УДК 517.926.4

А. С. ВОЙДЕЛЕВИЧ

СУЩЕСТВОВАНИЕ БЕСКОНЕЧНЫХ ВСЮДУ РАЗРЫВНЫХ СПЕКТРОВ ВЕРХНИХ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ЧАСТОТ НУЛЕЙ И ЗНАКОВ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь.
e-mail: voidelevich@gmail.com

Построены примеры двух линейных дифференциальных уравнений с непрерывными на временно́й полуоси коэффициентами, спектры верхних характеристических частот нулей и знаков одного из которых состоят из множества рациональных чисел отрезка [0, 1], а другого – из множества иррациональных чисел отрезка [0, 1] и числа нуль.

Ключевые слова: однородное дифференциальное уравнение, верхняя характеристическая частота нулей, верхняя характеристическая частота знаков.

A. S. VAIDZELEVICH

EXISTENCE OF THE INFINITE EVERYWHERE DISCONTINUOUS UPPER SPECTRA OF CHARACTERISTIC FREQUENCIES OF ZEROS AND SIGNS OF LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus, e-mail: voidelevich@gmail.com

Two examples of linear differential equations with continuous coefficients on the time semi-axis were constructed, such that spectra of upper characteristic frequencies of zeros and signs of the first equation are the set of rational numbers from the segment [0, 1] and spectra of upper characteristic frequencies of zeros and signs of solutions of the second equation consist of the set of irrational numbers from the segment [0, 1] and zero.

Keywords: homogeneous differential equation, upper characteristic frequency of zeros, upper characteristic frequency of signs.

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение n-го порядка ($n \in \mathbb{N}$)

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(t)\dot{y} + a_n(t)y = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \tag{1}$$

с непрерывными коэффициентами $a_i(\cdot): \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$. Будем отождествлять уравнение (1) и его строку $a = a(\cdot) = (a_1(\cdot), \ldots, a_n(\cdot))$ коэффициентов и вследствие этого обозначать уравнение (1) также через a. Множество всех ненулевых решений уравнения (1) обозначим, следуя [1], через $S_*(a)$. Говорят, что в точке $t > 0$ происходит смена знака функции $y(\cdot): \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, если в любой окрестности этой точки функция $y(\cdot)$ принимает как положительные, так и отрицательные значения. Через $\nu^0(y(\cdot); \alpha, \beta)$ обозначим число нулей, а через $\nu^-(y(\cdot); \alpha, \beta)$ – число точек смен знака функции $y(\cdot)$ на полуинтервале $(\alpha, \beta]$; если число нулей (соответственно точек смен знака) функции $y(\cdot)$ на промежутке $(\alpha, \beta]$ бесконечно, то считаем $\nu^0(y(\cdot); \alpha, \beta) = +\infty$ (соответственно $\nu^-(y(\cdot); \alpha, \beta) = +\infty$).

Следующие два определения даны И. Н. Сергеевым [1–3].

О п р е д е л е н и е 1. Верхней характеристической частотой нулей и верхней характеристической частотой знаков решения $y(\cdot) \in S_*(a)$ уравнения (1) называются, соответственно, величины

$$\hat{\nu}^0(y) = \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{\pi}{t} \nu^0(y(\cdot); 0, t) \text{ и } \hat{\nu}^-(y) = \overline{\lim_{t \to +\infty}} \frac{\pi}{t} \nu^-(y(\cdot); 0, t). \tag{2}$$

О п р е д е л е н и е 2. Спектром верхней характеристической частоты $\hat{\nu}^0$ нулей ($\hat{\nu}^-$ знаков) уравнения (1) называется множество, состоящее из верхних характеристических частот $\hat{\nu}^0(y)$ нулей ($\hat{\nu}^-(y)$ знаков) всех решений $y(\cdot)\in S_*(a)$.

Спектр верхней характеристической частоты $\hat{\nu}^0$ нулей ($\hat{\nu}^-$ знаков) уравнения (1) обозначается через $\hat{\nu}^0\,(S_*(a))$ ($\hat{\nu}^-\,(S_*(a))$).

Известно [1, 2], что каждый из спектров верхних характеристических частот нулей и знаков произвольного уравнения (1) второго порядка состоит из одного числа, а первого порядка – из числа нуль. В работе [4] установлено, что существует периодическое дифференциальное уравнение (1) третьего порядка, спектры верхних характеристических частот нулей и знаков которого содержат невырожденный отрезок. Кроме этого, для произвольных несоизмеримых положительных действительных чисел $\omega_2 > \omega_1$ существует [5] автономное дифференциальное уравнение (1) четвертого порядка, спектры $\hat{\nu}^0(S_*(a))$ и $\hat{\nu}^-(S_*(a))$ которого совпадают с отрезком $[\omega_1,\omega_2]$.

