

УДК 539.12:530.145

В. А. ПЛЕТЮХОВ

О СОВМЕСТНОМ ОПИСАНИИ БЕЗМАССОВЫХ ПОЛЕЙ СО СПИНАМИ 0 И 1

Брестский государственный университет им. А. С. Пушкина

(Поступила в редакцию 04.04.2014)

Описание свободных безмассовых квантовомеханических полей может быть осуществлено на основе релятивистски-инвариантной системы уравнений первого порядка, которая представима в матричной форме [1–3]

$$(\Gamma_{\mu} \partial_{\mu} + \Gamma_0) \psi(x) = 0, \quad (1)$$

где $\psi(x)$ – многокомпонентная волновая функция, преобразующаяся по некоторому приводимому представлению Γ группы Лоренца, Γ_{μ} и Γ_0 – квадратные числовые матрицы, причем матрица Γ_0 является особенной ($\det \Gamma_0 = 0$).

В случае неособенной матрицы Γ_0 уравнение (1) приводится к виду

$$(\Gamma_{\mu} \partial_{\mu} + mI) \psi(x) = 0 \quad (2)$$

и описывает микрообъекты с ненулевой массой.

Уравнения вида (1), (2) называются релятивистскими волновыми уравнениями (РВУ) и являются одним из распространенных способов описания элементарных частиц.

Основные требования, предъявляемые к РВУ (1), (2), заключаются в возможности лагранжевой формулировки теории и инвариантности лагранжиана относительно преобразований группы Лоренца, включая пространственные отражения. Отсюда вытекает, что представление Γ волновой функции ψ должно состоять из зацепляющихся неприводимых компонент, образующих так называемую схему зацеплений.

Важное различие РВУ (1) и (2) состоит в том, что в случае безмассового поля некоторые компоненты волновой функции являются наблюдаемыми (напряженности), а некоторые – ненаблюдаемыми (потенциалы). На потенциалах можно задать градиентные, или калибровочные преобразования Π рода и наложить дополнительные условия, исключая часть «лишних» компонент функции ψ . Для микрообъектов с ненулевой массой деление компонент волновой функции на наблюдаемые и ненаблюдаемые отсутствует, а дополнительные условия содержатся в самом уравнении (2).

Особенностью известных РВУ вида (1) является также то, что при переходе от уравнения (2), описывающего частицу со спином s , к уравнению (1) с помощью формальной замены $mI \rightarrow \Gamma_0$ ($\det \Gamma_0 = 0$) сохраняются не все значения проекции спина (спиральности) от $+s$ до $-s$. Так, например, если взять уравнение Даффина – Кеммера для спина 1, базирующееся на схеме зацеплений

$$(0,1) - \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) - (1,0) \quad (\psi = \psi_{\mu}, \psi_{[\mu\nu]}), \quad (3)$$

и совершить в нем замену

$$mI \rightarrow \Gamma_0 = \begin{pmatrix} 0_4 & \\ & I_6 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

получим хорошо известную тензорную систему

$$\begin{aligned}\partial_\nu \Psi_{[\mu\nu]} &= 0, \\ -\partial_\mu \Psi_\nu + \partial_\nu \Psi_\mu + \Psi_{[\mu\nu]} &= 0,\end{aligned}\tag{5}$$

описывающую электромагнитное поле, или фотон – частицу со спиральностью ± 1 . Здесь в качестве потенциала служит вектор Ψ_μ и выпадает степень свободы, связанная со спиральностью $s = 0$. Наоборот, при замене

$$mI \rightarrow \Gamma_0 = \begin{pmatrix} I_4 & \\ & 0_6 \end{pmatrix}\tag{6}$$

приходим к системе

$$\begin{aligned}\partial_\nu \Psi_{[\mu\nu]} + \Psi_\mu &= 0, \\ -\partial_\mu \Psi_\nu + \partial_\nu \Psi_\mu &= 0\end{aligned}\tag{7}$$

с тензор-потенциалом $\Psi_{[\mu\nu]}$, которая описывает нотоф – безмассовую частицу со спиральностью 0 [4]. При такой замене выпадают значения спиральности ± 1 .

