УДК 517.925

А. Т. САЗОНОВА

РАЗРЕШИМЫЕ СЛУЧАИ ДЛЯ УПРОЩЕННЫХ СИСТЕМ В ЗАДАЧЕ ДВИЖЕНИЯ ЧЕТЫРЕХ ТЕЛ В ПЛОСКОСТИ

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы

(Поступила в редакцию 04.08.2014)

Введение. В последнее время в связи с развитием методов аналитической теории дифференциальных уравнений и современных систем компьютерной математики значительный интерес вызывает исследование классической ньютоновской задачи движения многих тел [1, 2]. Интересно проанализировать (как аналитически, так и численно) различные решения, возникающие в данной задаче, а также исследовать как интегрируемые, так и неинтегрируемые случаи (зависящие от наборов значений констант межчастичного взаимодействия).

Решение задачи о движении одного тела содержится уже в первом законе Ньютона – законе инерции [1].

Решение задачи двух тел также было получено Ньютоном. Опираясь на законы Кеплера движения планет и некоторые другие результаты своих предшественников, Ньютон открыл закон всемирного тяготения. Исходя из этого он доказал, что не только планеты движутся вокруг Солнца, в первом приближении в соответствии с законами Кеплера, но и движение спутников вокруг планет, а также комет вокруг Солнца подчиняется тем же законам динамики. Естественно, эти утверждения справедливы в рамках невозмущенной динамической модели, т. е. в рамках задачи двух тел, когда не учитываются взаимные планетные притяжения [3].

В отличие от задачи двух тел, задача трех тел не допускает общего решения, позволяющего для произвольных значений координат и скоростей тел в начальный момент времени $t = 0$ предсказать положение каждого из трех тел для любого будущего момента времени $t > 0$. И это несмотря на то, что ввиду своей важности задача трех тел привлекала к себе внимание многих математиков и механиков: Л. Эйлера, Ж. Лагранжа, П. Лапласа, К. Якоби, А. Пуанкаре, Дж. Биркгофа. В 1912 г. финскому математику К. Зундману удалось построить общее решение ньютоновской задачи движения трех тел в виде степенных рядов [4]. Точнее, ему удалось описать алгоритм нахождения их коэффициентов. Однако, как показал Д. Белорицкий [5], для вычислительной астрономии данные ряды не представляют интереса в силу того, что скорость их сходимости чрезвычайно мала.

Исследования задачи трех тел встречаются также в работах [6, 7], в которых математическая модель движения N тел записана в виде системы, состоящей из N обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\varsigma_n'' = 2\sum_{\substack{m=1\\ m\neq n}}^{m=N} a_{nm}\frac{\varsigma_n'\varsigma_m'}{\varsigma_n-\varsigma_m},\ n = 1, ..., N. \tag{1}$$

Зависимые переменные $\varsigma_n = \varsigma_n(\tau)$ являются комплексными. Константы взаимодействия a_{nm} априори произвольны, за исключением требования симметрии $a_{nm} = a_{mn}$.

Интерес к исследованию системы (1) также вызвал следующий факт: при отождествлении комплексной ς-плоскости с физической плоскостью и при рассмотрении вещественной переменной τ (интерпретируемое как «физическое время») движение N точек ς_n определяется решением плоской задачи многих тел, описываемой ньютоновскими уравнениями движения с интересным свойством периодичности (а именно, среди таких решений задачи многих тел имеется много решений с полностью периодическими траекториями [8, 9]). Следует также отметить, что в работах [7, 10] были получены необходимые и достаточные условия наличия мероморфных решений в плоской задаче трех тел.

Несмотря на кажущуюся простоту формул (1), аналитического решения задачи в общем виде для $N > 3$ пока не найдено.

В данной работе рассматривается плоская классическая ньютоновская задача о движении четырех тел.