Естественно возникает вопрос, насколько произвольными в общем случае могут быть множества, являющиеся спектрами верхних характеристических частот нулей и знаков уравнений (1). В частности, могут ли спектры верхних характеристических частот нулей и знаков некоторого уравнения (1) быть, в отличие от примеров уравнений указанных выше работ, ограниченными, бесконечными и всюду разрывными? В настоящей работе доказано существование двух линейных дифференциальных уравнений (1) третьего порядка, таких, что спектры верхних характеристических частот нулей и знаков одного из них совпадают с множеством $\mathbb{Q}\bigcap[0,1]$, а другого – с множеством $(\mathbb{I}\bigcap[0,1])\bigcup\{0\}$, где через $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{I}$ обозначены множества, соответственно, рациональных и иррациональных чисел вещественной прямой. Ниже через $\mathbb{Z}_+$ обозначается множество неотрицательных целых чисел: $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}\sqcup\{0\}$.

О п р е д е л е н и е 3. Непрерывную кусочно-линейную функцию $\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ назовем регулярной ломаной, если ее производная на соседних участках своего постоянства имеет разные знаки. Вершины ломаной – точки несуществования ее производной.

Другими словами, функция $z(\cdot):\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ – регулярная ломаная, если существует неограниченная возрастающая последовательность $(\tau_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$ неотрицательных чисел, такая, что $\tau_0=0$ и на каждом интервале (τ_k,τ_{k+1}), $k\in\mathbb{Z}_+$, функция $z(\cdot)$ имеет постоянную производную r_k, при этом для любого $k\in\mathbb{Z}_+$ справедливо неравенство $r_k\cdot r_{k+1}<0$. Точки плоскости с координатами $(\tau_k, z(\tau_k))$, $k\in\mathbb{Z}_+$, – вершины регулярной ломаной $z(\cdot)$.

В дальнейшем важную роль играет функция $h(\cdot):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, определяемая следующим образом:

$$h(t)=\begin{cases} t-2k, & \text{если} \quad t\in[2k,2k+1),\\ 2k+2-t, & \text{если} \quad t\in[2k+1,2k+2),\end{cases} \qquad \text{где} \quad k\in\mathbb{Z}.$$

Очевидно, что $h(\cdot)$ – непрерывная кусочно-линейная 2-периодическая функция, сужение которой на $\mathbb{R}_+$ является регулярной ломаной.

Для натурального $m\in\mathbb{N}$ и действительных чисел $\alpha<\gamma$ и $b<d$ определим на отрезке $[\alpha,\gamma]$ функцию $f(\cdot;\alpha,\gamma;b,d;m)$ равенством

$$f(t;\alpha,\gamma;b,d;m)=b+(d-b)\cdot h\left((2m-1)\frac{t-\alpha}{\gamma-\alpha}\right),\quad t\in[\alpha,\gamma].$$

В дальнейшем при формулировании утверждений, которые справедливы как для величины $\nu^0(y(\cdot);\alpha,\beta)$, так и для $\nu^-(y(\cdot);\alpha,\beta)$, верхние индексы у этих величин опускаем и пишем просто $\nu(y(\cdot);\alpha,\beta)$. Такое же соглашение действует и для множеств $\hat{\nu}^0\,(S_*(a))$ и $\hat{\nu}^-\,(S_*(a))$.

Из определения функции $f(\cdot)=f(\cdot;\alpha,\gamma;b,d;m)$ вытекает, что для $t\in(\alpha,\gamma]$ и чисел $f_1\in[b,d]$, $f_2\in(b,d)$ и $f_3\notin[b,d]$ справедливы соотношения

$$\nu(f(\cdot)-f_1;\alpha,t)\leqslant(2m-1)\frac{t-\alpha}{\gamma-\alpha}+1,\quad \nu(f(\cdot)-f_2;\alpha,\gamma)=2m-1,\quad \nu(f(\cdot)-f_3;\alpha,\gamma)=0. \qquad (3)$$

Зафиксируем какую-либо последовательность $(T_m)_{m\in\mathbb{N}}$ чисел, удовлетворяющих неравенствам

$$T_1 \geqslant 1, \quad T_{m+1} \geqslant (m+1)(T_1+T_2+\ldots+T_m), \quad m\geqslant 1. \tag{4}$$

П р е д л о ж е н и е. *Для элементов последовательности* $(T_m)_{m\in\mathbb{N}}$ *выполняются неравенства* $T_m \geqslant m!$ *при всех* $m\in\mathbb{N}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о проведем методом математической индукции. База индукции ($m=1$) следует из первого неравенства в (4). Пусть неравенство справедливо для $m=k$, т. е. $T_k \geqslant k!$. Докажем, что $T_{k+1}\geqslant (k+1)!$. Действительно, вследствие второго неравенства в (4) и предположения индукции получаем: $T_{k+1}\geqslant (k+1)(T_1+T_2+\ldots+T_k)\geqslant (k+1)T_k \geqslant (k+1)!$. Предложение доказано.

