

¹Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь,

²Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь,
e-mail: korzyuk@bsu.by, vinhnguyen0109@gmail.com

В данной работе рассмотрены смешанные задачи для биволнового уравнения. Методом характеристик строится аналитическое решение рассматриваемых задач. Доказывается единственность решения и выводятся условия согласования в угловых точках для заданных функций уравнения, условий Коши и граничных условий.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, гиперболические уравнения, биволновое уравнение, частные производные, граничные условия, условия Коши, условия согласования, классическое решение.

V. I. KORZYUK^{1,2}, N. V. VINH¹

CLASSICAL SOLUTIONS OF MIXED PROBLEM FOR ONE-DIMENSIONAL BIWAVE EQUATION

¹Belarusian State University, Minsk, Belarus,

²Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus,
e-mail: korzyuk@bsu.by, vinhnguyen0109@gmail.com

In this paper we consider the mixed problem of biwave equation. Using method of characteristics the analytical solution of the mixed problem for the equation is under construction. We prove the uniqueness of the solution and conditions of the coordination of initial and boundary condition are deduced.

Keywords: Differential equations, hyperbolic equations, biwave equation, partial derivatives, boundary conditions, Cauchy conditions, agreement conditions, classical solution.

Введение. Для биволнового уравнения в многомерном случае в работах [1–5] функциональными методами изучаются граничные задачи относительно корректной постановки их по Адамару [6, 7]. В [1, 2] рассматриваются смешанные задачи с различными условиями на боковой поверхности, однако смешанная задача, для которой на боковой поверхности задается искомая функция и ее производная первого порядка по нормали отсутствует. Для нее авторам не удалось доказать соответствующее энергетическое неравенство. В работе [5] постановки такой задачи также нет. Закономерно возникает вопрос: возможно, для указанной задачи в принципе нельзя доказать теорему существования и единственности решения в каком-либо виде. Как затем было установлено, данное предположение – ошибочно. Об этом свидетельствуют результаты, полученные в статье [8], где найдено классическое решение в аналитическом виде методом характеристик первой смешанной задачи в случае двух независимых переменных. Но здесь решение определено только при выполнении достаточных условий согласования на заданные функции задачи. В настоящей работе также рассматривается классическое решение при меньшем количестве условий согласования, которые являются не только достаточными, но и необходимыми, чтобы существовало единственное классическое решение из класса непрерывных и непрерывно дифференцируемых функций до четвертого порядка включительно.

1. Постановка задачи. В замыкании $\bar{Q} = [0, \infty) \times [0, l]$ области $Q = (0, \infty) \times (0, l)$ двух независимых переменных $(t, x) \in \bar{Q} \subset R^2$ задано одномерное биволновое уравнение

$$Lu = \left(\partial_t^2 - a^2 \partial_x^2 \right) \left(\partial_t^2 - b^2 \partial_x^2 \right) u(t, x) = f(t, x), \quad (t, x) \in \bar{Q}, \quad (1)$$

относительно искомой функции $u: R^2 \supset \bar{Q} \ni (t, x) \rightarrow u(t, x) \in R$, где $a^2, b^2, l \in R$, $a^2 > b^2 > 0$, $0 < l < +\infty$, $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_t^j \partial_x^k = \frac{\partial^{j+k}}{\partial t^j \partial x^k}$, $j, k = \{0, 1, 2, \dots\}$ – частные производные. К уравнению (1) на части границы ∂Q области Q присоединяются условия Коши

$$\partial_t^j u(0, x) = \varphi_j(x), \quad j = 0, 1, 2, 3, \quad x \in [0, l], \quad (2)$$

и граничные условия

$$u(t, 0) = \mu_1(t), \quad \alpha_0 u(t, 0) + \alpha_1 \partial_x u(t, 0) = \mu_2(t), \quad t \in [0, \infty), \quad (3)$$

$$u(t, l) = \chi_1(t), \quad \beta_0 u(t, l) + \beta_1 \partial_x u(t, l) = \chi_2(t), \quad t \in [0, \infty), \quad (4)$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$ – действительные числа и $\alpha_1, \beta_1 \neq 0$.

Здесь $f: \bar{Q} \ni (t, x) \rightarrow f(t, x) \in R$, $\varphi_j: [0, l] \ni x \rightarrow \varphi_j(x)$, $j = 0, 1, 2, 3$, $\mu_i: [0, \infty) \ni t \rightarrow \mu_i(t) \in R$, $\chi_i: [0, \infty) \ni t \rightarrow \chi_i(t) \in R$, $i = 1, 2$, – заданные функции.

Таким образом, требуется найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям Коши (2), граничным условиям (3) и (4).

2. Решение задачи (1)–(4) в случае однородного уравнения (1). Рассмотрим решение задачи (1)–(4) в случае, когда уравнение (1) является однородным, т. е.

$$Lu(t, x) = 0, \quad t > 0, x \in (0, l). \quad (5)$$

Для определенности предположим, что $a, b > 0$. Справедлива

Л е м м а 1. *Общее решение уравнения (5) из класса четырежды непрерывно дифференцируемых функций $C^4(\bar{Q})$ представляется в виде суммы*

$$u(t, x) = g_1(x - at) + g_2(x + at) + g_3(x - bt) + g_4(x + bt), \quad (6)$$

где области определения $D(g_1), D(g_3) = ((-\infty, l])$, $D(g_2), D(g_4) = ([0, +\infty))$, если $(t, x) \in \bar{Q}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из [9] (см. также [10]).