В современных теоретико-полевых моделях, однако, возникает нередко необходимость совместного описания безмассовых полей с различными значениями спиральности [5–7]. Так, в работе [5] предложено использовать поле со спиральностью 0 (поле Кальба – Рамонда) для полупенемологического описания взаимодействия заряженных микрообъектов, представляемых в 4-мерном пространстве-времени в виде замкнутых струн. Но в случае взаимодействия открытых струн одного этого поля недостаточно. Рассматривая концы струны как точечные заряды, необходимо ввести еще вектор-потенциал Ψ_μ , соответствующий электромагнитному полю. Другими словами, для описания взаимодействия открытых струн в 4-мерном пространстве-времени необходимы два взаимосвязанных друг с другом поля: безмассовое векторное поле со спиральностями ± 1 и безмассовое скалярное поле со спиральностью 0. А поскольку струна представляет собой единый физический объект, то с точки зрения теории РВУ естественным является подход, заключающийся в совместном описании этих полей в рамках одной не распадающейся по полной группе Лоренца системы уравнений.

Для решения указанной задачи используем схему зацеплений

$$\begin{aligned}(0,0) \\ | \\ (0,1) - \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) - (1,0),\end{aligned}\tag{8}$$

которая является расширением схемы (3) за счет включения в последнюю скалярного представления $(0,0)$. Этой схеме зацеплений соответствует тензорная система уравнений наиболее общего вида

$$\alpha \partial_\mu \Psi_\mu + a \Psi_0 = 0,\tag{9a}$$

$$\beta^* \partial_\nu \Psi_{[\mu\nu]} + \alpha^* \partial_\mu \Psi_0 + b \Psi_\mu = 0,\tag{9б}$$

$$\beta(-\partial_\mu \Psi_\nu + \partial_\nu \Psi_\mu) + c \Psi_{[\mu\nu]} = 0\tag{9в}$$

и РВУ вида (1), в котором при выборе базиса

$$\Psi = (\Psi_0, \Psi_\mu, \Psi_{[\mu\nu]})\tag{10}$$

матрица Γ_0 имеет скалярно-блочную структуру

$$\Gamma_0 = \begin{pmatrix} a & & \\ & bI_4 & \\ & & cI_6 \end{pmatrix}.\tag{11}$$

Рассмотрим случай, когда

$$a = b = 0, \quad \alpha = \beta = c = 1. \quad (12)$$

Получим систему

$$\partial_\mu \Psi_\mu = 0, \quad (13a)$$

$$\partial_\nu \Psi_{[\mu\nu]} + \partial_\mu \Psi_0 = 0, \quad (13б)$$

$$-\partial_\mu \Psi_\nu + \partial_\nu \Psi_\mu + \Psi_{[\mu\nu]} = 0, \quad (13в)$$

в которой величины Ψ_0 и Ψ_μ играют роль потенциалов, $\Psi_{[\mu\nu]}$ – напряженность, уравнение (13б) – уравнение движения и (13а) – условие калибровки Лоренца, которое содержится в самой системе в качестве равноправного уравнения. Система (13а)–(13в) инвариантна относительно калибровочных (в вышеуказанном смысле) преобразований

$$\Psi_\mu \rightarrow \Psi_\mu + \partial_\mu \Lambda(x), \quad (14)$$

где произвол в выборе функции $\Lambda(x)$ ограничен условием

$$\square \Lambda = 0. \quad (15)$$

Указанная калибровочная инвариантность совместно с условием (13а) приводит к тому, что из четырех компонент вектор-потенциала Ψ_μ , удовлетворяющего уравнению второго порядка

$$\square \Psi_\mu - \partial_\mu \Psi_0 = 0, \quad (16)$$

независимыми остаются только две. Еще одна степень свободы связана со скалярной функцией Ψ_0 , подчиняющейся уравнению второго порядка

$$\square \Psi_0 = 0. \quad (17)$$

Уравнения (16), (17) показывают, что здесь мы имеем дело с двумя взаимосвязанными безмассовыми полями – векторным со спиральностью ± 1 и скалярным со спиральностью 0. При этом градиент скалярного поля играет роль (внутреннего) источника для векторного поля.

