

УДК 517.926.4

Е. А. БАРАБАНОВ¹, А. В. КОНЮХ²

**ТОЧНЫЕ КРАЙНИЕ ГРАНИЦЫ ПОКАЗАТЕЛЕЙ БОЛЯ
РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ
С МАЛЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ**

¹Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь,
e-mail: bar@im.bas-net.by

²Белорусский государственный экономический университет, Минск, Беларусь,
e-mail: al3128@gmail.com

Получены формулы вычисления по матрице Коши линейной дифференциальной системы точной верхней границы подвижности вверх нижних показателей Боля и точной нижней границы подвижности вниз верхних показателей Боля ее решений при малых возмущениях коэффициентов системы. Доказано, что при малых возмущениях коэффициентов системы первая из указанных границ устойчива вверх, но неустойчива вниз, а вторая – устойчива вниз, но неустойчива вверх.

Ключевые слова: линейная дифференциальная система, верхний и нижний показатели Боля, верхний и нижний генеральные показатели.

Е. А. BARABANOV¹, А. В. KONYUKH²

**EXACT EXTREME BOUNDS OF THE BOHL EXPONENTS OF SOLUTIONS
TO THE LINEAR DIFFERENTIAL SYSTEM WITH SMALL PERTURBATIONS**

¹Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus,
e-mail: bar@im.bas-net.by

²Belarus State Economic University, Minsk, Belarus,
e-mail: al3128@gmail.com

Using the Cauchy matrix, the formulas for calculation of the linear differential system of the exact upper bound of the upward mobility of the lower Bohl exponents and of the exact lower bound of the downward mobility of the upper Bohl exponents of its solutions under small perturbations of the coefficients of the system are obtained. It is proved that under small perturbations of the coefficients, the first of the mentioned bounds is upward stable, but is downward unstable, and the second one is downward stable, but is upward unstable.

Keywords: linear differential system, lower and upper Bohl exponents, lower and upper general exponents.

Введение. Обозначим через M_n класс линейных дифференциальных систем

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

размерности $n \geq 2$ с равномерно ограниченными ($\sup\{\|A(t)\|: t \geq 0\} < +\infty$) и кусочно-непрерывными на временной полуоси $t \geq 0$ матрицами коэффициентов. Будем отождествлять систему (1) и ее матрицу коэффициентов и вследствие этого писать $A \in M_n$. Считаем, что на множестве M_n задана метрика $\text{dist}_u(\cdot, \cdot)$ равномерной сходимости на полуоси коэффициентов, т. е. $\text{dist}_u(A, B) = \sup\{\|A(t) - B(t)\|: t \geq 0\}$. Для системы (1) через $\mathcal{X}(A)$ обозначим совокупность всех ненулевых ее решений, а через $X_A(\cdot, \cdot)$ – ее матрицу (оператор) Коши.

Нижним $\underline{\beta}[x]$ и верхним $\overline{\beta}[x]$ показателями Боля ненулевого решения $x(\cdot)$ системы (1) называются величины

$$\underline{\beta}[x] = \lim_{t-\tau \rightarrow +\infty} \frac{1}{t-\tau} \ln \frac{\|x(t)\|}{\|x(\tau)\|} \text{ и } \overline{\beta}[x] = \overline{\lim}_{t-\tau \rightarrow +\infty} \frac{1}{t-\tau} \ln \frac{\|x(t)\|}{\|x(\tau)\|}. \quad (2)$$

Асимптотические характеристики (2) естественно возникают при рассмотрении различных вопросов теории показателей Ляпунова, хотя их применение в этой теории и носит вспомогательный характер. Вследствие эпизодического использования показателей Боля у разных авторов они носили различные названия: нижний (верхний) равномерные показатели [1], нижний (верхний) минимальный (максимальный) показатели [2], нижний (верхний) генеральные показатели [3, с. 171–172]. Называть величины (2) показателями Боля предложено в работе [4], что исторически справедливо, хотя сам П. Г. Болль рассматривал несколько другие, но схожие с (2) асимптотические характеристики (см. определяемый в (3) показатель $\Omega^0(A)$). К настоящему времени такое название для числовых характеристик (2) стало общепринятым.

Показатели Боля как функции начального (при $t = 0$) вектора решений для систем из M_n полностью описаны в работе [5] (см. также [6]). Чтобы сформулировать это описание, определим для системы (1) так называемые [5] ее нижнюю $\underline{\beta}_A(\cdot)$ и верхнюю $\overline{\beta}_A(\cdot)$ функции Боля, действующие из $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ в $\mathbb{R}$, поставив в соответствие каждому вектору $\alpha \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ соответственно нижний и верхний показатели Боля решения $x(\cdot)$ системы (1) с начальным вектором $x(0) = \alpha$. Для того чтобы функция $f(\cdot): \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ являлась младшей (старшей) функцией Боля некоторой системы из M_n , необходимо и достаточно [5], чтобы она удовлетворяла следующим трем условиям: 1) функция f ограничена; 2) для всех ненулевых вещественных r и любого вектора $\alpha \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ справедливо равенство $f(\alpha) = f(r\alpha)$; 3) для каждого $q \in \mathbb{R}$ прообраз $f^{-1}([q, +\infty))$ полуинтервала $[q, +\infty)$ при отображении f является F_σ -множеством (G_δ -множеством).

К определению показателей Боля решений системы (1) близко определение ее генеральных или, как их еще называют, особых показателей. Верхним $\Omega^0(A)$ и нижним $\omega_0(A)$ генеральными (особыми) показателями системы (1) называются [3, с. 172, 175; 7, с. 109–110] величины

$$\Omega^0(A) = \overline{\lim}_{t-\tau \rightarrow +\infty} \frac{1}{t-\tau} \ln \|X_A(t, \tau)\| \text{ и } \omega_0(A) = \underline{\lim}_{t-\tau \rightarrow +\infty} \frac{1}{t-\tau} \ln \|X_A^{-1}(t, \tau)\|^{-1}. \quad (3)$$

Иногда, как, например, в [3, с. 172, 175] или [8, с. 87, 89], при вычислении пределов в соотношениях (3) и/или (2) к условию $t - \tau \rightarrow +\infty$ добавляют еще дополнительное условие $\tau \rightarrow +\infty$. Доказательство того, что это дополнительное условие не изменяет (по меньшей мере для систем из M_n) величин (2) и (3), приведено в доказательстве теоремы 1 работы [5].