Удовлетворяя решение (6) условиям Коши (2), получаем систему относительно функций $g_j(x)$, $j = \overline{1, 4}$, определенных на отрезке $[0, l]$:

$$\begin{aligned} g_1(x) + g_2(x) + g_3(x) + g_4(x) &= \varphi_0(x), \\ -ag'_1(x) + ag'_2(x) - bg'_3(x) + bg'_4(x) &= \varphi_1(x), \\ a^2 g''_1(x) + a^2 g''_2(x) + b^2 g''_3(x) + b^2 g''_4(x) &= \varphi_2(x), \\ -a^3 g'''_1(x) + a^3 g'''_2(x) - b^3 g'''_3(x) + b^3 g'''_4(x) &= \varphi_3(x). \end{aligned} \quad (7)$$

Решая систему (7), находим функции $g_j(z)$, $j = \overline{1, 4}$, определяемые равенствами

$$g_1(z) = g_1^{(0)}(z) = \frac{1}{2a(a^2 - b^2)} \left(b^2 \int_0^z \varphi_1(\xi) d\xi + a \int_0^z (z - \xi) \varphi_2(\xi) d\xi - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \int_0^z (z - \xi)^2 \varphi_3(\xi) d\xi - ab^2 \varphi_0(z) + C_1 b^2 + aC_2 z + C_3 a - C_4 z^2 - C_5 z - C_6 \right), \quad (8)$$

$$g_2(z) = g_2^{(0)}(z) = \frac{1}{2a(a^2 - b^2)} \left(-b^2 \int_0^z \varphi_1(\xi) d\xi + a \int_0^z (z - \xi) \varphi_2(\xi) d\xi + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \int_0^z (z - \xi)^2 \varphi_3(\xi) d\xi - ab^2 \varphi_0(z) - C_1 b^2 + aC_2 z + C_3 a + C_4 z^2 + C_5 z + C_6 \right), \quad (9)$$

$$g_3(z) = g_3^{(0)}(z) = \frac{1}{2b(a^2 - b^2)} \left(-a^2 \int_0^z \varphi_1(\xi) d\xi - b \int_0^z (z - \xi) \varphi_2(\xi) d\xi + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \int_0^z (z - \xi)^2 \varphi_3(\xi) d\xi + a^2 b \varphi_0(z) - C_1 a^2 - b C_2 z - C_3 b + C_4 z^2 + C_5 z + C_6 \right), \quad (10)$$

$$g_4(z) = g_4^{(0)}(z) = \frac{-1}{2b(a^2 - b^2)} \left(-a^2 \int_0^z \varphi_1(\xi) d\xi + b \int_0^z (z - \xi) \varphi_2(\xi) d\xi + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \int_0^z (z - \xi)^2 \varphi_3(\xi) d\xi - a^2 b \varphi_0(z) - C_1 a^2 + b C_2 z + C_3 b + C_4 z^2 + C_5 z + C_6 \right) \quad (11)$$

для $z \in [0, l]$, где $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ – произвольные постоянные.

Для других значений аргумента z функции $g_j(z)$, $j = \overline{1, 4}$ определяются поэтапно, удовлетворяя искомое решение (6) граничным условиям (3) и (4). Согласно условию (3), получаем систему уравнений с производными

$$g_1^{(1)}(-at) + g_2^{(0)}(at) + g_3^{(1)}(-bt) + g_4^{(0)}(bt) = \mu_1(t), \\ \alpha_0 \left(g_1^{(1)}(-at) + g_2^{(0)}(at) + g_3^{(1)}(-bt) + g_4^{(0)}(bt) \right) + \\ + \alpha_1 \left(dg_1^{(1)}(-at) + dg_2^{(0)}(at) + dg_3^{(1)}(-bt) + dg_4^{(0)}(bt) \right) = \mu_2(t), \quad (12)$$

где обозначение $d(\cdot)$ – оператор обыкновенной производной первого порядка. Из системы (12) имеем дифференциальное уравнение

$$\alpha_1 \left(dg_1^{(1)}(-at) + dg_2^{(0)}(at) + dg_3^{(1)}(-bt) + dg_4^{(0)}(bt) \right) = \mu_2(t) - \alpha_0 \mu_1(t),$$

из которого, интегрируя по переменной t , получим соотношение

$$\alpha_1 \left(\frac{g_1^{(1)}(-at)}{-a} + \frac{g_1^{(1)}(-at)}{b} \right) = \int_0^t (\mu_2(\xi) - \alpha_0 \mu_1(\xi)) d\xi + C^{(1)} + \\ + \frac{\alpha_1 \mu_1(t)}{b} - \alpha_1 \left(\frac{g_2^{(0)}(at)}{a} + \frac{g_2^{(0)}(at)}{b} \right) - \frac{2\alpha_1 g_4^{(0)}(bt)}{b}.$$

Отсюда и из первого уравнения системы (12) имеем

$$g_1(z) = g_1^{(1)}(z) = \frac{ab}{\alpha_1(a-b)} \left(\int_0^{-z/a} (\mu_2(\xi) - \alpha_0 \mu_1(\xi)) d\xi + C^{(1)} + \frac{\alpha_1}{b} \mu_1\left(\frac{-z}{a}\right) - \right. \\ \left. - \frac{\alpha_1(a+b)}{ab} g_2^{(0)}(-z) - \frac{2\alpha_1}{b} g_4^{(0)}\left(\frac{-zb}{a}\right) \right), \quad (13)$$

$$g_3(z) = g_3^{(1)}(z) = \mu_1\left(\frac{-z}{b}\right) - g_1^{(1)}\left(\frac{za}{b}\right) - g_2^{(0)}\left(-\frac{za}{b}\right) - g_4^{(0)}(-z). \quad (14)$$

Так как функции $g_2(z) = g_2^{(0)}(z)$ и $g_4(z) = g_4^{(0)}(z)$ уже определены равенствами (9) и (11), то, согласно выражениям (13) и (14), находим $g_1(z) = g_1^{(1)}(z)$ через заданные функции для $z \in [-l, 0]$ и $g_3(z) = g_3^{(1)}(z)$ для $z \in \left[-\frac{bl}{a}, 0\right]$. Далее используем условие (4). Подставляя функцию (6) в равенство (4), будем иметь

$$\begin{aligned}
& g_1^{(0)}(l-at) + g_2^{(1)}(l+at) + g_3^{(0)}(l-bt) + g_4^{(1)}(l+bt) = \chi_1(t), \\
& \beta_0 \left(g_1^{(0)}(l-at) + g_2^{(1)}(l+at) + g_3^{(0)}(l-bt) + g_4^{(1)}(l+bt) \right) + \\
& + \beta_1 \left(dg_1^{(0)}(l-at) + dg_2^{(1)}(l+at) + dg_3^{(0)}(l-bt) + dg_4^{(1)}(l+bt) \right) = \chi_2(t).
\end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}
g_2(z) = g_2^{(1)}(z) = \frac{ab}{\beta_1(b-a)} & \left(\int_0^{(z-l)/a} (\chi_2(\xi) - \beta_0 \chi_1(\xi)) d\xi - \frac{\beta_1}{b} \chi_1\left(\frac{z-l}{a}\right) + \tilde{C}^{(1)} + \right. \\
& \left. + \left(\frac{\beta_1}{a} + \frac{\beta_1}{b} \right) g_1^{(0)}(2l-z) + \frac{2\beta_1}{b} g_3^{(0)}\left(l + \frac{bl}{a} - b\frac{z}{a}\right) \right), \quad z \in [l, 2l],
\end{aligned} \quad (15)$$