Возьмем теперь в (9а)–(9в)

$$\alpha = \beta = a = c = 1, \quad b = 0. \quad (18)$$

Получим систему

$$\partial_\mu \Psi_\mu + \Psi_0 = 0, \quad (19a)$$

$$\partial_\nu \Psi_{[\mu\nu]} + \partial_\mu \Psi_0 = 0, \quad (19б)$$

$$-\partial_\mu \Psi_\nu + \partial_\nu \Psi_\mu + \Psi_{[\mu\nu]} = 0. \quad (19в)$$

Система (19а)–(19в) отличается от (13а)–(13в) только видом первого уравнения, которое в данном случае можно рассматривать как содержащееся в самой системе дополнительное условие типа калибровки Фейнмана. Поэтому может создаться впечатление, что по своему физическому содержанию эти системы эквивалентны. Поясним, что имеется в виду.

Трудности квантового описания безмассовых полей обусловлены наличием нефизических степеней свободы у потенциалов, которые вводятся в теорию для достижения ее явной инвариантности. На классическом уровне «лишние» степени свободы устраняются добавлением к уравнениям движения подходящего дополнительного условия. Для электромагнитного поля это обычно лоренцевская калибровка (13а). В квантовой теории $\hat{\Psi}_\mu$ – операторы, подчиняющиеся определенным коммутационным соотношениям, и перенесение на них условия (13а) приводит к противоречиям [8]. Способ снять указанные противоречия впервые был предложен Э. Ферми [9] и заключается в том, чтобы потребовать выполнения условия

$$\partial_\mu \widehat{\Psi}_\mu \Psi = 0 \quad (20)$$

на векторах Ψ гильбертова пространства физических состояний. Впоследствии выяснилось, что условие (20) является слишком жестким и может быть заменено на более слабое

$$\partial_\mu \widehat{\Psi}_\mu^{(+)} \Psi = 0, \quad (21)$$

где операторы $\widehat{\Psi}_\mu^{(+)}$ содержат только положительно-частотные части. Однако и в этой схеме обнаружилось недостатки, заключающиеся в появлении в физическом подпространстве векторов состояний с нулевой нормой, которые не могут иметь физического смысла.

Один из способов обойти указанные трудности состоит во введении в классическую теорию дополнительных степеней свободы, например скалярного поля, которые при квантовании компенсируют нефизические степени свободы вектор-потенциала $\psi_\mu(x)$. Покажем, что именно такой подход позволяет осуществить система (19а)–(19в).

Прежде всего, легко убедиться, что из этой системы вытекает уравнение Даламбера (17) для функции $\psi_0(x)$ и такое же уравнение для $\psi_\mu(x)$, т. е. потенциалы $\psi_0(x)$, $\psi_\mu(x)$ действительно описывают безмассовое поле. Общие решения этих уравнений можно представить в виде суперпозиции плоских волн

$$\psi_\mu(x) = \sum_k N_k (C_{\mu k} e^{ikx} + C_{\mu k}^+ e^{-ikx}), \quad (22)$$

$$\psi_0(x) = \sum_k N_k (B_k e^{ikx} + B_k^+ e^{-ikx}). \quad (23)$$

Здесь N_k – нормировочный множитель (при данном k); $C_{\mu k}, C_{\mu k}^+, B_k, B_k^+$ – амплитуды волн; $kx = k_\mu x_\mu$ – скалярное произведение четырехмерного волнового вектора $k_\mu = (\vec{k}, i\omega)$, удовлетворяющего условию

$$k^2 = k_\mu k_\mu = \vec{k}^2 - \omega^2 = 0, \quad (24)$$

и четырехмерного радиус-вектора $x_\mu = (\vec{r}, it)$.

Для исключения нефизических решений системы (19а)–(19в) разложим амплитуды $C_{\mu k}, C_{\mu k}^+$ по полному базису

$$e_\mu^{(1)}, e_\mu^{(2)}, k_\mu, n_\mu \quad (25)$$

со свойствами [4]

$$e_\mu^{(i)} e_\mu^{(j)} = \delta_{ij}, \quad e_\mu^{(i)} k_\mu = 0, \quad e_\mu^{(i)} n_\mu = 0, \quad n_\mu^2 = -1. \quad (26)$$

Особенностью этого базиса является его неортогональность, так как он содержит изотропный вектор k_μ и $k_\mu n_\mu \neq 0$.