Показатели (3) (точнее, первый из них) введены П. Г. Болем [9; 10, с. 461] и независимо и из других соображений К. П. Персидским [11; 12, с. 94] (см. также [3, с. 172; 7, с. 109–111]). Позже, обобщая результаты А. М. Ляпунова по устойчивости движения на системы в банаховом пространстве, к понятию генеральных показателей пришел М. Г. Крейн [3, с. 213; 13; 14]. Основные свойства показателей (3), делающие их одними из главных асимптотических характеристик линейных дифференциальных систем, следующие. Для (нелинейной) системы отрицательность верхнего генерального показателя ее системы первого приближения, если последняя принадлежит классу M_n , является [9] необходимым и достаточным условием устойчивости при постоянно действующих возмущениях, а также [11] необходимым и достаточным условием равномерной устойчивости по первому приближению. Отрицательность верхнего генерального показателя линейной системы – достаточное условие [11] ее равномерной устойчивости и необходимое и достаточное условие равномерной устойчивости всех систем из некоторой ее окрестности (в метрике $\text{dist}_u(\cdot, \cdot)$). Кроме того, точная верхняя грань показателей Ляпунова всех обобщенных решений системы (1) с равномерно непрерывной на полуоси матрицей коэффициентов совпадает с верхним генеральным

показателем этой системы [15]. Ряд результатов о показателях (2) и (3) линейных дифференциальных систем на линейные разностные системы перенесен А. Чорником и М. Незабитовским (см., напр., [16, 17], а также имеющуюся в них библиографию, в которой содержится достаточно полный перечень работ по применению генеральных показателей и показателей Боля к исследованию свойств разностных систем).

Чтобы описать связь между генеральными показателями (3) системы (1) и множеством значений, принимаемых показателями Боля (2) ее решений, удобно ввести две величины – точные нижнюю и верхнюю границы показателей $\underline{\beta}[x]$ и $\bar{\beta}[x]$, $x \in \mathcal{X}(A)$, соответственно:

$$i\underline{\beta}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{x \in \mathcal{X}(A)} \underline{\beta}[x] \text{ и } s\bar{\beta}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \in \mathcal{X}(A)} \bar{\beta}[x], \quad (4)$$

которые назовем соответственно младшим нижним и старшим верхним показателями Боля системы (1) (вообще говоря, вследствие приведенного выше результата работы [5] эти показатели могут не реализовываться ни на одном решении системы (1): такой системой является система (1), множество значений нижней (верхней) функции Боля которой не содержит своей точной нижней (верхней) грани). Очевидны неравенства

$$\omega_0(A) \leq i\underline{\beta}(A) \text{ и } s\bar{\beta}(A) \leq \Omega^0(A). \quad (5)$$

Никаких других, кроме (5), соотношений между величинами (3) и (4) на классе $\mathcal{M}_n$ не существует [5]: каковы бы ни были два вещественных числа $\underline{b}$ и $\underline{B}$ (числа $\bar{b}$ и $\bar{B}$), связанных неравенством $\underline{b} \geq \underline{B}$ ($\bar{b} \leq \bar{B}$), в классе $\mathcal{M}_n$ существует система (1), для которой $i\underline{\beta}(A) = \underline{b}$ и $\omega_0(A) = \underline{B}$ (соответственно $s\bar{\beta}(A) = \bar{b}$ и $\Omega^0(A) = \bar{B}$). В работе [5] получен даже несколько более общий результат, дающий полное описание каждой из пар $(\underline{\beta}_A(\cdot), \omega_0(A))$ и $(\bar{\beta}_A(\cdot), \Omega^0(A))$, $A \in \mathcal{M}_n$, следствием которого является приведенное выше утверждение.

Вместе с тем Р. Э. Виноградом в работе [4] получена следующая важная характеристика генеральных показателей (3) системы (1), устанавливающая их связь с показателями Боля (2) возмущенных систем: верхний (нижний) генеральный показатель $\Omega^0(A)$ ($\omega_0(A)$) системы (1) есть точная верхняя (нижняя) грань верхних (нижних) показателей Боля ненулевых решений системы (1) при сколь угодно малых возмущениях ее матрицы коэффициентов. Другими словами, рассмотрим наряду с системой (1) возмущенные системы

$$\dot{x} = (A(t) + Q(t))x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \quad (6)$$

с кусочно-непрерывной и равномерно ограниченной на полуоси матрицей-возмущением $Q(\cdot)$ (обозначим $\|Q\| = \sup\{\|Q(t)\| : t \geq 0\}$). Тогда имеют место равенства [4]:

$$\omega_0(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \inf_{\|Q\| \leq \varepsilon} i\underline{\beta}(A + Q) \text{ и } \Omega^0(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \sup_{\|Q\| \leq \varepsilon} s\bar{\beta}(A + Q). \quad (7)$$

Постановка задачи. Прежде чем ввести некоторые аналогичные рассмотренным выше асимптотические характеристики системы (1), с которыми связана решаемая в данной статье задача, укажем геометрический смысл показателей (3). Хорошо известно, что для произвольной невырожденной $n \times n$ -матрицы X справедливы соотношения (см., напр., [18, с. 22])

$$\max_{\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|X\xi\|}{\|\xi\|} = \|X\| \text{ и } \min_{\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|X\xi\|}{\|\xi\|} = \|X^{-1}\|^{-1}$$

(норма вектора евклидова, норма матрицы спектральная; первое из этих равенств – определение спектральной нормы, второе равенство – простое следствие первого). Другими словами, $\|X\|$ и $\|X^{-1}\|^{-1}$ – это, соответственно, большая и малая полуоси $(n-1)$ -мерного эллипсоида $\{\xi \in \mathbb{R}^n : \|X^{-1}\xi\| = 1\}$, порожденного линейным отображением X . Поэтому с геометрической точки

зрения верхний $\Omega^0(A)$ и нижний $\omega_0(A)$ генеральные показатели системы (1) – это асимптотически точные при $t - \tau \rightarrow +\infty$ крайние границы изменения в логарифмической шкале полуосей семейства эллипсоидов, порождаемых семейством линейных отображений $X_A(t, \tau)$ (показатель $\Omega^0(A)$ – точная верхняя граница больших полуосей, а показатель $\omega_0(A)$ – точная нижняя граница малых полуосей этого семейства эллипсоидов при $t - \tau \rightarrow +\infty$). С этой точки зрения представляется естественным наряду с величинами (3) рассмотреть [19] также и величины

$$\Omega_0(A) = \lim_{t-\tau \rightarrow +\infty} \frac{1}{t-\tau} \ln \|X_A(t, \tau)\| \text{ и } \omega^0(A) = \overline{\lim}_{t-\tau \rightarrow +\infty} \frac{1}{t-\tau} \ln \|X_A^{-1}(t, \tau)\|^{-1}, \quad (8)$$