Из (1) [7] видно, что центр масс $Z \equiv Z(\tau)$,

$$Z = \frac{\varsigma_1 + \varsigma_2 + \varsigma_3 + \varsigma_4}{4}$$

движется равномерно. Действительно,

$$Z'' = 0,$$

$$Z(\tau) = Z(0) + Z'(0)\tau = Z(0) + V\tau,$$

где V – постоянная. Положим

$$a_{12} = a_{21} = a, a_{13} = a_{31} = c, a_{14} = a_{41} = d,$$

$$a_{23} = a_{32} = b, a_{24} = a_{42} = e, a_{34} = a_{43} = f.$$

Существует также интеграл движения (что непосредственно следует из вида системы (1)) [6]:

$$K = \varsigma_1'\varsigma_2'\varsigma_3'\varsigma_4'(\varsigma_1 - \varsigma_2)^{2a}(\varsigma_2 - \varsigma_3)^{2b}(\varsigma_3 - \varsigma_1)^{2c}(\varsigma_4 - \varsigma_1)^{2d}(\varsigma_2 - \varsigma_4)^{2e}(\varsigma_3 - \varsigma_4)^{2f}.$$

Введем координаты относительно центра масс $u_n = \varsigma_n - Z,\ n = 1, 2, 3, 4$. Тогда выполняется условие

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 0.$$

Для удобства обозначений положим

$$u_1 = x,\ u_2 = y,\ u_3 = z,\ u_4 = -x - y - z.$$

С помощью несложных алгебраических преобразований можно теперь записать уравнения движения (1) при $N = 4$ и интеграл движения K в новых переменных x, y, z:

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2a\dfrac{(\dot{x}+V)(\dot{y}+V)}{x-y} + 2c\dfrac{(\dot{x}+V)(\dot{z}+V)}{x-z} - 2d\dfrac{(\dot{x}+V)(\dot{x}+\dot{y}+\dot{z}-V)}{2x+y+z}, \\ \ddot{y} = -2a\dfrac{(\dot{x}+V)(\dot{y}+V)}{x-y} + 2b\dfrac{(\dot{y}+V)(\dot{z}+V)}{y-z} - 2e\dfrac{(\dot{y}+V)(\dot{x}+\dot{y}+\dot{z}-V)}{x+2y+z}, \\ \ddot{z} = -2c\dfrac{(\dot{x}+V)(\dot{z}+V)}{x-z} - 2b\dfrac{(\dot{y}+V)(\dot{z}+V)}{y-z} - 2f\dfrac{(\dot{z}+V)(\dot{x}+\dot{y}+\dot{z}-V)}{x+y+2z}, \end{cases} \tag{2}$$

$$K = (\dot{x}+V)(\dot{y}+V)(\dot{z}+V)(\dot{x}+\dot{y}+\dot{z}-V)(x-y)^{2a}(y-z)^{2b} \times$$
$$\times (z-x)^{2c}(2x+y+z)^{2d}(x+2y+z)^{2e}(x+y+2z)^{2f},$$

где $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ t = \tau - \tau_0,\ V = Z'(0),\ K = \text{const}$.

Основная часть. Рассмотрим дифференциальную систему шестого порядка

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2c\dfrac{\dot{x}\dot{z}}{x-z} - 2d\dfrac{\dot{x}(\dot{x}+\dot{z})}{2x+z}, \\ \ddot{y} = -2a\dfrac{\dot{x}(\dot{y}+V)}{x} + 2b\dfrac{(\dot{y}+V)\dot{z}}{z} - 2e\dfrac{(\dot{y}+V)(\dot{x}+\dot{z})}{x+z}, \\ \ddot{z} = -2c\dfrac{\dot{x}\dot{z}}{x-z} - 2f\dfrac{\dot{z}(\dot{x}+\dot{z})}{x+2z}, \end{cases} \tag{3}$$

которая является инвариантной относительно замены переменных $(t, x, y, z;\ \varepsilon t, x, \varepsilon y, z)$, где ε – параметр. Система (3) является упрощенной для (2).