По последовательности $(T_m)_{m\in\mathbb{N}}$ определим новую последовательность $(t_m)_{m\in\mathbb{Z}_+}$ равенствами:

$$t_0=0, \quad t_m=\sum_{i=1}^{m} T_i, \quad m\in\mathbb{N}.$$

Л е м м а 1. 1) *Если для функции* $y(\cdot):\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ *существуют постоянные* $q\in\mathbb{R}_+$, $d\in\mathbb{R}$ *и* $m\in\mathbb{N}$, *такие, что для всех натуральных* $n\geqslant m$, *выполнено неравенство* $\nu(y(\cdot);t_n,t)\leqslant q(t-t_n)+d$ *при* $t\in(t_n,t_{n+1}]$, *то* $\hat{\nu}(y)\leqslant q\pi$.

2) *Если для функции* $y(\cdot):\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ *существуют постоянные* $q\in\mathbb{R}_+$, $d\in\mathbb{R}$ *и последовательность натуральных чисел* $(k_i)_{i\in\mathbb{N}}\uparrow+\infty$, *такие, что* $\nu(y(\cdot);t_{k_i},t_{k_i+1})\geqslant qT_{k_i+1}+d$ *при всех* $i\in\mathbb{N}$, *то* $\hat{\nu}(y)\geqslant q\pi$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Выберем произвольное $t\geqslant t_{m+1}$. Через k обозначим наибольшее натуральное число, такое, что $t_k\leqslant t<t_{k+1}$. Оценим сверху количество нулей (точек смен знака) функции $y(\cdot)$ на полуинтервале $(t_m,t]$:

$$\nu(y(\cdot);t_m,t)\leqslant \sum_{i=m+1}^{k}\nu(y(\cdot);t_{i-1},t_i)+\nu(y(\cdot);t_k,t)\leqslant \sum_{i=m+1}^{k}(qT_i+d)+q(t-t_k)+d=$$

$$=q(t-t_m)+d(k-m+1)\leqslant q(t-t_m)+d(k-m+1)\frac{t-t_m}{T_k}\leqslant\left(q+\frac{d(k-m+1)}{k!}\right)(t-t_m). \tag{5}$$

Умножив это неравенство на π/t и устремляя затем t к $+\infty$, получаем в силу (2), что $\hat{\nu}(y(\cdot))\leqslant q\pi$.

2) Оценим снизу количество нулей (точек смен знака) функции $y(\cdot)$ на полуинтервале $(0,t_{k_i+1}]$:

$$\nu(y(\cdot);0,t_{k_i+1})\geqslant \nu(y(\cdot);t_{k_i},t_{k_i+1})\geqslant qT_{k_i+1}+d=$$

$$=\frac{qT_{k_i+1}}{T_1+\ldots+T_{k_i}+T_{k_i+1}}t_{k_i+1}+d\geqslant q\,t_{k_i+1}\left(1+\frac{1}{k_i+1}\right)^{-1}+d.$$

Поэтому вследствие (2) получаем $\hat{\nu}(y)\geqslant \varlimsup_{i\to+\infty}\dfrac{\pi}{t_{k_i+1}}\nu(y(\cdot);0,t_{k_i+1})\geqslant q\pi$. Лемма доказана.

Л е м м а 2. *Для произвольного не более чем счетного множества* S *неотрицательных действительных чисел существует регулярная ломаная* $z_S(\cdot)$, *для которой справедливо соотношение* $\{\hat{\nu}(z_S(\cdot)-c):c\in\mathbb{R}\}=S\bigcup\{0\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Занумеруем элементы множества $S\bigcup\{0\}$ натуральными числами: $s_1,s_2,\ldots$. Зафиксируем какую-либо биекцию $\tau(\cdot)=(\tau_1(\cdot),\tau_2(\cdot)):\mathbb{Z}_+\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Так как $\tau(\cdot)$ – биекция, то для произвольного $m\in\mathbb{N}$ существует бесконечно много чисел $l\in\mathbb{Z}_+$, таких, что $\tau_1(l)=m$. Определим функцию $z_S(\cdot)$ сначала на отрезках $[t_{2k},t_{2k+1}]$ для всех $k\in\mathbb{Z}_+$. Для этого построим последовательность натуральных чисел $(n_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$, элементы которой зададим формулой

$$n_k=\max\left\{1,\left[(2\pi)^{-1}T_{2k+1}\,s_{\tau_1(k)}\right]\right\},$$

здесь $[\cdot]$ – целая часть числа. При $t\in[t_{2k},t_{2k+1}]$ положим $z_S(t)=f(t;t_{2k},t_{2k+1};b_k,d_k;n_k)$, где величины $b_k<d_k$ принадлежат отрезку $[1-(2\tau_1(k)-1)^{-1},1-(2\tau_1(k))^{-1}]$ и делят его в отношениях $1:(2^{k+2}-1)$ и $(2^{k+2}-1):1$ соответственно.