дающие асимптотически точные при $t - \tau \rightarrow +\infty$, соответственно, нижнюю границу изменения больших полуосей и верхнюю границу изменения малых полуосей в логарифмической шкале семейства эллипсоидов, порождаемых семейством линейных отображений $X_A(t, \tau)$, $t \geq \tau \geq 0$. Величины (3) и (8) дополняют друг друга и дают асимптотически точные двусторонние оценки изменения норм $\|X_A(t, \tau)\|$ и $\|X_A^{-1}(t, \tau)\|$ при $t - \tau \rightarrow +\infty$. Показатели $\Omega_0(A)$ и $\omega^0(A)$ называются [19] соответственно старшим нижним и младшим верхним генеральными (особыми) показателями; по этой же терминологии показатели $\Omega^0(A)$ и $\omega_0(A)$ – это старший верхний и младший нижний генеральные (особые) показатели. Принятый способ обозначения величин (3) и (8) (как и определяемых ниже величин (11) и (28)) состоит в следующем (мнемоническое правило): прописная Ω и строчная ω буквы указывают, что величина относится соответственно к $\|X_A(t, \tau)\|$ и к $\|X_A^{-1}(t, \tau)\|^{-1}$, $t \geq \tau$, а индекс «0» сверху или внизу – что при этом берутся равномерные верхний или нижний пределы соответственно.

По аналогии с равенствами (4) рассмотрим также точные верхнюю и нижнюю границы показателей $\underline{\beta}[x]$ и $\bar{\beta}[x]$, $x \in \mathcal{X}(A)$:

$$s\underline{\beta}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \in \mathcal{X}(A)} \underline{\beta}[x] \text{ и } i\bar{\beta}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{x \in \mathcal{X}(A)} \bar{\beta}[x], \quad (9)$$

которые назовем соответственно старшим нижним и младшим верхним показателями Боля системы (1) (по той же причине, что и для показателей (4), эти показатели, вообще говоря, могут не реализовываться ни на одном решении системы (1)).

Показатели (8) введены в обзорной статье авторов [19], мотивировка рассмотрения этих величин описана выше. В этой же статье [19] авторы, основываясь только на формулах (7) и указанной выше аналогии величин (3) и (8), привели без доказательства, вследствие обзорного характера указанной работы, следующие аналогичные (7) формулы, связывающие показатели (8) системы (1) и показатели (2) возмущенных систем (6):

$$\omega^0(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \inf_{\|Q\| \leq \varepsilon} i\bar{\beta}(A+Q) \text{ и } \Omega_0(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \sup_{\|Q\| \leq \varepsilon} s\underline{\beta}(A+Q), \quad (10)$$

посчитав, что доказательство этих равенств полностью аналогично доказательству равенств (7) из работы [4], и даже приписав такое доказательство работе [4]. Эти же формулы повторены затем во введении к статье [20] и использовались в доказательстве ее теоремы 1. Оказывается, как будет показано ниже в теореме 2 данной работы, равенства (10) в общем случае места не имеют. Поэтому вопрос о справедливости утверждения теоремы 1 из [20] для старшего нижнего и младшего верхнего показателей Боля остается открытым.

Точное представление через матрицу Коши системы (1) правых частей равенств (10) дается теоремой 1 настоящей работы. В теореме 5 изучается поведение показателей $\omega^0(A)$ и $\Omega_0(A)$, а в теоремах 3 и 4 – поведение введенных ниже показателей $\omega_*^0(A)$ и $\Omega_*^0(A)$ под действием малых возмущений матрицы A коэффициентов системы.

Основные результаты. Введем величины:

$$\begin{aligned}\Omega_0^*(A) &= \lim_{T \rightarrow +\infty}^{\text{def}} \lim_{k-m \rightarrow +\infty} \frac{1}{(k-m)T} \sum_{i=m+1}^k \ln \|X_A(iT, (i-1)T)\|, \\ \omega_0^*(A) &= \lim_{T \rightarrow +\infty}^{\text{def}} \lim_{k-m \rightarrow +\infty} \frac{1}{(k-m)T} \sum_{i=m+1}^k \ln \|X_A^{-1}(iT, (i-1)T)\|^{-1},\end{aligned}\quad (11)$$

где $k, m \in \mathbb{N}$. Корректность определения величин (11) (т. е. то, что внешний предел в правых частях равенств (11) существует) будет установлена в ходе доказательства теоремы 1. Прямое, не зависящее от доказательства теоремы 1, доказательство корректности можно получить аналогично тому, как это сделано в [21, с. 49–50] для центральных показателей.

Введенные величины и являются искомыми точными границами подвижности нижних (верхних) показателей Боля решений системы (1) вверх (вниз) при малых возмущениях ее матрицы коэффициентов, как это показывает

Т е о р е м а 1. *Имеют место равенства*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \sup_{\|Q\| \leq \varepsilon} s\beta(A+Q) = \Omega_0^*(A) \text{ и } \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \inf_{\|Q\| \leq \varepsilon} i\bar{\beta}(A+Q) = \omega_0^*(A). \quad (12)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как мы не предполагаем доказанным существование внешнего предела в правых частях равенств (11), обозначим через $\bar{\Omega}_0^*(A)$ и $\underline{\Omega}_0^*(A)$ величины, получающиеся заменой в первом из равенств (11) $\lim_{T \rightarrow +\infty}$ на $\overline{\lim}_{T \rightarrow +\infty}$ и $\lim_{T \rightarrow +\infty}$ соответственно, а через $\bar{\omega}_0^*(A)$ и $\underline{\omega}_0^*(A)$ – величины, получающиеся такой же заменой во втором из равенств (11).