и

$$g_4(z) = g_4^{(1)}(z) = \chi_1\left(\frac{z-l}{b}\right) - g_2^{(1)}\left(l + \frac{za}{b} - \frac{la}{b}\right) - g_1^{(0)}\left(l + \frac{la}{b} - \frac{za}{b}\right) - g_3^{(0)}(2l-z), \quad z \in \left[l, l + \frac{bl}{a}\right]. \quad (16)$$

Возвращаясь к условию (3), находим значения $g_1^{(2)}(z)$ функции g_1 для $z \in [-2l, -l]$ и значения $g_3^{(2)}(z)$ функции g_3 для $z \in \left[-\frac{2bl}{a}, -\frac{bl}{a}\right]$, а затем из условия (4) определяем $g_2^{(2)}(z)$ функции g_2 для $z \in [2l, 3l]$ и значения $g_4^{(2)}(z)$ функции g_4 для $z \in \left[l + \frac{bl}{a}, l + \frac{2bl}{a}\right]$ и т. д. В общем случае изложенное выше можно записать в виде

$$\begin{aligned}
g_1^{(k)}(z) = \frac{ab}{\alpha_1(b-a)} & \left(\int_0^{-z/a} (\mu_2(\xi) - \alpha_0 \mu_1(\xi)) d\xi + C^{(k)} + \frac{\alpha_1}{b} \mu_1\left(\frac{-z}{a}\right) - \right. \\
& \left. - \left(\frac{\alpha_1}{a} + \frac{\alpha_1}{b} \right) \tilde{g}_2^{(k-1)}(-z) - \frac{2\alpha_1}{b} \tilde{g}_4^{(k-1)}\left(-\frac{zb}{a}\right) \right), \quad z \in [-kl, -(k-1)l], \quad k = 1, 2, 3, \dots,
\end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned}
g_2^{(k)}(z) = \frac{ab}{\beta_1(b-a)} & \left(\int_0^{(z-l)/a} (\chi_2(\xi) - \beta_0 \chi_1(\xi)) d\xi - \frac{\beta_1}{b} \chi_1\left(\frac{z-l}{a}\right) + \tilde{C}^{(k)} + \right. \\
& \left. + \left(\frac{\beta_1}{a} + \frac{\beta_1}{b} \right) \tilde{g}_1^{(k-1)}(2l-z) + \frac{2\beta_1}{b} \tilde{g}_3^{(k-1)}\left(l + \frac{bl}{a} - b\frac{z}{a}\right) \right), \quad z \in [kl, (k+1)l], \quad k = 1, 2, 3, \dots,
\end{aligned} \quad (18)$$

$$g_3^{(k)}(z) = \mu_1\left(\frac{-z}{b}\right) - g_1^{(k)}\left(\frac{za}{b}\right) - \tilde{g}_2^{(k-1)}\left(\frac{-za}{b}\right) - \tilde{g}_4^{(k-1)}(-z), \quad (19)$$

$$z \in \left[\frac{-kbl}{a}, \frac{-(k-1)bl}{a} \right], \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

$$\begin{aligned}
g_4^{(k)}(z) = \chi_1\left(\frac{-z}{b}\right) - g_2^{(k)}\left(l + \frac{za}{b} - \frac{la}{b}\right) - \tilde{g}_1^{(k-1)}\left(l + \frac{la}{b} - \frac{za}{b}\right) - \tilde{g}_3^{(k-1)}(2l-z), \\
z \in \left[l + \frac{(k-1)bl}{a}, l + \frac{kbl}{a} \right], \quad k = 1, 2, 3, \dots,
\end{aligned} \quad (20)$$

где $C^{(k)}$ и $\tilde{C}^{(k)}$ — произвольные постоянные из множества действительных чисел R и

$$\tilde{g}_i^{(k)}(z) = g_i^{(j)}(z), \quad i = \overline{1, 4}, \quad j = \overline{0, k}. \quad (21)$$

Если $k = \infty$, то

$$g_i(z) = \tilde{g}_i^{(\infty)}(z) = g_i^{(j)}(z), \quad i = \overline{1, 4}, \quad j = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad z \in D(g_i).$$

Чтобы функции g_2, g_4 принадлежали классу $C^4([0, +\infty))$, а g_1, g_3 – классу $C^4((-\infty, l])$, кроме требований на гладкость заданных функций задачи (5), (2), (3), (4), должны выполняться равенства для $k=1, 2, 3, \dots$ в общих точках соприкосновения

$$d^p g_1^{(k)}(l-kl) = d^p g_1^{(k-1)}(l-kl), \quad p = \overline{0, 4}, \quad (22)$$

$$d^p g_2^{(k)}(kl) = d^p g_2^{(k-1)}(kl), \quad p = \overline{0, 4}, \quad (23)$$

$$d^p g_3^{(k)}\left(\frac{-(k-1)bl}{a}\right) = d^p g_3^{(k-1)}\left(\frac{-(k-1)bl}{a}\right), \quad p = \overline{0, 4}, \quad (24)$$

$$d^p g_4^{(k)}\left(l + \frac{(k-1)lb}{a}\right) = d^p g_4^{(k-1)}\left(l + \frac{(k-1)lb}{a}\right), \quad p = \overline{0, 4}, \quad (25)$$

где d^p – производные порядка $p = \overline{0, 4}$ и $d^p = \frac{d^p}{dz^p}$.