Замечание 1. Система (3) получена путем замены переменных в системе (2) $t = \varepsilon t, y = \varepsilon y$ при $\varepsilon \to 0$, где ε – параметр.

Преобразуем второе уравнение системы (3)

$$\ddot{y} = -2a\frac{\dot{x}}{x}(\dot{y}+V) + 2b\frac{\dot{z}}{z}(\dot{y}+V) - 2e\frac{\dot{x}+\dot{z}}{x+z}(\dot{y}+V),$$

$$\frac{\ddot{y}}{\dot{y}+V} = -2a\frac{\dot{x}}{x} + 2b\frac{\dot{z}}{z} - 2e\frac{\dot{x}+\dot{z}}{x+z}.$$

Интегрирование последнего уравнения дает

$$\dot{y} = Ax^{-2a}z^{2b}(x+z)^{-2e} - V, \tag{4}$$

где A – произвольная постоянная.

Рассмотрим теперь первое и третье уравнения системы (3)

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2c\dfrac{\dot{x}\dot{z}}{x-z} - 2d\dfrac{\dot{x}(\dot{x}+\dot{z})}{2x+z}, \\ \ddot{z} = -2c\dfrac{\dot{x}\dot{z}}{x-z} - 2f\dfrac{\dot{z}(\dot{x}+\dot{z})}{x+2z}. \end{cases} \tag{5}$$

Согласно результатам работы [10], справедлива

Лемма 1. *Для наличия у системы* (5) *свойства Пенлеве* [11] *необходимо выполнение одного из условий*

1. $d = f = -\dfrac{1}{2},\ c = 0;$

2. $d = 0,\ c = f = -\dfrac{1}{2}.$

Согласно результатам работы [6], справедлива

Лемма 2. *Для того, чтобы все решения системы* (1) *являлись мероморфными функциями переменной t, необходимо, чтобы все показатели* $\Gamma, \gamma_n, \beta_n,\ n = \overline{1,6}$, *n – порядковый номер элемента, определяемые через константы* a, b, c, d, e, f *с помощью соотношений*

$$\Gamma = \frac{2}{2+a+b+c+d+e+f},\ \gamma_n = \frac{1}{1+a_n},\ \beta_n = -2a_n,$$

где

$$a_n \in \left\{-2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, 0\right\},\ a_1 = a,\ a_2 = b,\ a_3 = c,\ a_4 = d,\ a_5 = e,\ a_6 = f,$$

принимали целочисленные или бесконечные значения.

Пусть $c = 0,\ d = f = -\dfrac{1}{2},$ тогда система (5) принимает вид

$$\begin{cases} \ddot{x} = \dfrac{\dot{x}(\dot{x}+\dot{z})}{2x+z}, \\ \ddot{z} = \dfrac{\dot{z}(\dot{x}+\dot{z})}{x+2z} \end{cases} \tag{6}$$

и имеет соответствующий интеграл движения

$$K = \frac{\dot{x}\dot{y}(\dot{x}+\dot{y})}{(x+2z)(2x+z)}.$$

Непосредственной подстановкой в систему (6) легко проверить, что данная система имеет общее решение вида

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{K}{6}t^3 + A_2 t^2 + A_0, \\
z &= \frac{K}{6}t^3 + B_2 t^2 + B_1 t + B_0,
\end{aligned} \tag{7}
$$

где $t = \tau - \tau_0$, τ_0, K, A_0, A_2 – произвольные постоянные, а величины B_0, B_1, B_2 определяются из соотношений

$$
B_0 = -2A_0,
$$

$$
B_1 = -\frac{3KA_0}{2A_2},
$$

$$
B_2 = -\frac{3K^2 A_0}{8A_2^{\,2}}.
$$

Из лемм 1, 2 и равенств (7) следует, что для наличия у системы (3) свойства Пенлеве необходимо, чтобы *a, b, c, d, e, f* принимали значения, приведенные в табл. 1.