Для всех $k\in\mathbb{Z}_+$ доопределим $z_S(\cdot)$ на интервалах (t_{2k+1},t_{2k+2}) так, чтобы функция $z_S(\cdot)$ стала регулярной ломаной, а любая прямая, параллельная оси абсцисс, пересекала график функции $z_S(\cdot)$ на каждом интервале (t_{2k+1},t_{2k+2}), $k\in\mathbb{Z}_+$, не более двух раз.

Пусть $c\in\mathbb{R}$. Если существует такое $k\in\mathbb{Z}_+$, что $c\in(1-(2\tau_1(k)-1)^{-1},1-(2\tau_1(k))^{-1})$, то из соотношений (3) и леммы 1 следует равенство $\hat{\nu}(z_S(\cdot)-c)=s_{\tau_1(k)}$. В противном случае, при всех натуральных $k\in\mathbb{Z}_+$ функция $z_S(\cdot)-c$ имеет не более двух нулей на отрезке $[t_k,t_{k+1}]$, а значит, $\hat{\nu}(z_S(\cdot)-c)=0$. Так как $\tau_1(\mathbb{Z}_+)=\mathbb{N}$, то $\{\hat{\nu}(z_S(\cdot)-c):c\in\mathbb{R}\}=S\bigcup\{0\}$. Лемма доказана.

С л е д с т в и е 1. *Существует регулярная ломаная* $z_1(\cdot)$, *для которой справедливо соотношение* $\{\hat{\nu}(z_1(\cdot)-c):c\in\mathbb{R}\}=[0,1]\bigcap\mathbb{Q}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Существование ломаной $z_1(\cdot)$ вытекает из леммы 2, если в качестве S взять множество рациональных чисел отрезка $[0,1]$. Следствие доказано.

Л е м м а 3. *Существует регулярная ломаная* $z_{[0,1)}(\cdot)$, *для которой справедливо соотношение* $\{\hat{\nu}(z_{[0,1)}(\cdot)-c):c\in\mathbb{R}\}=[0,1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для $k\in\mathbb{Z}_+$ и $l\in\{0,\ldots,2^k-1\}$ через Δ_k^l обозначим отрезок $[2^{-k}l,2^{-k}(l+1)]$. Занумеруем отрезки Δ_k^l натуральными числами: $\Delta(1),\Delta(2),\ldots$. Пусть $\Delta(m)=[\xi_m,\eta_m]$, $m\in\mathbb{N}$.

Определим вначале функцию $z_{[0,1)}(\cdot)$ на отрезках $[t_{4k},t_{4k+1}]$ для всех $k\in\mathbb{Z}_+$. Как и в доказательстве леммы 2, для этого построим последовательность натуральных чисел $(n_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$, элементы которой зададим формулой

$$n_k=\max\Big\{1,\Big[(4\pi)^{-1}T_{2k+1}(\xi_k+\eta_k)\Big]\Big\}.$$

При $t\in[t_{4k},t_{4k+1}]$ положим $z_{[0,1)}(t)=f(t;t_{4k},t_{4k+1};b_k,d_k;n_k)$, где $b_k=\xi_k-(\eta_k-\xi_k)/4$ и $d_k=\eta_k+(\eta_k-\xi_k)/4$, если $\eta_k\neq1$, и $d_k=\eta_k-(\eta_k-\xi_k)/4$, в противном случае.

Доопределим $z_{[0,1)}(\cdot)$ на интервалах (t_{4k+1},t_{4k+4}), $k\in\mathbb{Z}_+$, так, чтобы функция $z_{[0,1)}(\cdot)$ стала регулярной ломаной, а любая прямая, параллельная оси абсцисс, пересекала график функции $z_{[0,1)}(\cdot)$ на каждом интервале (t_{4k+1},t_{4k+4}), $k\in\mathbb{Z}_+$, не более двух раз.

Пусть $c\notin[0,1)$. Тогда найдется такое натуральное $k_0\in\mathbb{N}$, что при всех натуральных $k\geqslant k_0$ функция $z_{[0,1)}(\cdot)-c$ имеет не более двух нулей на отрезке $[t_k,t_{k+1}]$. Из леммы 1 следует, что $\hat{\nu}(z_{[0,1)}(\cdot)-c)=0$.