Искомое разложение может быть записано в виде

$$C_{\mu k} = \sum_{i=1}^2 c_{ki} e_\mu^{(i)} + c_{k3} k_\mu + c_{k0} n_\mu, \quad (27)$$

$$C_{\mu k}^+ = \sum_{i=1}^2 c_{ki}^+ e_\mu^{(i)} + c_{k3}^+ k_\mu + c_{k0}^+ n_\mu. \quad (28)$$

Далее учтем, что система (19а)–(19в) инвариантна относительно калибровочных преобразований (14), где произвол в выборе калибровочной функции Λ ограничен условием (15). Уравнение (15) означает, что функцию Λ также можно представить в виде разложения, аналогичного (27), (28):

$$\Lambda(x) = \sum_k N_k (\lambda_k e^{ikx} + \lambda_k^+ e^{-ikx}), \quad (29)$$

где λ_k, λ_k^+ – произвольные амплитуды. Подставляя формулы (22), (27)–(29) в (14), получим калибровочные преобразования для амплитуд

$$C_{\mu k} \rightarrow C_{\mu k} + i\lambda_k k_\mu, \quad (30)$$

$$C_{\mu k}^+ \rightarrow C_{\mu k}^+ - i\lambda_k^+ k_\mu, \quad (31)$$

из которых следует, что амплитуды $C_{\mu k}, C_{\mu k}^+$ определяются с точностью до несущественных слагаемых $i\lambda_k k_\mu, -i\lambda_k^+ k_\mu$ соответственно. В разложениях (27), (28) роль таких несущественных слагаемых выполняют члены $c_{k3} k_\mu$ и $c_{k3}^+ k_\mu$. Отбрасывая их, получим

$$C_{\mu k} = \sum_{i=1}^2 c_{ki} e_\mu^{(i)} + c_{k0} n_\mu, \quad (32)$$

$$C_{\mu k}^+ = \sum_{i=1}^2 c_{ki}^+ e_\mu^{(i)+} + c_{k0}^+ n_\mu. \quad (33)$$

Окончательные выражения для амплитуд классического поля представим, перейдя в обычный ортонормированный базис

$$e_\mu^{(\lambda)} = \delta_{\mu\lambda}, \quad (34)$$

первые два орта которого ($\lambda = 1, 2$) соответствуют поперечным поляризациям и совпадают с ортами $e_\mu^{(i)}$ базиса (25), (26), третий ($\lambda = 3$) и четвертый ($\lambda = 4$) – продольной и скалярной поляризациям потенциала $\psi_\mu(x)$. При этом выполняются соотношения

$$e_\mu^{(\lambda)} e_\mu^{(\lambda')} = \delta_{\lambda\lambda'}, \quad e_\mu^{(\lambda)} e_\nu^{(\lambda)} = \delta_{\mu\nu}. \quad (35)$$

Векторы k_μ, n_μ в базисе (34), (35) имеют компоненты

$$k_\mu = (0, 0, \omega, i\omega), \quad n_\mu = (0, 0, 0, i), \quad (36)$$

а амплитуды $C_{\mu k}$ (32), $C_{\mu k}^+$ (33) принимают вид

$$C_{\mu k} = \sum_{\lambda=1,2,4} c_{k\lambda} e_\mu^{(\lambda)}, \quad C_{\mu k}^+ = \sum_{\lambda=1,2,4} c_{k\lambda}^+ e_\mu^{(\lambda)+}, \quad (37)$$

где введены обозначения $c_{k4} = ic_{k0}, c_{k4}^+ = ic_{k0}^+$.