Из (17) и (22) получим

$$g_1^{(k)}(l-kl) - g_1^{(k-1)}(l-kl) = 0 = \frac{ab}{\alpha_1(b-a)} \left(C^{(k)} - \left(\frac{\alpha_1}{a} + \frac{\alpha_1}{b} \right) \tilde{g}_2^{(k-1)}(kl-l) - \frac{2\alpha_1}{b} \tilde{g}_4^{(k-1)}\left(\frac{(kl-l)b}{a}\right) - \right. \\ \left. - C^{(k-1)} + \left(\frac{\alpha_1}{a} + \frac{\alpha_1}{b} \right) \tilde{g}_2^{(k-2)}(kl-l) + \frac{2\alpha_1}{b} \tilde{g}_4^{(k-2)}\left(\frac{(kl-l)b}{a}\right) \right).$$

Но из соотношений (23), (24) и (21) имеем равенства $\tilde{g}_2^{(k-1)}(kl-l) = \tilde{g}_2^{(k-2)}(kl-l)$ и $\tilde{g}_4^{(k-1)}\left(\frac{(kl-l)b}{a}\right) = \tilde{g}_4^{(k-2)}\left(\frac{(kl-l)b}{a}\right)$.

Поэтому получим $C^{(k)} = C^{(k-1)} = \dots = C^{(1)}$ для любого номера $k=3, 4, \dots$. Из условия непрерывности $g_1^{(0)}(0) = g_1^{(1)}(0)$ находим эти константы, а именно:

$$C^{(k)} = C^{(1)} = \frac{\alpha_1((a^2 + b^2)C_1 - C_6)}{a^2 b^2}, \quad k = 2, 3, \dots$$

Аналогично,

$$\tilde{C}^{(k)} = \tilde{C}^{(1)} = \frac{\beta_1}{a^2 b^2} \left((a^2 + b^2)C_1 - C_6 - C_5 l - C_4 l^2 + \int_0^l \left((a^2 + b^2) \varphi_1(\xi) - \frac{(l-\xi)^2}{2} \varphi_3(\xi) \right) d\xi \right).$$

Л е м м а 2. Для любого номера $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ значения функций $g_1^{(k)}(z)$, $g_2^{(k)}(z)$, $g_3^{(k)}(z)$, $g_4^{(k)}(z)$ всегда можно представить в виде

$$g_1^{(k)}(z) = \psi_1^{(k)}(z, a, b) + \frac{C_1 b^2 + a C_2 z + C_3 a - C_4 z^2 - C_5 z - C_6}{2a(a^2 - b^2)}, \\ g_2^{(k)}(z) = \psi_2^{(k)}(z, a, b) + \frac{-C_1 b^2 + a C_2 z + C_3 a + C_4 z^2 + C_5 z + C_6}{2a(a^2 - b^2)}, \\ g_3^{(k)}(z) = \psi_3^{(k)}(z, a, b) + \frac{-C_1 a^2 - b C_2 z - C_3 b + C_4 z^2 + C_5 z + C_6}{2b(a^2 - b^2)}, \\ g_4^{(k)}(z) = \psi_4^{(k)}(z, a, b) - \frac{-C_1 a^2 + b C_2 z + C_3 b + C_4 z^2 + C_5 z + C_6}{2b(a^2 - b^2)},$$

где функции $\psi_i^{(k)}$, $i = \overline{1, 4}$, не зависят от констант $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$.

Утверждение леммы докажем для функции $g_1^{(k)}(z)$ методом математической индукции. Для $k = 0$ данное утверждение следует из формулы (8).

Предположим, что лемма справедлива для всех $k = 0, 1, \dots, n-1$. Докажем утверждение ее для функции $g_1^{(n)}$.

Согласно формуле (17), имеем

$$\begin{aligned} g_1^{(n)}(z) &= \frac{ab}{\alpha_1(b-a)} \left(\int_0^{-z/a} (\mu_2(\xi) - \alpha_0 \mu_1(\xi)) d\xi + C^{(n)} + \frac{\alpha_1}{b} \mu_1\left(\frac{-z}{a}\right) - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\alpha_1}{a} + \frac{\alpha_1}{b} \right) \tilde{g}_2^{(n-1)}(-z) - \frac{2\alpha_1}{b} \tilde{g}_4^{(n-1)}\left(-\frac{zb}{a}\right) \right) = \\ &= \frac{ab}{\alpha_1(b-a)} \left(\int_0^{-z/a} (\mu_2(\xi) - \alpha_0 \mu_1(\xi)) d\xi + \frac{\alpha_1}{a^2 b^2} \left((a^2 + b^2) C_1 - C_6 \right) + \frac{\alpha_1}{b} \mu_1\left(\frac{-z}{a}\right) - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\alpha_1}{a} + \frac{\alpha_1}{b} \right) \left(\tilde{\psi}_2^{(n-1)}(z, a, b) + \frac{-C_1 b^2 - a C_2 z + C_3 a + C_4 z^2 - C_5 z + C_6}{2a(a^2 - b^2)} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2\alpha_1}{b} \left(\tilde{\psi}_4^{(n-1)}(z, a, b) - \frac{-C_1 a^2 - \frac{b^2 C_2 z}{a} + C_3 b + C_4 \frac{b^2 z^2}{a^2} - C_5 \frac{zb}{a} + C_6}{2b(a^2 - b^2)} \right) \right) = \\ &= \psi_1^{(n)}(z, a, b) + \frac{C_1 b^2 + a C_2 z + C_3 a - C_4 z^2 - C_5 z - C_6}{2a(a^2 - b^2)}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \psi_1^{(n)}(z, a, b) &= \frac{ab}{\alpha_1(b-a)} \left(\int_0^{-z/a} (\mu_2(\xi) - \alpha_0 \mu_1(\xi)) d\xi + \frac{\alpha_1}{b} \mu_1(-z/a) - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\alpha_1}{a} + \frac{\alpha_1}{b} \right) \tilde{\psi}_2^{(n-1)}(z, a, b) - \frac{2\alpha_1}{b} \tilde{\psi}_4^{(n-1)}(z, a, b) \right), \end{aligned}$$

функции $\tilde{\psi}_j^{(n-1)}$ определяются через предыдущие функции $\psi_j^{(k)}$, $j = \overline{1, 4}$, $k = \overline{0, n-1}$.

Аналогично доказываются представления леммы и для значений $g_j^{(k)}(z)$, $j = 2, 3, 4$.

С л е д с т в и е. Для любых $r, s, k, n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ сумма $g_1^{(r)}(x-at) + g_2^{(s)}(x+at) + g_3^{(k)}(x-bt) + g_4^{(n)}(x+bt)$ не зависит от $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$.