Пусть теперь $c\in[0,1)$. Тогда из соотношений (3) и леммы 1 следует, что $\hat{\nu}(z_{[0,1)}(\cdot)-c)=c$. Таким образом, $\{\hat{\nu}(z_{[0,1)}(\cdot)-c):c\in\mathbb{R}\}=[0,1)$. Лемма доказана.

С л е д с т в и е 2. *Существует регулярная ломаная* $z_2(\cdot)$, *для которой справедливо соотношение* $\{\hat{\nu}(z_2(\cdot)-c):c\in\mathbb{R}\}=([0,1]\bigcap\mathbb{I})\bigcup\{0\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ – занумерованные каким-либо образом рациональные числа полуинтервала $[0,1)$. Для каждого q_k, $k\in\mathbb{N}$, выберем иррациональное число ζ_k таким, чтобы выполнялась цепочка неравенств

$$1>\zeta_k>q_k>\zeta_k-k^{-1}. \qquad (6)$$

Рассмотрим биекцию $\tau(\cdot)=(\tau_1(\cdot),\tau_2(\cdot)):\mathbb{Z}_+\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Определим функцию $z_2(\cdot)$ на отрезках $[t_{4k},t_{4k+1}]$ для всех $k\in\mathbb{Z}_+$, положив $z_2(t)=z_{[0,1)}(t)$ при $t\in[t_{4k},t_{4k+1}]$. Рассмотрим последовательность натуральных чисел $(n_k)_{k\in\mathbb{Z}_+}$, элементы которой задаются равенством

$$n_k=\max\Big\{1,\Big[(2\pi)^{-1}T_{4k+3}\cdot\zeta_{\tau_1(k)}\Big]\Big\}.$$

При $t \in [t_{4k+2}, t_{4k+3}]$ положим $z_2(t) = f(t; t_{4k+2}, t_{4k+3}; b_k, d_k; n_k)$, где $b_k = q_{\tau_1(k)} - 2^{-k}$ и $d_k = \min\{(1+q_{\tau_1(k)})/2, q_{\tau_1(k)} + 2^{-k}\}$. Наконец, для всех $k \in \mathbb{Z}_+$ доопределим $z_2(\cdot)$ на интервалах (t_{4k+1}, t_{4k+2}) и (t_{4k+3}, t_{4k+4}), аналогично тому, как это сделано в доказательстве леммы 3.

Если $c \notin [0,1)$, то $\hat{\nu}(z_2(\cdot) - c) = \hat{\nu}(z_{[0,1)}(\cdot) - c) = 0$. Если же $c \in [0,1) \cap \mathbb{Q}$, то существует такой номер $k \in \mathbb{N}$, что $c = q_k$. Тогда из соотношений (3), леммы 1, определения функции $z_{[0,1)}(\cdot)$ и выбора (6) числа ζ_k следует, что $\hat{\nu}(z_2(\cdot) - c) = \hat{\nu}(z_2(\cdot) - q_k) = \zeta_k \in [0,1] \cap \mathbb{I}$. Наконец, если $c \in [0,1] \cap \mathbb{I}$, то $\hat{\nu}(z_2(\cdot) - c) = c$. Таким образом, регулярная ломаная $z_2(\cdot)$, удовлетворяющая равенству $\{\hat{\nu}(z_2(\cdot) - c) : c \in \mathbb{R}\} = ([0,1] \cap \mathbb{I}) \cup \{0\}$, построена. Следствие доказано.

С л е д с т в и е 3. *Существуют ограниченные на $\mathbb{R}_+$ функции $x_1(\cdot)$ и $x_2(\cdot) \in C^3(\mathbb{R}_+)$, удовлетворяющие соотношениям*

$$\{\hat{\nu}(x_i(\cdot) - c) : c \in \mathbb{R}\} = \{\hat{\nu}(z_i(\cdot) - c) : c \in \mathbb{R}\}, \quad i = 1, 2,$$