Лагранжиан системы (19а)–(19в) может быть представлен следующим способом:

$$L = \frac{1}{2} \Psi_0^2 - \Psi_\mu \partial_\mu \Psi_0 - \frac{1}{2} \Psi_{[\mu\nu]} (\partial_\mu \Psi_\nu - \partial_\nu \Psi_\mu) + \frac{1}{4} \Psi_{[\mu\nu]}^2. \quad (38)$$

Отсюда для тензора энергии импульса

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \Psi_A)} \partial_\nu \Psi_A - \delta_{\mu\nu} L \quad (39)$$

и его компоненты T_{44} следуют выражения:

$$T_{\mu\nu} = -\Psi_\mu \partial_\nu \Psi_0 - \Psi_{[\mu\alpha]} \partial_\nu \Psi_\alpha - \delta_{\mu\nu} L, \quad (40)$$

$$T_{44} = -\Psi_4 \partial_4 \Psi_0 - \Psi_{[4\alpha]} \partial_4 \Psi_\alpha - L. \quad (41)$$

Подставляя в (41) разложения (22), (23) с учетом (37) и вводя вместо амплитуд B_k, B_k^+ скалярного поля амплитуды

$$b_k = \frac{B_k}{\omega}, \quad b_k^+ = \frac{B_k^+}{\omega}, \quad (42)$$

получим для энергии

$$E = \int T_{44} d^3x$$

формулу

$$E = \frac{1}{2} \sum_k \omega \left[\sum_{\lambda=1,2,4} (c_{k\lambda} c_{k\lambda}^+ + c_{k\lambda}^+ c_{k\lambda}) + (b_k b_k^+ + b_k^+ b_k) \right], \quad (43)$$

в которой учтено, что $N = 1/\sqrt{2V\omega}$ (V – нормировочный объем).

Вторичное квантование осуществляется путем замены амплитуд $c_{k\lambda}$, $c_{k\lambda}^+$, b_k , b_k^+ на операторы, удовлетворяющие перестановочным соотношениям

$$[c_{k\lambda}, c_{k'\lambda'}^+]_- = \delta_{kk'} \delta_{\lambda\lambda'} \quad (\lambda, \lambda' = 1, 2, 4), \quad (44)$$

$$[b_k, b_k^+]_- = \delta_{kk'} \quad (45)$$

и все остальные коммутаторы равны нулю. Из условий квантования (44), (45) следует, что собственными значениями оператора $c_{k\lambda} c_{k\lambda}^+$ являются целые положительные числа или нуль.

Уравнение (19а), входящее в рассматриваемую систему как составная часть, для квантованного поля сформулируем в виде условия, накладываемого на операторы $\widehat{\Psi}_\mu$, $\widehat{\Psi}_0$, а именно, будем полагать, что

$$\left(\partial_\mu \widehat{\Psi}_\mu(x) + \widehat{\Psi}_0(x) \right)^{(+)} \Psi = 0, \quad (46)$$

где $\left(\partial_\mu \widehat{\Psi}_\mu(x) + \widehat{\Psi}_0(x) \right)^{(+)}$ – часть оператора $\left(\partial_\mu \widehat{\Psi}_\mu(x) + \widehat{\Psi}_0(x) \right)$, содержащая только положительные частоты. Из условия (46) вытекает равенство

$$\left(\sum_k \omega (b_k - c_{k4}) e^{ikx} \right) \Psi = 0, \quad (47)$$

из которого, в свою очередь, следует, что функция Ψ при всех k должна удовлетворять условию

$$(b_k - c_{k4}) \Psi = 0. \quad (48)$$

Учитывая, что операторы b_k и b_k^+ , а также c_{k4} и $(-c_{k4})^+$ эрмитово сопряжены, имеем

$$\Psi^* (b_k^+ + c_{k4}^+) = 0. \quad (49)$$

Из условий (48), (49) получаем

$$\left(\Psi, (b_k^+ - c_{k4}^+) (b_k - c_{k4}) \Psi \right) + \left(\Psi, (b_k^+ + c_{k4}^+) (b_k + c_{k4}) \Psi \right) = 0,$$

т. е.

$$\left(\Psi, (b_k b_k^+ + c_{k4} c_{k4}^+) \Psi \right) = 0. \quad (50)$$

Благодаря условию (50) исчезают средние значения той части оператора энергии, которые связаны со скалярным потенциалом ψ_0 и скалярной составляющей вектор-потенциала ψ_μ . Таким образом, остаются только поперечные колебания, и дальнейшая процедура вторичного квантования осуществляется в полном соответствии с квантованием обычного электромагнитного поля. Следовательно, система (19а)–(19в) описывает только электромагнитное поле, а скалярный потенциал ψ_0 играет в нем роль калибровочной функции.