Таблица 1. **Значение констант *a, b, c, d, e, f***

a	–2	0	0	–2	–2	–1	0	0	–1	–3/2	–3/2	0	–3/2	–3/2	0	0	–1/2	–1	–1
b	0	–2	0	–1	0	–2	–2	–1	0	–3/2	0	–3/2	–1/2	0	–3/2	–1/2	–3/2	–1	–1
c	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
d	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2
e	0	0	–2	0	–1	0	–1	–2	–2	0	–3/2	–3/2	0	–1/2	–1/2	–3/2	0	–1	0
f	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2
a	–1/2	–1	0	0	–1	–1	0	–1/2	–1/2	0	–1/2	0	0	–1/2	0	–1/2	–1/2	–1	0
b	0	0	–1	0	–1/2	0	–1	–1	0	–1/2	0	–1/2	0	–1/2	–1/2	0	–1/2	0	–1
c	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
d	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2
e	–3/2	0	0	–1	0	–1/2	–1/2	0	–1	–1	0	0	–1/2	0	–1/2	–1/2	–1/2	–1	–1
f	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2

При $c = -\frac{1}{2}$, $d = 0$, $f = -\frac{1}{2}$ система (5) принимает вид

$$
\begin{cases}
\ddot{x} = -\dfrac{\dot{x}\dot{z}}{x - z}, \\
\ddot{z} = \dfrac{\dot{x}\dot{z}}{x - z} + \dfrac{\dot{z}(\dot{x} + \dot{z})}{x + 2z}
\end{cases} \tag{8}
$$

и имеет соответствующий интеграл движения

$$
K = \frac{\dot{x}\dot{z}(\dot{x} + \dot{z})}{(x - z)(x + 2z)}.
$$

Продифференцируем первое уравнение системы (8):

$$
\dddot{x} = -\frac{\ddot{x}\dot{z}}{x - z} - \frac{\dot{x}\ddot{z}}{x - z} + \frac{(\dot{x} - \dot{z})\dot{x}\dot{z}}{(x - z)^2}.
$$

Подставим в последнее уравнение выражения для $\ddot{x}$ и $\ddot{z}$, взятые из системы (8):

$$
\dddot{x} = \frac{\dot{x}\dot{z}^2}{(x - z)^2} - \frac{\dot{x}^2\dot{z}}{(x - z)^2} - \frac{\dot{x}\dot{z}(\dot{x} + \dot{z})}{(x - z)(x + 2z)} + \frac{\dot{x}^2\dot{z}}{(x - z)^2} - \frac{\dot{x}\dot{z}^2}{(x - z)^2}.
$$

Приводя подобные слагаемые в правой части последнего равенства и учитывая выражения для интеграла движения исследуемой системы, получим

$$
\dddot{x} = -K\,.
$$

Рассуждая аналогичными образом получим линейное дифференциальное уравнение третьего порядка с постоянными коэффициентами и для функции z:

$$\dddot{z} = 2K.$$

Трижды интегрируя оба уравнения третьего порядка найдем вид функций x, z. Подставляя полученные решения в систему (8), установим связь между произвольными постоянными и запишем общее решение этой системы в виде

$$x = -\frac{K}{6}t^3 + C_1 t^2 + C_3,$$

$$z = \frac{K}{3}t^3 + D_1 t^2 - \left(\frac{4C_1 D_1 + 4C_1^2}{K}\right)t + C_3, \tag{9}$$

где $D_1 = \dfrac{3K^2 C_3 - 8C_1^3}{8C_1^2}$, $t = \tau - \tau_0$, τ_0, K, C_1, C_3 – произвольные постоянные.

Согласно леммам 1, 2 и равенствам (9), заключаем, что для наличия у системы (3) свойства Пенлеве необходимо, чтобы константы *a, b, c, d, e, f* принимали значения, приведенные в табл. 2.