где $z_1(\cdot)$ и $z_2(\cdot)$ – регулярные ломаные, построенные в доказательствах следствий 1 *и* 2 *соответственно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть ε, $h_1 \neq h_2$ – произвольные действительные числа, отличные от нуля. Рассмотрим многочлен $p(t; h_1, h_2, \varepsilon) = \varepsilon q(t/\varepsilon; h_1, h_2)$, где

$$q(t; h_1, h_2) = h_1 t - \frac{5}{2}(h_1 - h_2) t^4 + 3(h_1 - h_2) t^5 - (h_1 - h_2) t^6, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Нетрудно убедиться, что многочлен $p(\cdot; h_1, h_2, \varepsilon)$ удовлетворяет следующим соотношениям:

$$p(0; h_1, h_2, \varepsilon) = 0, \;\; p(\varepsilon; h_1, h_2, \varepsilon) = \varepsilon(h_1 + h_2)/2, \;\; \dot{p}(0; h_1, h_2, \varepsilon) = h_1,$$
$$\dot{p}(\varepsilon; h_1, h_2, \varepsilon) = h_2 \;\text{ и }\; \dddot{p}(t; h_1, h_2, \varepsilon) = -30\varepsilon^{-3}(h_1 - h_2) t^2 (1 - t/\varepsilon)^2.$$

Кроме того, точка пересечения касательных к графику функции $p(t; h_1, h_2, \varepsilon)$, проведенных в точках с абсциссами $t = 0$ и $t = \varepsilon$, имеет, как легко убедиться, координаты $(\varepsilon/2, \; h_1 \varepsilon/2)$.

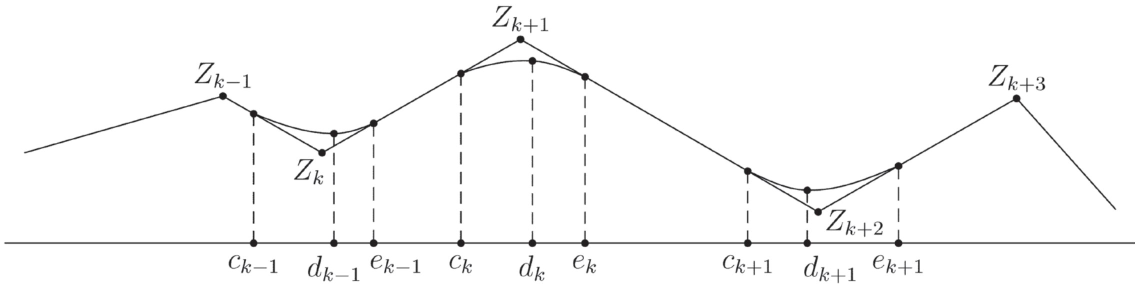
Рассмотрим произвольную регулярную ломаную $z(\cdot)$. Через $Z_k = (\tau_k, \, z(\tau_k))$, $k \in \mathbb{Z}_+$, обозначим вершины ломаной $z(\cdot)$ (рисунок), $\tau_k < \tau_{k+1}$. Пусть r_k – значение производной функции $z(\cdot)$ на интервале (τ_k, τ_{k+1}), $k \in \mathbb{Z}_+$. Для каждого $k \in \mathbb{Z}_+$ через ε_k обозначим произвольное положительное число, удовлетворяющее неравенству

$$\varepsilon_k < 3^{-1} \min\{\tau_{k+2} - \tau_{k+1}, \tau_{k+1} - \tau_k\}.$$

Пусть $x(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}_+$ – функция, такая, что для всех $k \in \mathbb{Z}_+$ справедливо равенство

$$x(t) = z(\tau_{k+1} - \varepsilon_k) + p(t - \tau_{k+1} + \varepsilon_k; r_k, \, r_{k+1}, \, 2\varepsilon_k),$$

при $t \in [\tau_{k+1} - \varepsilon_k, \tau_{k+1} + \varepsilon_k]$. В силу свойств многочлена $p(\cdot; r_k, r_{k+1}, 2\varepsilon_k)$ справедливы равенства: $x(\tau_{k+1} - \varepsilon_k) = z(\tau_{k+1} - \varepsilon_k)$ и $x(\tau_{k+1} + \varepsilon_k) = z(\tau_{k+1} + \varepsilon_k)$. При всех остальных действительных $t \geqslant 0$ величина $x(t)$ равна $z(t)$.



Регулярная ломаная

Из определения функции $x(\cdot)$ вытекает, что $x(\cdot)$ – заданная и ограниченная на $\mathbb{R}_+$, трижды непрерывно дифференцируемая функция (в нуле рассматриваем ее правостороннюю производную). Из построения регулярных ломаных $z_1(\cdot)$ и $z_2(\cdot)$ следует, что при достаточно малых $\varepsilon_k > 0$, $k \in \mathbb{Z}_+$, для построенных по ним функциям $x_1(\cdot)$ и $x_2(\cdot)$, соответственно справедливы соотношения $\{\hat{\nu}(x_i(\cdot)-c) : c \in \mathbb{R}\} = \{\hat{\nu}(z_i(\cdot)-c) : c \in \mathbb{R}\}$, $i = 1, 2$. Следствие доказано.

Т е о р е м а. 1) *Существует линейное дифференциальное уравнение* (1) *третьего порядка, такое, что его спектры верхних характеристических частот нулей и знаков совпадают с множеством* $\mathbb{Q} \bigcap [0,1]$.

