УДК 517.948.32:517.544

Э. И. ЗВЕРОВИЧ

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ КОНФОРМНОГО ГОМЕОМОРФИЗМА КОНЕЧНОЛИСТНОЙ РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ НА ПЛОСКОСТЬ

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь, e-mail: zverovich@bsu.by

Рассматривается конечнолистная рода нуль поверхность наложения сферы. Дается алгоритм построения конформного гомеоморфизма этой поверхности на сферу по заданным точкам разветвления и подстановкам, описывающим закон склеивания листов.

Ключевые слова: конформный гомеоморфизм, накрывающая поверхность, замкнутая риманова поверхность, род поверхности, индекс разветвления, фундаментальный базис, алгебраическая кривая, особая точка, дискриминант.

E. I. ZVEROVICH

CONSTRUCTION ALGORITHM OF CONFORMAL HOMEOMORPHISM OF THE FINITE-SHEETED RIEMAN SURFACE ONTO THE PLANE

Belarusian State University, Minsk, Belarus, e-mail: zverovich@bsu.by

We consider a finite-sheeted covering surface of the sphere of genus zero. We built the algorithm of construction of the conformal homeomorphism of this surface on the sphere by a given branch point and permutations describing the sheets gluing order.

Keywords: conformal homeomorphism, covering surface, closed Riemannian surface, genus of surface, branch index, fundamental basis, algebraic curve, singular point, discriminant.

Для краткости будем называть *сферой* расширенную комплексную плоскость $\hat{\mathbf{C}} := \mathbf{C} \cup \infty$, которая, как известно, гомеоморфна сфере. Обозначим через R конечнолистную поверхность наложения (накрытие) сферы $\hat{\mathbf{C}}_z$. Это накрытие является замкнутой римановой поверхностью конечного рода ρ. Точками поверхности R можно считать пары $(z, w) \in \hat{\mathbf{C}} \times \hat{\mathbf{C}}$, связанные неприводимым алгебраическим уравнением $f(z, w) = 0$. Поверхность R гомеоморфна сфере только тогда, когда $\rho = 0$ (а по теореме Римана она и конформно эквивалентна сфере). Кроме числа листов накрытия, считаем известными координаты проекций на сферу $\hat{\mathbf{C}}_z$ всех точек ветвления и подстановки, описывающие законы перехода с листа на лист при обходе каждой точки ветвления. По этим данным требуется найти аналитическое выражение для конформного гомеоморфизма $R \to \hat{\mathbf{C}}_w$, что сводится к нахождению уравнения $f(z, w) = 0$.

Напомним, что конформность в точках ветвления понимается как конформность в обычном смысле после перехода к соответствующим локальным координатам. Конкретизируя постановку, обозначим через n число листов данного накрытия, а через ω_z – его индекс разветвления. Род накрывающей поверхности R вычисляется по известной формуле Римана – Гурвица $\rho = \frac{\omega_z}{2} - n + 1$. Так как мы рассматриваем только накрытия рода $\rho = 0$, то должно быть $\omega_z = 2(n-1)$. Над каждой точкой $z \in \hat{\mathbf{C}}_z$ (кроме проекций точек ветвления) лежат n точек поверхности R, а искомое отображение $R \leftrightarrow \hat{\mathbf{C}}_w$ – биективное. Поэтому каждому $z \in \hat{\mathbf{C}}_z$ соответствуют n различных или частично совпадающих значений $w \in \hat{\mathbf{C}}_w$. Отсюда следует, что полученное таким образом отображение

$w \leftrightarrow (z,w) \to z$ является рациональной функцией степени n от w. Представив его в виде несократимой дроби

$$z = -\frac{P(w)}{Q(w)}, \tag{1}$$

заключаем, что $P(w)$ и $Q(w)$ – полиномы степеней не выше n, причем степень хотя бы одного из них точно равна n. Таким образом, искомая отображающая функция удовлетворяет неприводимому алгебраическому уравнению

$$P(w) + zQ(w) = 0\,. \tag{2}$$

Зададим проекции всех точек ветвления в виде

$$z_1 = 0, \quad z_2\,, \ldots, z_{n-1}\,, z_n = \infty.$$

При каждом $k = 1,\ldots,n-1$ в качестве подстановки, описывающей закон перехода точки (z,w) с листа на лист при обходе точки z_k, возьмем транспозицию $(k, k+1)$. Это означает, что после однократного обхода точкой z вокруг точки z_k соответствующая точка (z,w) переходит с k-го листа на $(k+1)$-й (или обратно), а точки (z,w), лежащие на других листах, остаются на тех же листах. Такое задание гарантирует связность поверхности R, а вклад в индекс разветвления от каждой точки z_k при $k = 1,\ldots,n-1$ равен 1. Значит, вклад и индекс разветвления от всех точек z_k при $k = 1,\ldots,n-1$ равен $n-1$. Таким образом, над точкой $z = \infty$ имеем полный цикл, т. е. единственную точку римановой поверхности R.