1. В этой части доказательства установим справедливость неравенств

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \sup_{\|Q\| \leq \varepsilon} s\beta(A+Q) \leq \underline{\Omega}_0^*(A) \text{ и } \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \inf_{\|Q\| \leq \varepsilon} i\bar{\beta}(A+Q) \geq \bar{\omega}_0^*(A). \quad (13)$$

1.1. Для доказательства первого из неравенств (13) обозначим через $R(t)$, $t \geq 0$, какую-либо верхнюю функцию [4; 7, с. 103, 115; 22] системы (1), т. е. ограниченную измеримую функцию $R(t)$, $t \geq 0$, такую, что для всех $t \geq s \geq 0$ выполняется оценка

$$\|X_A(t, s)\| \leq C_R \exp \int_s^t R(\alpha) d\alpha, \quad (14)$$

где C_R – некоторая постоянная (зависящая, вообще говоря, от выбора функции $R(\cdot)$). Запишем решение возмущенной системы (6) по формуле Коши вариации постоянных:

$$y(t) = X_A(t, \tau)y(\tau) + \int_{\tau}^t X_A(t, s)Q(s)y(s)ds, \quad \tau \leq t.$$

Перейдя в этом представлении к нормам и учитывая неравенства $\|Q\| \leq \varepsilon$ и (14), получим

$$\|y(t)\| \leq C_R \|y(\tau)\| \exp \int_{\tau}^t R(\alpha) d\alpha + C_R \int_{\tau}^t \exp \left\{ \int_s^t R(\alpha) d\alpha \right\} \varepsilon \|y(s)\| ds,$$

или, обозначив $u(t) = \|y(t)\| \exp \left\{ -\int_0^t R(\alpha) d\alpha \right\}$, – что $u(t) \leq C_R u(\tau) + \int_{\tau}^t C_R \varepsilon u(s) ds$. Из последнего неравенства по лемме Гронуолла – Беллмана [7, с. 517] $u(t) \leq C_R u(\tau) \exp \{C_R \varepsilon (t - \tau)\}$, или, возвращаясь к исходным обозначениям,

$$\frac{\|y(t)\|}{\|y(\tau)\|} \leq C_R \exp \left\{ \int_{\tau}^t R(s) ds + C_R \varepsilon (t - \tau) \right\} \quad (15)$$

для всех $t \geq \tau \geq 0$. Перейдя в неравенстве (15) к нижнему пределу при $t - \tau \rightarrow +\infty$, получаем для любого решения $y(\cdot) \in \mathcal{X}(A + Q)$ возмущенной системы (6) с $\|Q\| \leq \varepsilon$ оценку сверху его нижнего показателя Боля:

$$\underline{\beta}[y] \leq C_R \varepsilon + \lim_{t-\tau \rightarrow +\infty} \frac{1}{t-\tau} \int_{\tau}^t R(s) ds. \quad (16)$$

Верхней функцией системы (1) является, например, [4; 7, с. 116; 22] функция

$$R_T(t) = T^{-1} \sum_{i=0}^{[t/T]} \ln \|X_A(iT, (i-1)T)\|, \quad (17)$$

где $T > 0$ – фиксировано и может быть выбрано любым, а $[\cdot]$ – целая часть числа (постоянная $C_{R_T} \equiv e^{2aT}$). Тогда, взяв в неравенстве (16) функцию $R(t) \equiv R_T(t)$ и, считая, что t и τ пробегает последовательности $(kT)_{k \in \mathbb{N}}$ и $(mT)_{m \in \mathbb{N}}$ соответственно, получаем

$$\underline{\beta}[y] \leq e^{2aT} \varepsilon + \lim_{k-m \rightarrow +\infty} \frac{1}{(k-m)T} \sum_{i=m+1}^k \ln \|X_A(iT, (i-1)T)\|$$

для любого решения $y(\cdot) \in \mathcal{X}(A + Q)$, если $\|Q\| \leq \varepsilon$. Поэтому

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \inf_{\|Q\| \leq \varepsilon} \underline{\beta}(A + Q) \leq \lim_{k-m \rightarrow +\infty} \frac{1}{(k-m)T} \sum_{i=m+1}^k \ln \|X_A(iT, (i-1)T)\|$$

для любого фиксированного $T > 0$. Теперь, перейдя в правой части полученного неравенства к нижнему пределу при $T \rightarrow +\infty$, приходим к первому из неравенств (13).

1.2. Второе неравенство в (13) в ситуациях, схожих с рассматриваемой, (например, для нижних центральных показателей) обычно доказывается на основании соответствующего аналога первого неравенства в (13) переходом к системе, сопряженной системе (1). Мы докажем это неравенство непосредственно, независимо от первого неравенства (13). Эти же рассуждения можно использовать также для прямых оценок снизу других асимптотических характеристик (например, нижнего или младшего центральных показателей), без обращения к сопряженной системе.

Пусть $r(t)$, $t \geq 0$, – какая-либо нижняя функция [4; 7, с. 103, 115; 22] системы (1), т. е. ограниченная измеримая на полуоси функция $r(t)$, $t \geq 0$, такая, что для всех $t \geq s \geq 0$ выполняется оценка

$$\|X_A^{-1}(t, s)\| \leq c_r \exp \int_t^s r(\alpha) d\alpha, \quad (18)$$

где c_r – некоторая постоянная (зависящая, вообще говоря, от выбора функции $r(\cdot)$). Запишем решение $y(t)$, $t \geq 0$, возмущенной системы (6) по формуле Коши вариации постоянных:

$$y(\tau) = X_A(\tau, t) y(t) + \int_t^{\tau} X_A(\tau, s) Q(s) y(s) ds, \quad \tau \leq t,$$

и, перейдя в этом представлении к нормам, приходим к неравенству

$$\|y(\tau)\| \leq \|X_A(\tau, t)\| \|y(t)\| + \int_{\tau}^t \|X_A(\tau, s)\| \|Q(s)\| \|y(s)\| ds, \quad \tau \leq t.$$

Теперь, учитывая неравенства $\|Q\| \leq \varepsilon$ и (18), получим

$$\|y(\tau)\| \leq c_r \|y(t)\| \exp \int_t^{\tau} r(\alpha) d\alpha + c_r \int_{\tau}^t \exp \left\{ \int_s^{\tau} r(\alpha) d\alpha \right\} \varepsilon \|y(s)\| ds,$$