2) *Существует линейное дифференциальное уравнение* (1) *третьего порядка, такое, что его спектры верхних характеристических частот нулей и знаков совпадают с множеством* $(\mathbb{I} \bigcap [0,1]) \bigcup \{0\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $\nu = \nu^0, \nu^-$. Пусть $z(\cdot)$, равная $z_1(\cdot)$ или $z_2(\cdot)$, – регулярная ломаная с вершинами $Z_k = (\tau_k, z(\tau_k))$, где $k \in \mathbb{Z}_+$. Пусть $x(\cdot) \in C^3(\mathbb{R}_+)$ – функция, построенная по ломаной $z(\cdot)$ как в доказательстве следствия 3. Докажем, что существует функция $q(\cdot) \in C^1(\mathbb{R}_+)$, такая, что система функций $\{1, x(\cdot), y(\cdot)\}$, где

$$y(t) = \int_0^t \int_0^\tau q(\xi)\, d\xi\, d\tau, \quad t \geqslant 0,$$

является фундаментальной системой решений некоторого уравнения (1) третьего порядка и $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = +\infty$. Для того чтобы система функций $\{1, x(\cdot), y(\cdot)\}$ представляла собой фундаментальную систему решений некоторого уравнения (1) третьего порядка, необходимо и достаточно (см., напр., [6, с. 26]), чтобы определитель Вронского

$$\delta(t) = W(1, x(\cdot), y(\cdot)) = \begin{vmatrix} \dot{x}(t) & \int_0^t q(\tau)\, d\tau \\ \ddot{x}(t) & q(t) \end{vmatrix}$$

этой системы функций был отличен от нуля при всех $t \geqslant 0$.

Пусть числа ε_k, $k \in \mathbb{Z}_+$, те же, что и в доказательстве следствия 3, а $c_k = \tau_{k+1} - \varepsilon_k$, $e_k = \tau_{k+1} + \varepsilon_k$. Пусть d_k – абсцисса локального экстремума функции $x(\cdot)$ на интервале (c_k, e_k), $k \in \mathbb{N}$; и без нарушения общности считаем, что $e_{-1} = \tau_0 = 0$. Из способа построения функции $x(\cdot)$ следует, что $\dot{x}(d_k) = 0$ и $\ddot{x}(d_k) \neq 0$. Без ограничения общности считаем, что $\dot{x}(e_{-1}) > 0$. Положим $q(e_{-1}) > 0$. Тогда при $t = 0$ справедливы равенства

$$\delta(0) = \delta(e_{-1}) = \begin{vmatrix} \dot{x}(e_{-1}) & 0 \\ \ddot{x}(e_{-1}) & q(e_{-1}) \end{vmatrix} = \dot{x}(e_{-1}) \cdot q(e_{-1}) > 0.$$

Предположим теперь, что для некоторого $k \in \mathbb{Z}_+$ функция $q(t)$ определена при всех моментах времени $t \leqslant e_{k-1}$ таким образом, что $\delta(t) > 0$ при $t \leqslant e_{k-1}$ и $\dot{x}(e_{k-1}) > 0$, а также выполнены соотношения

$$q(e_{k-1}) > 0 \quad \text{и} \quad \int_0^{e_{k-1}} q(\tau)\, d\tau = 0.$$

За 4 шага определим требуемым образом непрерывно дифференцируемую функцию $q(\cdot)$ на полуинтервале $(e_{k-1}, e_{k+1}]$, которая гладко состыковывается в точке e_{k-1} с уже определенной при $t \in [0, e_{k-1}]$ функцией $q(t)$.

Шаг 1. Возьмем $q(t)$ положительной при $t \in (e_{k-1}, d_k)$ и равной нулю при $t = d_k$. Так как $\dot{x}(t) = r_k > 0$ и $\ddot{x}(t) = 0$ при $t \in (e_{k-1}, c_k]$, а $\dot{x}(t) > 0$ и $\ddot{x}(t) < 0$ при $t \in (c_k, d_k)$, то $\delta(t) > 0$ при $t \in (e_{k-1}, d_k)$. Так как $\int_0^{d_k} q(\tau)\, d\tau > 0$, $\dot{x}(d_k) = 0$ и $\ddot{x}(d_k) < 0$, то $\delta(d_k) > 0$.

Шаг 2. При $t \in (d_k, e_k]$ возьмем функцию $q(t)$ отрицательной и такой, чтобы $\int_0^t q(\tau)\,\mathrm{d}\tau > 0$ при $t \in (d_k, e_k)$ и $\int_0^{e_k} q(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 0$. Из определения функции $x(\cdot)$ следует, что $\dot{x}(t) < 0$ и $\ddot{x}(t) < 0$, $t \in (d_k, e_k)$, а также $\dot{x}(e_k) < 0$ и $\ddot{x}(e_k) = 0$, поэтому $\delta(t) > 0$ при $t \in (d_k, e_k]$.