Таблица 2. **Значения констант *a, b, c, d, e, f***

a	–2	0	0	–2	–2	–1	0	0	–1	–3/2	–3/2	0	–3/2	–3/2	0	0	–1/2	–1/2	0
b	0	–2	0	–1	0	–2	–2	–1	0	–3/2	0	–3/2	–1/2	0	–3/2	–1/2	–3/2	0	–1
c	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2
d	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e	0	0	–2	0	–1	0	–1	–2	–2	0	–3/2	–3/2	0	–1/2	–1/2	–3/2	0	–3/2	–1
f	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2
a	–1	0	0	–1	–1	0	–1/2	–1/2	0	–1/2	0	0	–1/2	0	–1/2	–1/2	–1	–1	–1
b	0	–1	0	–1/2	0	–1	–1	0	–1/2	0	–1/2	0	–1/2	–1/2	0	–1/2	–1	–1	0
c	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2
d	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e	0	0	–1	0	–1/2	–1/2	0	–1	–1	0	0	–1/2	0	–1/2	–1/2	–1/2	–1	0	–1
f	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2

Рассмотрим теперь опять второе уравнение системы (3), которое, как было показано выше, может быть записано в виде (4). В соответствии с табл. 1 и 2, непосредственной подстановкой в уравнение (4) наборов значений констант взаимодействия *a, b, e*, можно записать 38 простейших дифференциальных уравнений первого порядка:

1. $a = -2,\ b = 0,\ e = 0;\ \dot{y} = Ax^4 - V;$
2. $a = 0,\ b = -2,\ e = 0;\ \dot{y} = A\dfrac{1}{z^4} - V;$
3. $a = 0,\ b = 0,\ e = -2;\ \dot{y} = A(x+z)^4 - V;$
4. $a = -2,\ b = -1,\ e = 0;\ \dot{y} = A\dfrac{x^4}{z^2} - V;$
5. $a = -2,\ b = 0,\ e = -1;\ \dot{y} = Ax^4(x+z)^2 - V;$
6. $a = -1,\ b = -2,\ e = 0;\ \dot{y} = A\dfrac{x^2}{z^4} - V;$
7. $a = 0,\ b = -2,\ e = -1;\ \dot{y} = A\dfrac{(x+z)^2}{z^4} - V;$
8. $a = 0,\ b = -1,\ e = -2;\ \dot{y} = A\dfrac{(x+z)^4}{z^2} - V;$
9. $a = -1,\ b = 0,\ e = -2;\ \dot{y} = Ax^2(x+z)^4 - V;$
10. $a = -\dfrac{3}{2},\ b = -\dfrac{3}{2},\ e = 0;\ \dot{y} = A\dfrac{x^3}{z^3} - V;$