или, обозначив $u(t) = \|y(t)\| \exp \left\{ \int_t^0 r(\alpha) d\alpha \right\}$, что $u(\tau) \leq c_r u(t) + \int_\tau^t c_r \varepsilon u(s) ds$. Считая в этом неравенстве t фиксированным, а $\tau \in [0, t]$ переменной и рассуждая так же, как и в доказательстве леммы Гронуолла – Беллмана, получим неравенство $u(\tau) \leq c_r u(t) \exp \{c_r \varepsilon (t - \tau)\}$, или, возвращаясь к исходным обозначениям,

$$\frac{\|y(t)\|}{\|y(\tau)\|} \geq c_r^{-1} \exp \left\{ \int_\tau^t r(s) ds - c_r \varepsilon (t - \tau) \right\} \quad (19)$$

для всех $t \geq \tau \geq 0$. Перейдя в неравенстве (19) к верхнему пределу при $t - \tau \rightarrow +\infty$, получаем для любого решения $y(\cdot) \in \mathcal{X}(A + Q)$ возмущенной системы (6) с $\|Q\| \leq \varepsilon$ оценку снизу его верхнего показателя Боля:

$$\bar{\beta}[y] \geq -c_r \varepsilon + \overline{\lim}_{t-\tau \rightarrow +\infty} \frac{1}{t-\tau} \int_\tau^t r(s) ds. \quad (20)$$

Нижней функцией системы (1) является, например, [4; 7, с. 116; 22] функция

$$r_T(t) = T^{-1} \sum_{i=0}^{[t/T]} \ln \|X_A^{-1}(iT, (i-1)T)\|^{-1}, \quad (21)$$

где $T > 0$ – фиксировано и может быть выбрано любым, а $[\cdot]$ – целая часть числа (постоянная $c_{rT} \equiv e^{2aT}$). Тогда, взяв в неравенстве (20) функцию $r(t) \equiv r_T(t)$ и, считая, что t и τ пробегает последовательности $(kT)_{k \in \mathbb{N}}$ и $(mT)_{m \in \mathbb{N}}$ соответственно, получаем

$$\bar{\beta}[y] \geq -e^{2aT} \varepsilon + \overline{\lim}_{k-m \rightarrow +\infty} \frac{1}{(k-m)T} \sum_{i=m+1}^k \ln \|X_A^{-1}(iT, (i-1)T)\|^{-1}$$

для любого решения $y(\cdot) \in \mathcal{X}(A + Q)$, где $\|Q\| \leq \varepsilon$. Поэтому

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \inf_{\|Q\| \leq \varepsilon} i\bar{\beta}(A + Q) \geq \overline{\lim}_{k-m \rightarrow +\infty} \frac{1}{(k-m)T} \sum_{i=m+1}^k \ln \|X_A^{-1}(iT, (i-1)T)\|^{-1}$$

для любого $T > 0$. Перейдя в правой части полученного неравенства к верхнему пределу при $T \rightarrow +\infty$, придем ко второму из неравенств (13).

2. В этой части доказательства установим справедливость неравенств

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \sup_{\|Q\| \leq \varepsilon} s\bar{\beta}(A + Q) \geq \bar{\Omega}_0^*(A) \quad \text{и} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \inf_{\|Q\| \leq \varepsilon} i\bar{\beta}(A + Q) \leq \underline{\omega}_0^*(A). \quad (22)$$

Неравенства (22) докажем методом поворотов Миллионщикова [23, 24] (см. также [25; 26, с. 90–91]). При этом сам метод поворотов Миллионщикова мы непосредственно не применяем, а используем только результаты, полученные с его помощью (подробности можно найти, например, в [25] или [21, с. 78–81; 26, с. 90–91]).

2.1. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Зафиксируем также какое-либо положительное $\delta \leq \varepsilon/(2a+1)$, где $a = \sup\{\|A(t)\| : t \geq 0\}$, а число $T = T_\varepsilon > 1$ выберем столь большим, чтобы выполнялись неравенства

$$\lim_{k-m \rightarrow +\infty} \frac{1}{(k-m)T} \sum_{i=m+1}^k \ln \|X_A(iT, (i-1)T)\| + \frac{\varepsilon}{2} \geq \bar{\Omega}_0^*(A) \quad \text{и} \quad T^{-1} |\ln(2^{-1} \sin \delta)| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (23)$$

Согласно методу поворотов Миллионщикова, существует такая кусочно-непрерывная $n \times n$ -матрица-возмущение $Q_\varepsilon(\cdot)$, отличная от нулевой матрицы разве что на отрезках $[iT-1, iT]$, $i \in \mathbb{N}$,

и удовлетворяющая неравенству $\|Q_\varepsilon\| \leq (2a+1)\delta$ (а значит, $\|Q_\varepsilon\| \leq \varepsilon$ в силу выбора δ), что у возмущенной системы (6) с матрицей $Q(\cdot) \equiv Q_\varepsilon(\cdot)$ найдется решение $y_\varepsilon(\cdot)$, для которого при всех $i \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$\|y_\varepsilon(iT)\| \geq 2^{-1} \sin \delta \|X_A(iT, (i-1)T)\| \|y_\varepsilon((i-1)T)\|. \quad (24)$$

Последовательно воспользовавшись неравенствами (24) при $i = k, \dots, m+1$ ($k > m$), легко получаем оценку

$$\ln \frac{\|y_\varepsilon(kT)\|}{\|y_\varepsilon(mT)\|} \geq (k-m-1) \ln(2^{-1} \sin \delta) + \sum_{i=m+1}^k \ln \|X_A(iT, (i-1)T)\| \quad (25)$$

для всех натуральных $k > m$. Так как при вычислении показателей Боля решений систем из $\mathcal{M}_n$ можно (как это показывается аналогично [7, с. 537]) считать, что t и τ пробегают точки какой-либо арифметической прогрессии, то вследствие этого и неравенства (25) получаем, что

$$\begin{aligned} \underline{\beta}[y_\varepsilon] &= \lim_{k-m \rightarrow +\infty} \frac{1}{(k-m)T} \ln \frac{\|y_\varepsilon(kT)\|}{\|y_\varepsilon(mT)\|} \geq \\ &\stackrel{(25)}{\geq} T^{-1} \ln(2^{-1} \sin \delta) + \lim_{k-m \rightarrow +\infty} \frac{1}{(k-m)T} \sum_{i=m+1}^k \ln \|X_A(iT, (i-1)T)\| \geq \underline{\Omega}_0^*(A) - \varepsilon \end{aligned} \quad (26)$$

для любого $\varepsilon > 0$. Первое неравенство в (22) доказано.