Лемма 3. Если функции $\varphi_j \in C^{4-j}([0, l])$, $j = \overline{0, 3}$, $\mu_i, \chi_i \in C^4([0, \infty))$, $i = 1, 2$, и выполняются условия (22)–(25), то функции $\tilde{g}_j^{(k)}(z)$, $j = \overline{1, 4}$, представленные формулами (21), принадлежат классам: $\tilde{g}_1^{(k)} \in C^4([-kl, 0])$, $\tilde{g}_2^{(k)} \in C^4([0, (k+1)l])$, $\tilde{g}_3^{(k)} \in C^4\left[\left[-\frac{klb}{a}, 0\right]\right]$ и $\tilde{g}_4^{(k)} \in C^4\left[\left[0, l + \frac{klb}{a}\right]\right]$, $k = 1, 2, 3, \dots$.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 3 следует из соотношений (17)–(25).

Лемма 4. Если функции $\varphi_j \in C^{4-j}([0, l])$, $j = \overline{0, 3}$, $\mu_1, \mu_2, \chi_1, \chi_2 \in C^4([0, \infty))$, то равенства (22)–(25) имеют место тогда и только тогда, когда они выполняются только для $k = 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о несложно осуществить с помощью метода математической индукции на основе равенств (22)–(25) и соотношений (17)–(20).

Лемма 5. Если функции $\varphi_j \in C^{4-j}([0, l])$, $j = \overline{0, 3}$, $\mu_1, \mu_2, \chi_1, \chi_2 \in C^4([0, \infty))$, то равенства (22)–(25) при $k=1$ выполняются тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия согласования:

$$\begin{aligned} d^j \mu_1(0) &= \varphi_j(0), \quad \alpha_0 d^j \mu_1(0) + \alpha_1 d \varphi_j(0) = d^j \mu_2(0), \quad j = \overline{0, 1, 2, 3}, \\ d^j \chi_1(0) &= \varphi_j(l), \quad \beta_0 d^j \chi_1(0) + \beta_1 d \varphi_j(l) = d^j \chi_2(0), \quad j = \overline{0, 1, 2, 3}, \\ (a^2 + b^2) d^2 \varphi_2(0) - a^2 b^2 d^4 \varphi_0(0) - d^4 \mu_1(0) &= 0, \\ (a^2 + b^2) d^2 \varphi_2(l) - a^2 b^2 d^4 \varphi_0(l) - d^4 \chi_1(0) &= 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Доказательство. Равенства (22)–(25) для $k=1$ запишем через значения заданных функций

$$\begin{aligned} g_1^{(1)}(0) - g_1^{(0)}(0) &= \frac{a(\mu_1(0) - \varphi_0(0))}{(a-b)}, \\ dg_1^{(1)}(0) - dg_1^{(0)}(0) &= \frac{\alpha_1(\varphi_1(0) - \mu_1'(0)) + b(\alpha_0 \mu_1(0) + \alpha_1 \varphi_0'(0) - \mu_2(0))}{(a-b)\alpha_1}, \\ d^2 g_1^{(1)}(0) - d^2 g_1^{(0)}(0) &= \frac{-\alpha_1(\varphi_2(0) - \mu_1''(0)) - b(\alpha_0 \mu_1'(0) + \alpha_1 \varphi_1'(0) - \mu_2'(0))}{a(a-b)\alpha_1}, \\ d^3 g_1^{(1)}(0) - d^3 g_1^{(0)}(0) &= \frac{\alpha_1(\varphi_3(0) - \mu_1'''(0)) + b(\alpha_0 \mu_1''(0) + \alpha_1 \varphi_2'(0) - \mu_2''(0))}{a^2(a-b)\alpha_1}, \\ d^4 g_1^{(1)}(0) - d^4 g_1^{(0)}(0) &= \frac{-b(\alpha_0 \mu_1'''(0) + \alpha_1 \varphi_3'(0) - \mu_2'''(0)) - \alpha_1((a^2 + b^2)\varphi_2''(0) - a^2 b^2 \varphi_0^{(4)}(0) - \mu_1^{(4)}(0))}{a^3(a-b)\alpha_1}, \\ g_3^{(1)}(0) - g_3^{(0)}(0) &= \frac{b(\varphi_0(0) - \mu_1(0))}{(a-b)}, \\ dg_3^{(1)}(0) - dg_3^{(0)}(0) &= \frac{-\alpha_1(\varphi_1(0) - \mu_1'(0)) - a(\alpha_0 \mu_1(0) + \alpha_1 \varphi_0'(0) - \mu_2(0))}{(a-b)\alpha_1}, \\ d^2 g_3^{(1)}(0) - d^2 g_3^{(0)}(0) &= \frac{\alpha_1(\varphi_2(0) - \mu_1''(0)) + a(\alpha_0 \mu_1'(0) + \alpha_1 \varphi_1'(0) - \mu_2'(0))}{b(a-b)\alpha_1}, \\ d^3 g_3^{(1)}(0) - d^3 g_3^{(0)}(0) &= \frac{-\alpha_1(\varphi_3(0) - \mu_1'''(0)) - a(\alpha_0 \mu_1''(0) + \alpha_1 \varphi_2'(0) - \mu_2''(0))}{b^2(a-b)\alpha_1}, \\ d^4 g_3^{(1)}(0) - d^4 g_3^{(0)}(0) &= \frac{a(\alpha_0 \mu_1'''(0) + \alpha_1 \varphi_3'(0) - \mu_2'''(0)) + \alpha_1((a^2 + b^2)\varphi_2''(0) - a^2 b^2 \varphi_0^{(4)}(0) - \mu_1^{(4)}(0))}{b^3(a-b)\alpha_1}, \\ g_2^{(1)}(l) - g_2^{(0)}(l) &= \frac{a(\chi_1(0) - \varphi_0(l))}{(a-b)}, \\ dg_2^{(1)}(l) - dg_2^{(0)}(l) &= \frac{\beta_1(\chi_1'(0) - \varphi_1(l)) + b(\beta_0 \chi_1(0) + \beta_1 \varphi_0'(l) - \chi_2(0))}{(a-b)\beta_1}, \\ d^2 g_2^{(1)}(l) - d^2 g_2^{(0)}(l) &= \frac{\beta_1(\chi_1''(0) - \varphi_2(l)) + b(\beta_0 \chi_1'(0) + \beta_1 \varphi_1'(l) - \chi_2'(0))}{a(a-b)\beta_1}, \\ d^3 g_2^{(1)}(l) - d^3 g_2^{(0)}(l) &= \frac{\beta_1(\chi_1'''(0) - \varphi_3(l)) + b(\beta_0 \chi_1''(0) + \alpha_1 \varphi_2'(l) - \chi_2''(0))}{a^2(a-b)\beta_1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d^4 g_2^{(1)}(l) - d^4 g_2^{(0)}(l) &= \frac{b(\beta_0 \chi_1'''(0) + \beta_1 \varphi_3'(l) - \chi_2'''(0)) + \beta_1((a^2 + b^2)\varphi_2''(l) - a^2 b^2 \varphi_0^{(4)}(l) - \chi_1^{(4)}(0))}{a^3(a-b)\beta_1}, \\
g_4^{(1)}(l) - g_4^{(0)}(l) &= \frac{b(-\chi_1(0) + \varphi_0(l))}{(a-b)}, \\
dg_4^{(1)}(l) - dg_4^{(0)}(l) &= \frac{\beta_1(-\chi_1'(0) + \varphi_1(l)) - a(\beta_0 \chi_1(0) + \beta_1 \varphi_0'(l) - \chi_2(0))}{(a-b)\beta_1}, \\
d^2 g_4^{(1)}(l) - d^2 g_4^{(0)}(l) &= \frac{\beta_1(\chi_1''(0) - \varphi_2(l)) + a(\beta_0 \chi_1'(0) + \beta_1 \varphi_1'(l) - \chi_2'(0))}{b(b-a)\beta_1}, \\
d^3 g_4^{(1)}(l) - d^3 g_4^{(0)}(l) &= \frac{\beta_1(\chi_1'''(0) - \varphi_3(l)) + a(\beta_0 \chi_1''(0) + \alpha_1 \varphi_2'(l) - \chi_2''(0))}{b^2(b-a)\beta_1}, \\
d^4 g_4^{(1)}(l) - d^4 g_4^{(0)}(l) &= \frac{a(\beta_0 \chi_1'''(0) + \beta_1 \varphi_3'(l) - \chi_2'''(0)) - \beta_1((a^2 + b^2)\varphi_2''(l) - a^2 b^2 \varphi_0^{(4)}(l) - \chi_1^{(4)}(0))}{b^3(b-a)\beta_1}.
\end{aligned}$$