11. $a=-\frac{3}{2},\ b=0,\ e=-\frac{3}{2};\ \dot{y}=Ax^3(x+z)^3-V;$

12. $a=0,\ b=-\frac{3}{2},\ e=-\frac{3}{2};\ \dot{y}=A\frac{(x+z)^3}{z^3}-V;$

13. $a=-\frac{3}{2},\ b=-\frac{1}{2},\ e=0;\ \dot{y}=A\frac{x^3}{z}-V;$

14. $a=-\frac{3}{2},\ b=0,\ e=-\frac{1}{2};\ \dot{y}=Ax^3(x+z)-V;$

15. $a=0,\ b=-\frac{1}{2},\ e=-\frac{1}{2};\ \dot{y}=A\frac{(x+z)}{z^3}-V;$

16. $a=0,\ b=-\frac{1}{2},\ e=-\frac{3}{2};\ \dot{y}=A\frac{(x+z)^3}{z}-V;$

17. $a=-\frac{1}{2},\ b=-\frac{3}{2},\ e=0;\ \dot{y}=A\frac{x}{z^3}-V;$

18. $a=-\frac{1}{2},\ b=0,\ e=-\frac{3}{2};\ \dot{y}=Ax(x+z)^3-V;$

19. $a=-1,\ b=0,\ e=0;\ \dot{y}=Ax^2-V;$

20. $a=0,\ b=-1,\ e=0;\ \dot{y}=A\frac{1}{z^2}-V;$

21. $a=0,\ b=0,\ e=-1;\ \dot{y}=A(x+z)^2-V;$

22. $a=-1,\ b=-\frac{1}{2},\ e=0;\ \dot{y}=A\frac{x^2}{z}-V;$

23. $a=-1,\ b=0,\ e=-\frac{1}{2};\ \dot{y}=Ax^2(x+z)-V;$

24. $a=0,\ b=-1,\ e=-\frac{1}{2};\ \dot{y}=A\frac{(x+z)}{z^2}-V;$

25. $a=-\frac{1}{2},\ b=0,\ e=-1;\ \dot{y}=A\frac{x}{z^2}-V;$

26. $a=-\frac{1}{2},\ b=0,\ e=-1;\ \dot{y}=Ax(x+z)^2-V;$

27. $a=0,\ b=-\frac{1}{2},\ e=-1;\ \dot{y}=A\frac{(x+z)^2}{z}-V;$

28. $a=-\frac{1}{2},\ b=0,\ e=0;\ \dot{y}=Ax-V;$

29. $a=0,\ b=0,\ e=-\frac{1}{2};\ \dot{y}=A\frac{1}{z}-V;$

30. $a=0,\ b=0,\ e=-\frac{1}{2};\ \dot{y}=A(x+z)-V;$

31. $a=-\frac{1}{2},\ b=-\frac{1}{2},\ e=0;\ \dot{y}=A\frac{x}{z}-V;$

32. $a=-\frac{1}{2},\ b=0,\ e=-\frac{1}{2};\ \dot{y}=Ax(x+z)-V;$

33. $a=0,\ b=-\frac{1}{2},\ e=-\frac{1}{2};\ \dot{y}=A\frac{(x+z)}{z}-V;$

34. $a=-\frac{1}{2},\ b=-\frac{1}{2},\ e=-\frac{1}{2};\ \dot{y}=A\frac{x(x+z)}{z}-V;$

35. $a=-1,\ b=-1,\ e=-1;\ \dot{y}=A\frac{x^2(x+z)^2}{z^2}-V;$

36. $a=-1,\ b=-1,\ e=0;\ \dot{y}=A\frac{x^2}{z^2}-V;$

37. $a=-1,\ b=0,\ e=-1;\ \dot{y}=Ax^2(x+z)^2-V;$

38. $a=0,\ b=-1,\ e=-1;\ \dot{y}=A\frac{(x+z)^2}{z^2}-V.$

Функции x и z определены равенствами (7) и (9), которые соответствуют наборам значений констант взаимодействия $(c,d,f):\left(0,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right),\ \left(-\frac{1}{2},\ 0,\ -\frac{1}{2}\right)$.

Легко показать, что лишь обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка с номерами 1, 3, 5, 9, 11, 14, 18, 19, 21, 23, 26, 28, 30, 32, 37 будут обладать свойством Пенлеве. Также несложно установить, что в остальных случаях при интегрировании уравнений возникает логарифм, а, значит, решения данных простейших дифференциальных уравнений имеют подвижные критические особенности.

Технику отбора уравнений проиллюстрируем на двух примерах.

П р и м е р 1. Для набора значений констант взаимодействия $a=-1,\ b=0,\ e=0$ (порядковый номер 19) уравнение (4) имеет вид

$$\dot{y}=Ax^2-V. \tag{10}$$

Пусть функция x определена равенством (7). Заметим, что функция x является полиномом третьей степени относительно переменной t. Следовательно, функция Ax^2-V есть полином шестой степени по t.