Таким образом, в силу первых неравенств в (13) и (22) имеем: $\overline{\Omega}_0^*(A) \leq \underline{\Omega}_0^*(A)$, а значит, внешний предел в первом равенстве (11) существует и первое равенство в (12) доказано.

2.2. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Выберем число δ таким же, как и выше, а число $T = T_\varepsilon > 1$ столь большим, чтобы выполнялись неравенства

$$\lim_{k-m \rightarrow +\infty} \frac{1}{(k-m)T} \sum_{i=m+1}^k \ln \|X_A^{-1}(iT, (i-1)T)\|^{-1} - \frac{\varepsilon}{2} \leq \underline{\omega}_0^*(A) \quad \text{и} \quad T^{-1} |\ln(2^{-1} \sin \delta)| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (26)$$

Согласно методу поворотов Миллионщикова, существует такая кусочно-непрерывная $n \times n$ -матрица-возмущение $\tilde{Q}_\varepsilon(\cdot)$, отличная от нулевой матрицы разве что на отрезках $[iT, iT+1]$, $i \in \mathbb{N}$, и удовлетворяющая неравенству $\|\tilde{Q}_\varepsilon\| \leq (2a+1)\delta$ (а значит, $\|\tilde{Q}_\varepsilon\| \leq \varepsilon$ в силу выбора δ), что у возмущенной системы (6) с матрицей $Q(\cdot) \equiv \tilde{Q}_\varepsilon(\cdot)$ найдется решение $\tilde{y}_\varepsilon(\cdot)$, для которого при всех $i \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$\|\tilde{y}_\varepsilon((i-1)T)\| \geq 2^{-1} \sin \delta \|X_A^{-1}(iT, (i-1)T)\| \|\tilde{y}_\varepsilon(iT)\|.$$

Последовательно воспользовавшись этими неравенствами при $i = m+1, \dots, k$ ($m < k$), легко получаем

$$\ln \frac{\|\tilde{y}_\varepsilon(kT)\|}{\|\tilde{y}_\varepsilon(mT)\|} \leq -(k-m-1) \ln(2^{-1} \sin \delta) + \sum_{i=m+1}^k \ln \|X_A^{-1}(iT, (i-1)T)\|^{-1} \quad (27)$$

для всех натуральных $m < k$. Так как при вычислении показателей Боля решений систем из $\mathcal{M}_n$ можно считать [7, с. 537], что t и τ пробегают точки какой-либо арифметической прогрессии, то вследствие этого и неравенства (27) получаем, что

$$\begin{aligned} \bar{\beta}[\tilde{y}_\varepsilon] &= \lim_{k-m \rightarrow +\infty} \frac{1}{(k-m)T} \ln \frac{\|\tilde{y}_\varepsilon(kT)\|}{\|\tilde{y}_\varepsilon(mT)\|} \leq \\ &\stackrel{(27)}{\leq} -T^{-1} \ln(2^{-1} \sin \delta) + \lim_{k-m \rightarrow +\infty} \frac{1}{(k-m)T} \sum_{i=m+1}^k \ln \|X_A^{-1}(iT, (i-1)T)\|^{-1} \stackrel{(26)}{\leq} \underline{\omega}_0^*(A) + \varepsilon \end{aligned}$$

для любого $\varepsilon > 0$. Второе неравенство в (22) доказано.

Таким образом, в силу вторых неравенств в (13) и (22) имеем: $\bar{\omega}_*^0(A) \leq \underline{\omega}_*^0(A)$, а значит, внешний предел во втором равенстве (11) существует и второе равенство в (12) доказано. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Если мы введем логически недостающие аналоги показателей (11), получающиеся заменой в определениях (11) соответственно верхнего предела нижним и нижнего верхним:

$$\begin{aligned}\Omega_*^0(A) &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{T \rightarrow +\infty} \overline{\lim}_{k-m \rightarrow +\infty} \frac{1}{(k-m)T} \sum_{i=m+1}^k \ln \|X_A(iT, (i-1)T)\|, \\ \omega_0^*(A) &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{T \rightarrow +\infty} \underline{\lim}_{k-m \rightarrow +\infty} \frac{1}{(k-m)T} \sum_{i=m+1}^k \ln \|X_A^{-1}(iT, (i-1)T)\|^{-1},\end{aligned}\quad (28)$$

где $k, m \in \mathbb{N}$, то легко видеть, что мы не получим новых величин, поскольку показатели (28) совпадают с показателями (3) соответственно. Действительно, заменяя в подп. 1.1 и 2.1 доказательства теоремы 1 нижние пределы верхними, а в подп. 1.2. и 2.2 верхние пределы нижними, получим соответственно доказательство равенств

$$\Omega_*^0(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \sup_{\|Q\| \leq \varepsilon} s\bar{\beta}(A+Q) \text{ и } \omega_0^*(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \inf_{\|Q\| \leq \varepsilon} i\beta(A+Q).$$

Отсюда и равенств (7) вытекает, что $\Omega_*^0(A) = \Omega^0(A)$ и $\omega_0^*(A) = \omega_0(A)$.

Приведем также прямое доказательство двух последних равенств. Пусть верхний предел в первом из равенств (3) реализуется на двойной последовательности $((\tau_l, t_l))_{l \in \mathbb{N}}$, $t_l - \tau_l \rightarrow +\infty$ при $l \rightarrow +\infty$, т. е. $\Omega^0(A) = \lim_{l \rightarrow +\infty} (t_l - \tau_l)^{-1} \ln \|X_A(t_l, \tau_l)\|$. Зафиксируем $T > 0$, и пусть $m_l T, \dots, k_l T$ — члены арифметической прогрессии $(qT)_{q \in \mathbb{N}}$, попадающие в отрезок $[\tau_l, t_l]$. Тогда, поскольку $m_l T - \tau_l < T$ и $t_l - k_l T < T$, очевидно неравенство

$$\|X_A(t_l, \tau_l)\| \leq e^{2aT} \prod_{i=m_l+1}^{k_l} \|X_A(iT, (i-1)T)\|,$$

откуда и следует неравенство $\Omega^0(A) \leq \Omega_*^0(A)$. С другой стороны, из первого равенства в (3) и определения верхнего предела вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $T_\varepsilon > 0$, такое, что для всех $T \geq T_\varepsilon$ и $i \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $\ln \|X_A(iT, (i-1)T)\| \leq (\Omega^0(A) + \varepsilon)T$, а значит, $\Omega_*^0(A) \leq \Omega^0(A)$. Равенство $\Omega_*^0(A) = \Omega^0(A)$ доказано. Доказательство равенства $\omega_0^*(A) = \omega_0(A)$ проводится аналогично.