Такие равенства выполняются тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования (29). Это видно из соотношений (17)–(20). Лемма 5 доказана.

Пусть $\left[\frac{a}{b}\right] = m$ – целая часть числа $\frac{a}{b}$, $m > 1$. Разобьем область $\bar{Q}$ с помощью характеристик уравнения на подобласти $Q^{(r,s,k,n)}$. Разбиение области $\bar{Q}$ на подобласти представлено на рисунке.

Теорема 1. *Предположим, что функции $\varphi_j \in C^{4-j}([0, l])$, $j = \overline{0, 3}$, $\mu_1, \mu_2 \in C^4([0, \infty))$, $\chi_1, \chi_2 \in C^4([0, \infty))$. В классе функций $C^4(\bar{Q})$ существует единственное классическое решение $u(t, x)$ задачи (2)–(5) при выполнении указанных условий гладкости на заданные функции тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования (26).*

Доказательство теоремы 1 фактически проведено в предыдущих рассуждениях.

Перейдем к решению задачи (1)–(4). Находим частное решение уравнения (1).

Пусть $\omega(t, \tau, x)$ – решение следующей задачи:

$$(\partial_t^2 - a^2 \partial_x^2)(\partial_t^2 - b^2 \partial_x^2)\omega(t, \tau, x) = 0, \quad (27)$$

с начальными условиями

$$\partial_t^j \omega(0, \tau, x) = 0, j = 0, 1, 2, \text{ и } \partial_t^3 \omega(0, \tau, x) = \tilde{f}(\tau, x), \quad (28)$$

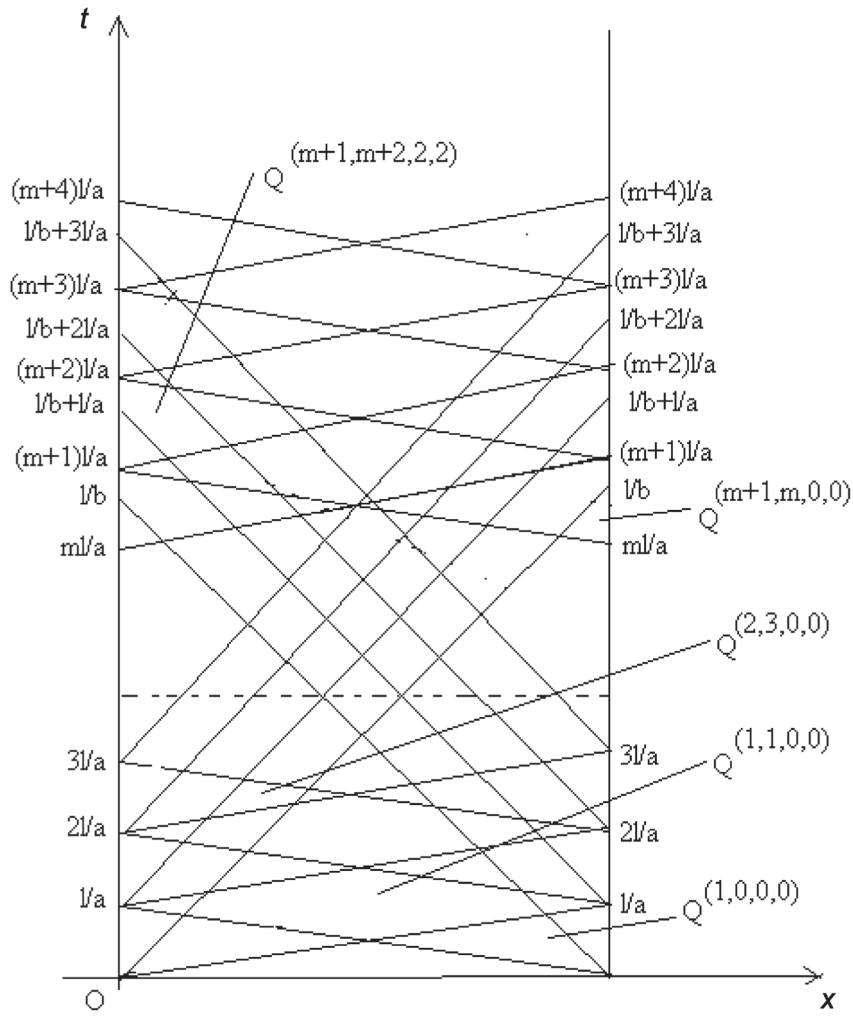
где $\tilde{f}$ – продолжение функции f по переменной x с отрезка $[0, l]$ на всю полупрямую $[0, \infty)$.