Интегрирование уравнения (10) дает

$$y=\frac{AK^2}{252}t^7-\frac{A}{18}KA_2t^6+\frac{3AA_2^{\,2}}{15}t^5+\frac{AKA_0}{12}t^4+\frac{2AA_0A_2}{3}t^3+(AA_0^{\,2}-V)t+B,$$

где A,B – произвольные постоянные.

Таким образом, если $a=-1,\ b=0,\ e=0$, то уравнение (4) обладает свойством Пенлеве.

Аналогичным образом находим решение для уравнений с порядковыми номерами 1, 3, 5, 9, 11, 14, 18, 21, 23, 26, 28, 30, 32, 37.

П р и м е р 2. Для набора значений констант взаимодействия $a=0,\ b=0,\ e=-\frac{1}{2}$ (порядковый номер 29) уравнение (4) принимает вид

$$\dot{y}=\frac{A}{z}-V. \tag{11}$$

Функция z определена равенством (7). Значит, уравнение (11) можно переписать следующим образом:

$$\dot{y}=\frac{6A}{Kt^3+6B_2t^2+6B_1t+6B_0}-V.$$

$P_3(t)=Kt^3+6B_2t^2+6B_1t+6B_0$ есть многочлен третьей степени, следовательно, он имеет по крайней мере один действительный корень. Пусть α_1 – такой корень многочлена P_3, тогда данный многочлен можно представить в виде: $P_3(t)=(t-\alpha_1)P_2(t),\ \deg P_2(t)=2$. С учетом этого факта перепишем наше дифференциальное уравнение в виде

$$\dot{y}=\frac{6A}{(t-\alpha_1)P_2(t)}-V;$$

$$\dot{y}=6A\left(\frac{B}{(t-\alpha_1)}+\frac{P_1(t)}{P_2(t)}\right)-V,\ \deg P_1(t)=1.$$

Интегрирование последнего уравнения дает его общее решение

$$y=6AB\ln(t-\alpha_1)+6A\int\frac{P_1(t)}{P_2(t)}dt-Vt+C.$$

Независимо от значения интеграла $\int\frac{P_1(t)}{P_2(t)}dt$, первое слагаемое в правой части содержит логарифм. Отсюда следует, что $t=\alpha_1$ – трансцендентная точка, а значит, уравнение (4) с коэффициентами $a=0,\ b=0,\ e=-\frac{1}{2}$ не обладает свойством Пенлеве.

Учитывая результаты, полученные в работе [12], заключаем, что справедлива следующая

Т е о р е м а 1. *Для наличия у системы* (3) *свойства Пенлеве необходимо и достаточно, чтобы константы a, b, c, d, e, f принимали одно из значений табл.* 3.

Таблица 3. **Наборы значений констант взаимодействия**

a	–2	0	–2	–1	–3/2	–3/2	–1/2	–1	0	–1	–1/2	–1/2	0	–1/2	–1	–2	–1/2	–3/2	–1
b	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
c	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
d	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2
e	0	–2	–1	–2	–3/2	–1/2	–3/2	0	–1	–1/2	–1	0	–1/2	–1/2	–1	–1/2	–2	–1	–3/2
f	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1	–1	–1	–1
a	–2	0	–2	–1	–3/2	–3/2	–1/2	–1	0	–1	–1/2	–1/2	0	–1/2	–1	–1	0	–1	–1/2
b	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
c	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	0	0	0	0
d	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2
e	0	–2	–1	–2	–3/2	–1/2	–3/2	0	–1	–1/2	–1	0	–1/2	–1/2	–1	0	–1	–1/2	–1
f	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1	–1	–1	–1
a	–2	0	–2	–1	–3/2	–3/2	–1/2	–1	0	–1	–1/2	–1/2	0	–1/2	–1	–1/2	–1/2	0	
b	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
c	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	0	0	0	
d	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	–1/2	
e	0	–2	–1	–2	–3/2	–1/2	–3/2	0	–1	–1/2	–1	0	–1/2	–1/2	–1	–1/2	0	–1/2	
f	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	–1	–1	–1	

Заключение. Исследована упрощенная для системы (2) система (3), состоящая из трех нелинейных дифференциальных уравнений и описывающая плоское движение четырех тел. Для данной упрощенной системы найдены необходимые условия наличия мероморфных решений, параметры которых приведены в табл. 1 и 2.