Шаг 3. При $t \in (e_k, d_{k+1})$ возьмем $q(t)$ отрицательной и равной нулю при $t = d_{k+1}$, тогда $\int_0^t q(\tau)\,\mathrm{d}\tau < 0$ для $t \in (e_k, d_{k+1}]$. Так как $\dot{x}(t) < 0$ и $\ddot{x}(t) \geqslant 0$ при $t \in (e_k, d_{k+1})$, а $\dot{x}(d_{k+1}) = 0$ и $\ddot{x}(d_{k+1}) > 0$, то $\delta(t) > 0$ при $t \in (e_k, d_{k+1}]$.

Шаг 4. При $t \in (d_{k+1}, e_{k+1}]$ положим $q(t) > 0$ и такой, чтобы выполнялись соотношения $\int_0^t q(\tau)\,\mathrm{d}\tau < 0$ при $t \in (d_{k+1}, e_{k+1})$ и $\int_0^{e_{k+1}} q(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 0$. Так как $\dot{x}(t) > 0$ и $\ddot{x}(t) \geqslant 0$ при $t \in (d_{k+1}, e_{k+1}]$, то $\delta(t) > 0$ при $t \in (d_{k+1}, e_{k+1}]$.

Кроме того, очевидно, что $q(\cdot)$, определяемую в шагах 1–4, можно выбрать еще и такой, чтобы

$$1 - \int_{e_k}^{e_{k+1}} \int_0^{\tau} q(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau \leqslant \int_{e_{k-1}}^{e_k} \int_0^{\tau} q(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau. \tag{7}$$

Используя метод математической индукции, определим функцию $q(\cdot)$ на всей положительной полуоси $\mathbb{R}_+$. Вследствие (7) выполняется равенство $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t) = +\infty$.

Таким образом, при $z(\cdot) = z_i(\cdot)$ построена система функций $\{1, x_i(\cdot), y_i(\cdot)\}$, $i = 1, 2$. Согласно доказанному, каждая из систем функций $\{1, x_i(\cdot), y_i(\cdot)\}$, при $i = 1, 2$, является фундаментальной системой решений некоторого уравнения (1) третьего порядка. Покажем, что данные уравнения искомые. Пусть $s_i(\cdot)$ – произвольное ненулевое решение i-го уравнения, при $i = 1, 2$. Тогда $s_i(\cdot) = c_{1,i} + c_{2,i}\, x_i(\cdot) + c_{3,i}\, y_i(\cdot)$, для некоторых постоянных $c_{1,i}$, $c_{2,i}$ и $c_{3,i}$. Если $c_{3,i} \neq 0$, то $\hat{\nu}(s_i(\cdot)) = 0$, в противном случае $\hat{\nu}(s_i(\cdot)) \in \{\hat{\nu}(x_i(\cdot) - c) : c \in \mathbb{R}\}$, при этом, как доказано выше, каждый элемент множества $\{\hat{\nu}(x_i(\cdot) - c) : c \in \mathbb{R}\}$ достигается. Теорема доказана.

Автор выражает благодарность Е. А. Барабанову за постановку задачи и внимание, проявленное к работе.

Список использованной литературы

1. *Сергеев, И. Н.* Определение и свойства характеристических частот линейного уравнения / И. Н. Сергеев // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. – М., 2006. – Вып. 25. – С. 249–294.
2. *Сергеев, И. Н.* Определение характеристических частот линейного уравнения / И. Н. Сергеев // Дифференц. уравнения. – 2004. – Т. 40, № 11. – С. 1573.
3. *Сергеев, И. Н.* Свойства характеристических частот линейных уравнений произвольного порядка / И. Н. Сергеев // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. – М., 2013. – Вып. 29. – С. 414–442.
4. *Смоленцев, М. В.* Пример периодического дифференциального уравнения третьего порядка, спектр частот которого содержит отрезок / М. В. Смоленцев // Дифференц. уравнения. – 2014. – Т. 50, № 10. – С. 1413–1417.
5. *Горицкий, А. Ю.* Характеристические частоты нулей суммы двух гармонических колебаний / А. Ю. Горицкий, Т. Н. Фисенко // Дифференц. уравнения. – 2012. – Т. 48, № 4. – С. 479–485.
6. *Богданов, Ю. С.* Дифференциальные уравнения / Ю. С. Богданов. – Минск: Выш. шк., 1983.

Поступила в редакцию 21.05.2015