Лемма 6. *Частное решение $v(t, x)$ уравнения (1) можно находить через решение однородного уравнения (27)–(28) с параметром $\tau \in [0, \infty)$ по формуле*

$$v(t, x) = \int_0^t \omega(t - \tau, \tau, x) d\tau. \quad (29)$$

Доказательство. Вычислим частные производные функции v , представленные формулой (29):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial t} &= \omega(0, t, x) + \int_0^t \frac{\partial \omega(t - \tau, \tau, x)}{\partial t} d\tau = \int_0^t \frac{\partial \omega(t - \tau, \tau, x)}{\partial t} d\tau, \\
\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{\partial \omega(0, t, x)}{\partial t} + \int_0^t \frac{\partial^2 \omega(t - \tau, \tau, x)}{\partial t^2} d\tau = \int_0^t \frac{\partial^2 \omega(t - \tau, \tau, x)}{\partial t^2} d\tau,
\end{aligned}$$



Разбиение области $\bar{Q}$ на под области $Q^{(r,s,k,n)}$: $Q^{(-1,0,0,0)} = \emptyset$ — пустое множество;

$$Q^{(r,s,k,n)} = \{(t,x) \in \bar{Q}, sl - x \leq at \leq x + rl, nl - x \leq bt \leq x + kl\}; \quad \bar{Q} = \bigcup_{s=0}^m \bigcup_{r=s-1}^{s+1} Q^{(r,s,0,0)} \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=i-1}^{i+1} \bigcup_{k=m+i-1}^{m+i} \bigcup_{s=m+j-1}^{m+j} Q^{(m+i,m+j,k,s)}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 v}{\partial t^3} &= \frac{\partial^2 \omega(0, t, x)}{\partial t^2} + \int_0^t \frac{\partial^3 \omega(t-\tau, \tau, x)}{\partial t^3} d\tau = \int_0^t \frac{\partial^3 \omega(t-\tau, \tau, x)}{\partial t^3} d\tau, \\ \frac{\partial^4 v}{\partial t^4} &= \frac{\partial^3 \omega(0, t, x)}{\partial t^3} + \int_0^t \frac{\partial^4 \omega(t-\tau, \tau, x)}{\partial t^4} d\tau = \tilde{f}(t, x) + \int_0^t \frac{\partial^4 \omega(t-\tau, \tau, x)}{\partial t^4} d\tau, \\ \frac{\partial^4 v}{\partial t^2 \partial x^2} &= \int_0^t \frac{\partial^4 \omega(t-\tau, \tau, x)}{\partial t^2 \partial x^2} d\tau, \quad \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = \int_0^t \frac{\partial^4 \omega(t-\tau, \tau, x)}{\partial x^4} d\tau. \end{aligned}$$

Далее имеем

$$\frac{\partial^4 v}{\partial t^4} - (a^2 + b^2) \frac{\partial^4 v}{\partial t^2 \partial x^2} + a^2 b^2 \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = \tilde{f}(t, x) + \int_0^t \left(\frac{\partial^4 \omega}{\partial t^4} - (a^2 + b^2) \frac{\partial^4 \omega}{\partial t^2 \partial x^2} + a^2 b^2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} \right) d\tau = \tilde{f}(t, x)$$

или

$$(\partial_t^2 - a^2 \partial_x^2)(\partial_t^2 - b^2 \partial_x^2)v(t, x) = \tilde{f}(t, x).$$

Лемма доказана.

Решение исходной задачи (1)–(4) можно представить в виде

$$u(t, x) = \hat{u}(t, x) + v(t, x),$$

где v , согласно формуле (29), – частное решение уравнения (1). Следовательно, $\hat{u}$ – решение однородного уравнения

$$L\hat{u} = \left(\partial_t^2 - a^2\partial_x^2\right)\left(\partial_t^2 - b^2\partial_x^2\right)\hat{u}(t, x) = 0, \quad (t, x) \in \overline{Q}, \quad (30)$$

удовлетворяющее условиям Коши

$$\partial_t^j \hat{u}(0, x) = \varphi_j(x) - \int_0^0 \partial_t^j \omega(t - \tau, \tau, x) d\tau = \varphi_j(x), \quad j = 0, 1, 2, 3, \quad x \in [0, l], \quad (31)$$

граничным условиям

$$\hat{u}(t, 0) = \mu_1(t) - v(t, 0) = \hat{\mu}_1(t), \quad t \in [0, \infty), \quad (32)$$

$$\alpha_0 \hat{u}(t, 0) + \alpha_1 \partial_x \hat{u}(t, 0) = \mu_2(t) - \alpha_0 v(t, 0) - \alpha_1 \partial_x v(t, 0) = \hat{\mu}_2(t), \quad t \in [0, \infty), \quad (33)$$

$$\hat{u}(t, l) = \chi_1(t) - v(t, l) = \hat{\chi}_1(t), \quad t \in [0, \infty), \quad (34)$$

$$\beta_0 \hat{u}(t, l) + \beta_1 \partial_x \hat{u}(t, l) = \chi_2(t) - \beta_0 v(t, l) - \beta_1 \partial_x v(t, l) = \hat{\chi}_2(t), \quad t \in [0, \infty). \quad (35)$$