Для обоих случаев леммы 1 записаны соответствующие упрощенные системы (6), (8) и найдены их общие решения (7), (9). Для второго уравнения системы (3) в соответствии с наборами констант из табл. 1 и 2 для функции y получены уравнения с разделяющимися переменными.

Показано, что при указанных в табл. 3 наборах значений констант межчастичного взаимодействия общее решение системы (3) можно записать в замкнутом виде, а значит, возможно описать некоторые траектории движения в плоской задаче четырех тел.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (грант № Ф14М-148).

Литература

1. *Ньютон И.* Математические начала натуральной философии. М., 1989. С. 688.
2. *Дубошин Г. Н.* Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. М., 1976. С. 854.
3. *Ихсанов Е. В.* Компьютерные методы нормализации гамильтонов ограниченных задач небесной механики. М., 2004. С. 132.
4. *Sundman K.* // Acta mathematica. 1912. N 36. P. 14–179.
5. *Belorizky D.* // C. R. 1931. N 193. P. 766–768.
6. *Calogero F.* Classical Many-Body Problems Amenable to Exact Treatment. Berlin, 2001. Vol. 66.
7. *Calogero F., Sommacal M.* // J. of nonlinear mathematical physics. 2002. Vol. 9, N 4. P. 483–516.
8. *Calogero F., Francoise J-P.* // J. of nonlinear mathematical physics. 2002, Vol. 9, N 1. P. 99–125.
9. *Calogero F., Sommacal M., Francoise J-P.* // J. of nonlinear mathematical physics. 2003. Vol. 10, N 2. P. 157–214.
10. *Лозовская А. Т.* // Наука-2009: сб. ст. студентов и магистрантов ГрГУ им. Я. Купалы. Гродно, 2009. Ч. 2. С. 48–51.
11. *Голубев В. В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М., 1950. С. 78–81.
12. *Сазонова А. Т.* // Весн. Гродз. дзярж. ун-та імя Я. Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. 2013. № 3 (159). С. 56–60.

A. T. SAZONOVA

SOLVABLE CASES FOR THE SIMPLIFIED SYSTEMS IN THE PROBLEM OF THE MOTION OF FOUR BODIES IN THE PLANE

Summary

The introduction contains the object of investigation – the system consisting of N ordinary differential equations, which is a mathematical model of the motion of N bodies in the plane. The basic concepts are: motion of four bodies, interparticle interaction constant, Painlevé property, simplified system.

The purpose of this study is to establish the analytic properties of solution of simplified systems for a system of nonlinear differential equations describing the motion of the four bodies.

The main part deals with the study of simplified systems of a system describing the planar motion of the four bodies. These systems consist of nonlinear differential equations, each of which is of second order.

A set of interparticle interaction constants in the two cases of the problem under investigation in the plane is found. The general solution at these constants can be written in closed (rather simple) form.

Obtained are 15 nonlinear autonomous differential equations of first order with respect to one of the components of the system, whose general solution is an integer, i.e., these ordinary differential equations possess the Painlevé property, as well as 23 autonomous nonlinear differential equations of first order, whose general solution contains a logarithm. Therefore, these equations are not the equations of Painlevé type.

Necessary and sufficient conditions are established for the existence of the Painlevé property of the studied system that reveal 56 cases in the problem of four bodies in the plane when trajectories of the given bodies in the plane can be described.

The results can be applied in the analytical theory of differential equations, as well as in celestial mechanics theory.