Таким образом, показатели (3) и (28) совпадают. Вместе с тем, как показывается в теореме 2, равенство их аналогов — показателей (8) и (11) — места не имеет.

Докажем, что показатели (3), (8) и (11) удовлетворяют неравенствам

$$\omega_0(A) \leq \omega_*^0(A) \leq \omega^0(A) \leq \Omega^0(A) \text{ и } \omega_0(A) \leq \Omega_0(A) \leq \Omega_*^0(A) \leq \Omega^0(A). \quad (29)$$

Как показано в [21, с. 66], показатели $\Omega^0(A)$ и $\Omega_0(A)$ можно вычислять по формулам:

$$\begin{aligned}\Omega^0(A) &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \overline{\lim}_{\mathbb{N} \ni l \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \ln \|X_A(lT, (l-1)T)\|, \\ \Omega_0(A) &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \underline{\lim}_{\mathbb{N} \ni l \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \ln \|X_A(lT, (l-1)T)\|\end{aligned}\quad (30)$$

(в [21, с. 66] доказано первое из этих равенств, доказательство второго полностью аналогично). Аналогичные равенства имеют место [21, с. 66] и для показателей $\omega_0(A)$ и $\omega^0(A)$. Тогда, учитывая, что в соотношениях (11) можно без нарушения общности считать [5], что во внутреннем

пределе еще и $m \rightarrow +\infty$, и заменяя в первом равенстве из (11) каждое из $k - m$ слагаемых наибольшим из них, получим вследствие первой формулы в (30) неравенство $\Omega_0^*(A) \leq \Omega^0(A)$, а заменяя в первом равенстве из (11) каждое из $k - m$ слагаемых наименьшим из них – неравенство $\Omega_0(A) \leq \Omega_0^*(A)$. Неравенство $\omega_0(A) \leq \Omega_0(A)$ – непосредственное следствие очевидного неравенства $\|X_A^{-1}(t, \tau)\|^{-1} \leq \|X_A(t, \tau)\|$ для всех $t, \tau \geq 0$. Точно так же устанавливается справедливость первой цепочки неравенств в (29).

Докажем, что существуют системы из $\mathcal{M}_n$, для которых средние неравенства в каждой из цепочек (29) являются строгими, т. е., другими словами, докажем, что равенства (10) в общем случае места не имеют.

Т е о р е м а 2. Для любого натурального $n \geq 2$ существуют системы $A \in \mathcal{M}_n$, для которых одновременно выполняются неравенства $\Omega_0^*(A) > \Omega_0(A)$ и $\omega_0^*(A) < \omega^0(A)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что такие системы найдутся уже в классе диагональных систем. Последовательность $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ точек временной полуоси зададим равенствами

$$T_{2j-1} = 2^{j+2} - 2^j \quad \text{и} \quad T_{2j} = 2^{j+2}, \quad j \in \mathbb{N}, \quad (31)$$

а кусочно-постоянную функцию $a(\cdot) : [0, +\infty) \rightarrow \{-1, 1\}$ – условием

$$a(t) \equiv (-1)^i \quad \text{при} \quad t \in [T_i, T_{i+1}), \quad i \in \mathbb{N}, \quad (32)$$

и $a(t) \equiv 1$ при $t \in [0, T_1)$. Пусть диагональная матрица $D(t) = \text{diag}[-a(t), a(t)]$, $t \geq 0$.

Докажем, что для двумерной системы

$$\dot{x} = D(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \geq 0, \quad (33)$$

справедливы неравенства $\Omega_0(D) < \Omega_0^*(D)$ и $\omega_0^*(D) < \omega^0(D)$.

Поскольку система (33) диагональная, то для ее матрицы Коши $X_D(\cdot, \cdot)$ верно равенство

$$\ln \|X_D(t, \tau)\| = \left| \int_{\tau}^t a(s) ds \right|, \quad t, \tau \geq 0. \quad (34)$$

Тогда в силу определений (31) и (32) получаем: $\ln \|X_D(T_{2j}, T_{2j-2})\| = 0$, $j \in \mathbb{N}$. Поэтому, так как $T_{2j} - T_{2j-2} \rightarrow +\infty$ при $j \rightarrow +\infty$, то вследствие первого равенства в (8) верно неравенство $\Omega_0(D) \leq 0$. Хотя этого неравенства достаточно для доказательства теоремы, заметим, что, с другой стороны, в силу (34) $\ln \|X_D(t, \tau)\| \geq 0$. Следовательно, $\Omega_0(D) = 0$.

Вычислим величину $\Omega_0^*(D)$. Фиксируем $T > 0$. В отрезок $[mT, kT]$ длины $(k - m)T$ попадает не более чем $\lceil \log_2((k - m)T) \rceil - 2$ точек $T_{2j} = 2^{j+2}$, $j \in \mathbb{N}$, а значит, не более чем $2 \lceil \log_2((k - m)T) \rceil$ точек последовательности $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Если точка T_i не принадлежит отрезку $[(l - 1)T, lT]$, $m \leq l \leq k$, то в силу определений (31) и (32) $\ln \|X_D(lT, (l - 1)T)\| = T$. Если же точка T_i принадлежит отрезку $[(l - 1)T, lT]$, $m \leq l \leq k$, то в силу (34) можно утверждать только, что $\ln \|X_D(lT, (l - 1)T)\| \geq 0$. Поэтому

$$\sum_{i=m+1}^k \ln \|X_D(iT, (i - 1)T)\| \geq (k - m)T - 2T \lceil \log_2((k - m)T) \rceil,$$

а значит, для любого $T > 0$ верно неравенство

$$\lim_{k-m \rightarrow +\infty} \frac{1}{(k - m)T} \sum_{i=m+1}^k \ln \|X_D(iT, (i - 1)T)\| \geq 1.$$

Следовательно, $\Omega_0^*(D) \geq 1$. Хотя этого неравенства достаточно для доказательства теоремы, заметим, что, с другой стороны, так как $|a(t)| \leq 1$, то в силу (34) $\ln \|X_D(t, \tau)\| \leq t - \tau$ для всех $t, \tau \geq 0$. Поэтому $\Omega_0^*(D) \leq 1$, а значит, $\Omega_0^*(D) = 1$. Таким образом, $\Omega_0(D) = 0 < 1 = \Omega_0^*(D)$.