Что же касается системы (13а)–(13в), то в соответствии с уравнением (13а) при ее квантовании используется условие (21), которое приводит к соотношениям

$$c_{k4}\Psi = 0, \quad \Psi^* c_{k4}^+ = 0. \quad (51)$$

Из (51) следует

$$\left(\Psi, c_{k4}^+ c_{k4} \Psi \right) = 0. \quad (52)$$

В данном случае устраняется среднее значение той части оператора энергии, которая отвечает только скалярной составляющей вектор-потенциала ψ_μ . Степень свободы, связанная со скалярным потенциалом ψ_0 , условием (52) не затрагивается. Следовательно, в данном случае потенциал ψ_0 описывает физическое поле, а система (13а)–(13в) дает совместное описание безмассовых полей со спиральностями 0 и ± 1 как единого физического объекта.

Заметим еще, что различие между физическим содержанием скалярных потенциалов ψ_0 в системах (13а)–(13в) и (19а)–(19в) можно установить косвенным путем и на классическом уровне, если ввести в уравнения движения (13б), (19б) источник j_μ . Считая ток j_μ сохраняющимся ($\partial_\mu j_\mu = 0$), для величин ψ_μ, ψ_0 в первом случае получим уравнения движения второго порядка

$$\square \psi_\mu - \partial_\mu \psi_0 = -j_\mu, \quad \psi_0 = 0, \quad (53)$$

а во втором

$$\square \psi_\mu = -j_\mu, \quad \psi_0 = 0. \quad (54)$$

Уравнения (54) показывают, что скалярная функция ψ_0 никак не связана с источником (не зависит от источника) и не может, следовательно, описывать физическое поле. В уравнениях (53) такая связь имеется благодаря наличию градиентного члена $\partial_\mu \psi_0$.

Результаты работы свидетельствуют о принципиальной возможности совместного описания безмассовых полей не только с максимальным $\pm s$, но и с промежуточными значениями спиральности, включая нулевую, в рамках не распадающихся по полной группе Лоренца релятивистских волновых уравнений первого порядка. Для реализации такого описания необходимо привлекать расширенный набор представлений группы Лоренца по сравнению с тем, который является минимально необходимым при построении теории безмассового поля со спиральностью $\pm s$. Полученные результаты могут представить, на наш взгляд, интерес с точки зрения приложения методов теории РВУ к современным полевым моделям фундаментальных частиц и их взаимодействий, в том числе $SU(n)$ – калибровочным моделям, теории суперструн и т. п.

Литература

1. Федоров Ф. И. // Докл. АН СССР. 1952. Т. 82, № 1. С. 37–40.
2. Богуш А. А., Мороз Л. Г. Введение в теорию классических полей. Минск, 1968.
3. Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я. Представления группы вращений и группы Лоренца. М., 1958.
4. Огиевецкий В. И., Полубаринов И. В. // Ядерная физика. 1966. Т. 4, вып. 1. С. 216–224.
5. Kalb M., Ramond P. // Phys. Rev. 1974. N 8. P. 2273–2284.
6. Aurilia A., Takahashi Y. // Progr. Theor. Phys. 1981. Vol. 66. P. 693–712.
7. Dvoeglazov V. V. // arXiv: physics/9804010 v 1 7 Apr 1998.
8. Прохоров Л. В. // УФН. 1988. Т. 154, вып. 2. С. 299–320.
9. Ферми Э. Научные труды. М., 1971. Т. 1. С. 302–375.
10. Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика. М., 1969.

V. A. PLETYUKHOV

ON SIMULTANEOUS DESCRIPTION OF MASSLESS FIELDS WITH SPINS 0 AND 1

Summary

Two eleven-component tensor field systems of Maxwell type are considered. It has been shown that an additional scalar function in one of the system is a gauge function. Therefore, this system describes a massless vector field. The second system provides a simultaneous description of massless fields with helicities 0 and ± 1 as a united physical object.