Так как $\hat{u}$ – решение задачи (30)–(35), то в угловых точках $(0, 0)$ и $(0, l)$ для функций φ_j , $j = \overline{0, 3}$, $\hat{\mu}_i, \hat{\chi}_i$, $i = 1, 2$, должны выполняться условия согласования

$$\begin{aligned} d^j \hat{\mu}_1(0) &= \varphi_j(0), \quad \alpha_0 d^j \hat{\mu}_1(0) + \alpha_1 d \varphi_j(0) = d^j \hat{\mu}_2(0), \quad j = 0, 1, 2, 3, \\ d^j \hat{\chi}_1(0) &= \varphi_j(l), \quad \beta_0 d^j \hat{\chi}_1(0) + \beta_1 d \varphi_j(l) = d^j \hat{\chi}_2(0), \quad j = 0, 1, 2, 3, \\ (a^2 + b^2) d^2 \varphi_2(0) - a^2 b^2 d^4 \varphi_0(0) - d^4 \hat{\mu}_1(0) &= 0, \\ (a^2 + b^2) d^2 \varphi_2(l) - a^2 b^2 d^4 \varphi_0(l) - d^4 \hat{\chi}_1(0) &= 0. \end{aligned} \quad (36)$$

Из представления (29) и условий (28) следуют следующие соотношения:

$$\begin{aligned} v(0, 0) &= \partial_t v(0, 0) = \partial_t^2 v(0, 0) = \partial_t^3 v(0, 0) = 0, \quad \partial_t^4 v(0, 0) = \tilde{f}(0, 0), \\ v(0, l) &= \partial_t v(0, l) = \partial_t^2 v(0, l) = \partial_t^3 v(0, l) = 0, \quad \partial_t^4 v(0, l) = \tilde{f}(0, l), \\ \partial_x v(0, 0) &= \partial_t(\partial_x v(0, 0)) = \partial_t^2(\partial_x v(0, 0)) = \partial_t^3(\partial_x v(0, 0)) = 0, \\ \partial_x v(0, l) &= \partial_t(\partial_x v(0, l)) = \partial_t^2(\partial_x v(0, l)) = \partial_t^3(\partial_x v(0, l)) = 0. \end{aligned} \quad (37)$$

Из условий согласований (36) согласно (37) для функций φ_j , $j = \overline{0, 3}$, $\hat{\mu}_i, \hat{\chi}_i$, $i = 1, 2$, и f получаем необходимые и достаточные условия согласования для существования классического решения задачи (1)–(4):

$$\begin{aligned} d^j \mu_1(0) &= \varphi_j(0), \quad \alpha_0 d^j \mu_1(0) + \alpha_1 d \varphi_j(0) = d^j \mu_2(0), \quad j = 0, 1, 2, 3, \\ d^j \chi_1(0) &= \varphi_j(l), \quad \beta_0 d^j \chi_1(0) + \beta_1 d \varphi_j(l) = d^j \chi_2(0), \quad j = 0, 1, 2, 3, \\ (a^2 + b^2) d^2 \varphi_2(0) - a^2 b^2 d^4 \varphi_0(0) - d^4 \mu_1(0) &= f(0, 0), \\ (a^2 + b^2) d^2 \varphi_2(l) - a^2 b^2 d^4 \varphi_0(l) - d^4 \chi_1(0) &= f(0, l), \end{aligned} \quad (38)$$

где d^j – производные порядка $j = \overline{0, 4}$ и $d^j = \frac{d^j}{dt^j}$.

Т е о р е м а 2. *Предположим, что функции $f \in C^{0,3}(\overline{Q})$, $\varphi_j \in C^{4-j}([0, l])$, $j = \overline{0, 3}$, $\mu_1, \mu_2, \chi_1, \chi_2 \in C^4[0, \infty)$. При выполнении указанных условий гладкости на заданные функции*

существует единственное классическое решение $u(t, x) = \hat{u}(t, x) + v(t, x)$ задачи (1)–(4) из класса $C^4(\overline{Q})$, где $\hat{u}$ – решение задачи (30)–(35), а функция v определяется формулой (29).

Заключение. В данной статье получены формулы классического решения смешанной задачи для биволнового уравнения. Доказано, что эта задача имеет единственное решение тогда и только тогда, когда выполняются в угловых точках заданной области изменения независимых переменных условия согласования для заданных функций уравнения, условий Коши и граничных условий. Следует отметить, что эти условия являются необходимыми и достаточными.

Список использованной литературы

1. Корзюк, В. И. Смешанная задача для гиперболического уравнения четвертого порядка / В. И. Корзюк, Е. С. Чеб // Вест. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2004. – № 2. – С. 9–13.
2. Корзюк, В. И. Смешанные задачи для биволнового уравнения / В. И. Корзюк, Е. С. Чеб // Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. – 2005. – № 1. – С. 63–68.
3. Korzyuk, V. I. Generalized-classical solution of the mixed problems for hyperbolic equations of the second order / V. I. Korzyuk // Analytic Methods of Analysis and Differential Equations: AMAD 2003. – Cottenham, Cambridge: Cambridge Scientific Publishers, 2006. – P. 133–154.
4. Корзюк, В. И. Задача Коши для уравнения четвертого порядка с биволновым оператором / В. И. Корзюк, Е. С. Чеб // Дифференц. уравнения. – 2007. – Т. 43, № 5. – С. 669–676.
5. Радыно, Я. В. Задача Коши для некоторых абстрактных гиперболических уравнений четного порядка / Я. В. Радыно, Н. И. Юрчук // Дифференц. уравнения. – 1976. – Т. 12, № 2. – С. 331–342.
6. Hadamard, J. Le problem de Cauchy et les equations aux derives partielles lineaires hyperboliques / J. Hadamard. – Paris, 1932.
7. Hadamard, J. Proprietes d'une equation lineaire aux derives partielles du quatrieme order // J. Hadamard // Tohoku Math. J. – 1933. – Vol. 37. – P. 133–150.
8. Корзюк, В. И. Классическое решение смешанной задачи для биволнового уравнения методом характеристик / В. И. Корзюк, Е. С. Чеб, Ле Тхи Тху // Тр. ин-та математики Нац. акад. наук Беларусі. – 2010. – Т. 18, № 2. – С. 36–54.
9. Korzyuk, V. I. Solution of the Cauchy problem for a hyperbolic equation with constant coefficients in the case of two independent variables / V. I. Korzyuk, I. S. Kozlovskaya // Differential equations. – 2012. – Vol. 48, no. 5. – P. 1–10.
10. Hetnarski, R. B. Mathematical theory of elasticity / R. B. Hetnarski, J. Ignaczak. – Taylor and Francis Books Inc., 2004.

Поступила в редакцию 25.02.2016