Следующей задачей является составление уравнений, которым должны удовлетворять коэффициенты многочленов $P(w)$ и $Q(w)$. С этой целью сначала потребуем, чтобы искомая отображающая функция удовлетворяла следующим условиям: $(0,0) \mapsto 0,\quad (\infty,\infty) \mapsto \infty$, причем считаем, что точка ветвления (0,0) лежит на первом и втором листах. Эти условия гарантируют единственность (с точностью до постоянного множителя) отображающей функции. Так как искомое отображение $(z,w) \leftrightarrow w$ – биективное, а $(\infty,\infty) \leftrightarrow \infty$, то z должно быть конечным при конечных значениях w. Поэтому в (1) должно быть $Q(w) \equiv \text{const} \neq 0$. Полагая $Q(w) \equiv 1$, приведем уравнение (2) к виду

$$f(z,w) \equiv P(w) + z = 0. \tag{3}$$

Остается только указать способ вычисления коэффициентов полинома

$$P(w) \equiv w^n + a_1 w^{n-1} + \ldots + a_{n-2} w^2.$$

С этой целью обратимся к кольцу целых элементов поля алгебраических функций [1], порожденного уравнением (3). Базис этого кольца называется *фундаментальным базисом.* По исходным данным легко вычисляется его *дискриминант* $z(z - z_2)\ldots(z - z_{n-1})$.

Как известно [1], с точностью до постоянного множителя он не зависит от выбора фундаментального базиса поля, а зависит только от *примитивной пары*(z,w), порождающей это поле. В теории алгебраических функций [1] устанавливается связь между фундаментальным базисом и характером особых точек алгебраической кривой $f(z,w) = 0$: *степенной базис* $[1, w, \ldots, w^{n-1}]$ *является фундаментальным, если и только если кривая не имеет конечных особых точек.* Особыми точками алгебраической кривой называются решения следующей системы уравнений:

$$f(z,w) = \frac{\partial f(z,w)}{\partial w} = \frac{\partial f(z,w)}{\partial z} = 0.$$

Так как для кривой (3) $\dfrac{\partial f}{\partial z} \equiv 1$, то для нее эта система несовместна, и потому степенной базис является фундаментальным. Значит, дискриминант фундаментального базиса можно вычислить как *результант* полинома (3) и его производной $P'(w) = nw^{n-1} + (n-1)a_1 w^{n-2} + \ldots + 2a_{n-2}w$. Таким образом, при некотором $\lambda \neq 0$ должно выполняться следующее тождество:

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & \ldots & a_{n-2} & 0 & z & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & a_{n-3} & a_{n-2} & 0 & z & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \ldots & z & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & 0 & z \\ n & (n-1)a_1 & \ldots & 2a_{n-2} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & n & \ldots & 3a_{n-3} & 2a_{n-2} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & n & (n-1)a_1 & (n-2)a_2 & (n-3)a_3 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & n & (n-1)a_1 & (n-2)a_2 & \ldots & 0 & 0 \end{vmatrix} \equiv \lambda \cdot z(z-z_2)\ldots(z-z_{n-1}).$$

Приравнивая здесь коэффициенты при z^{n-1}, получим $\lambda = n^n$. Сократив затем равенство дискриминантов на z и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях переменного z, получим систему из $(n-2)$ нелинейных алгебраических уравнений для нахождения чисел $a_1,\ldots,a_{n-2}$. Система имеет конечное множество решений, среди которых есть искомое. Посторонние решения могут здесь появляться потому, что система не изменяется при всевозможных перестановках проекций точек ветвления $z_2,\ldots,z_{n-1}$. К тому же нумерация листов римановой поверхности в системе не учитывается, однако на проблеме отделения нужного нам решения от посторонних здесь не останавливаемся.

Построим в качестве примера конформный гомеоморфизм на сферу $\hat{\mathbf{C}}_w$ трехлистного накрытия R сферы $\hat{\mathbf{C}}_z$, проекции точек ветвления которого находятся в точках 0, 1 и ∞. Пусть при обходе точки $z = 0$ листы переходят друг в друга по закону $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, а при обходе точки z = 1 – по закону $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Отображающую функцию подчиним условиям: $(0,0) \mapsto 0$, $(\infty,\infty) \mapsto \infty$. Поверхность R связна, рода нуль, так что искомое отображение существует. Дискриминант фундаментального базиса равен $\lambda z(z-1)$. Уравнение (3) в данном случае имеет вид

$$w^3 + aw^2 + z = 0,$$

где a – неизвестный коэффициент. Для его вычисления приравняем различные выражения для фундаментального базиса

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 0 & z & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 & z \\ 3 & 2a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2a & 0 \end{vmatrix} \equiv \lambda z(z-1). \tag{4}$$

Приравнивая здесь коэффициенты при z^2, находим $\lambda = 27$. Подставив это в (4) и сократив на z, получим уравнение $a^3 = \frac{27}{4}$, дающее для a три значения $a = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}$ и $a_{2,3} = \frac{3}{\sqrt[3]{4}}\exp(\pm 2\pi i/3)$. Соответственно получаем три уравнения

$$w^3 + \frac{3}{\sqrt[3]{4}}w^2 + z = 0, \quad w^3 + \frac{3}{\sqrt[3]{4}}\exp(\pm 2\pi i/3)w^2 + z = 0. \tag{5}$$

Если в последних двух уравнениях сделать замену $w = w_1 \exp(\pm 2\pi i / 3)$, то получим $w_1^3 + \frac{3}{\sqrt[3]{4}} w_1^2 + z = 0$. Итак, решения уравнений (5) отличаются друг от друга лишь постоянными множителями. Значит, с точностью до постоянного множителя решение – единственное и дается в виде уравнения $w^3 + \frac{3}{\sqrt[3]{4}} w^2 + z = 0$. Распорядившись произволом в выборе постоянного множителя, преобразуем полученное уравнение к виду, не содержащему иррациональности. С этой целью сделаем замену $w = \sqrt[3]{2}\zeta$, и тогда полученное уравнение преобразуется к виду $2\zeta^3 + 3\zeta^2 + z = 0$.

Список использованной литературы

1. *Чеботарев Н. Г.* Теория алгебраических функций. М., 2001.

Поступила в редакцию 13.03.2015