Вычислим величины $\omega^0(D)$ и $\omega_*^0(D)$. Поскольку $\ln \|X_D^{-1}(T_{2j}, T_{2j-2})\|^{-1} = 0$, $j \in \mathbb{N}$, и $T_{2j} - T_{2j-2} \rightarrow +\infty$ при $j \rightarrow +\infty$, то $\omega^0(D) \geq 0$. С другой стороны, вследствие (34) имеет место неравенство $\ln \|X_D^{-1}(t, \tau)\|^{-1} \leq 0$, а значит, $\omega^0(D) \leq 0$. Следовательно, $\omega^0(D) = 0$.

Вычислим величину $\omega_*^0(D)$. Фиксируем $T > 0$. Как показано выше, в отрезок $[mT, kT]$ длины $(k - m)T$ попадает не более чем $2[\log_2((k - m)T)]$ точек последовательности $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Если точка T_i не принадлежит отрезку $[(l - 1)T, lT]$, $m \leq l \leq k$, то в силу определений (31) и (32) $\ln \|X_D^{-1}(lT, (l - 1)T)\|^{-1} = -T$. Если же точка T_i принадлежит отрезку $[(l - 1)T, lT]$, $m \leq l \leq k$, то в силу (34) можно утверждать только, что выполнено неравенство $\ln \|X_D^{-1}(lT, (l - 1)T)\|^{-1} \leq 0$. Поэтому

$$\sum_{i=m+1}^k \ln \|X_D^{-1}(iT, (i - 1)T)\|^{-1} \leq -(k - m)T + 2T[\log_2((k - m)T)],$$

а значит, для любого $T > 0$ верно неравенство

$$\overline{\lim}_{k-m \rightarrow +\infty} \frac{1}{(k - m)T} \sum_{i=m+1}^k \ln \|X_D^{-1}(iT, (i - 1)T)\|^{-1} \leq -1.$$

Следовательно, $\omega_*^0(D) \leq -1$. С другой стороны, так как $|a(t)| \leq 1$, то в силу (34) верно неравенство $\ln \|X_D^{-1}(t, \tau)\|^{-1} \geq -(t - \tau)$ для всех $t, \tau \geq 0$. Поэтому $\omega_*^0(D) \geq -1$, а значит, $\omega_*^0(D) = -1$. Таким образом, $\omega_*^0(D) = -1 < 0 = \omega^0(D)$. Теорема в случае $n = 2$ доказана.

Для доказательства теоремы в случае $n > 2$ достаточно в качестве матрицы $A(\cdot)$ взять $n \times n$ -матрицу, левый верхний 2×2 -блок которой – матрица $D(\cdot)$, а остальные элементы нулевые. Теорема доказана.

Поведение генеральных показателей при малых возмущениях. Приведенная выше теорема Р. Э. Винограда [4] (см. соотношения (7)) и теорема 1 данной работы дают точные крайние границы изменения (подвижности) верхних и нижних показателей Боля решений системы из $\mathcal{M}_n$ под действием малых возмущений ее матрицы коэффициентов. Рассмотрим, как могут изменяться сами эти точные границы $\Omega^0(A)$, $\omega_*^0(A)$ и $\Omega_0^*(A)$, $\omega_0(A)$, а также величины $\Omega_0(A)$ и $\omega^0(A)$ под действием малых возмущений матрицы коэффициентов системы (1). Напомним, что функция $\theta(\cdot): \mathcal{M}_n \rightarrow \mathbb{R}$ называется устойчивой вверх (соответственно вниз), если $\theta(\cdot)$ является полунепрерывной сверху (соответственно снизу) функцией на метрическом пространстве $(\mathcal{M}_n, \text{dist}_u)$, т. е. если $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \sup_{\|Q\| \leq \varepsilon} \theta(A + Q) = \theta(A)$ (соответственно $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \inf_{\|Q\| \leq \varepsilon} \theta(A + Q) = \theta(A)$) для любой точки $A(\cdot)$ из $\mathcal{M}_n$.

Известно, что показатель $\Omega^0(A)$ устойчив вверх, а показатель $\omega_0(A)$ – вниз [3, с. 180]. В направлениях же, противоположных указанным, эти показатели, если $n \geq 2$, неустойчивы [27], т. е. для всякого натурального $n \geq 2$ существуют такие системы $A \in \mathcal{M}_n$, для которых справедливы соответственно неравенства

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \inf_{\|Q\| \leq \varepsilon} \Omega^0(A + Q) < \Omega^0(A) \text{ и } \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \sup_{\|Q\| \leq \varepsilon} \omega_0(A + Q) > \omega_0(A).$$

Этими же свойствами, как показывают две следующие теоремы, обладают и показатели $\Omega_0^*(A)$ и $\omega_*^0(A)$ соответственно.

Т е о р е м а 3. Показатель $\Omega_0^*(A)$ устойчив вверх, а показатель $\omega_*^0(A)$ – вниз.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Приведем два доказательства сформулированной теоремы: первое доказательство – следствие равенств (12), а второе – следствие формул вычисления (11).

1. Допустим, что показатель $\Omega_0^*(A)$ не устойчив вверх. Другими словами это означает, что для некоторой матрицы $A \in \mathcal{M}_n$ найдется последовательность $(V_k(\cdot))_{k \in \mathbb{N}}$ кусочно-непрерывных $n \times n$ -матриц такая, что $\|V_k\| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow +\infty$ и

$$\Omega_0^*(A + V_k) - \Omega_0^*(A) > \delta \quad (35)$$

для некоторого фиксированного $\delta > 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$.

В силу первого равенства в (12), заменяя в нем A на $A + V_k$, получаем: для каждого $k \in \mathbb{N}$ найдется такое возмущение $W_k(\cdot)$ системы $A + V_k$, что $\|W_k\| \leq \|V_k\|$ и $s\beta(A + V_k + W_k) \geq \Omega_0^*(A + V_k) - \delta/2$. Обозначим $Q_k(\cdot) = V_k(\cdot) + W_k(\cdot)$. Тогда последнее неравенство примет вид $s\beta(A + Q_k) \geq \Omega_0^*(A + V_k) - \delta/2$, а значит, вследствие (35) имеем: $s\beta(A + Q_k) > \Omega_0^*(A) + \delta/2$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Но это неравенство, так как $\|Q_k\| \leq 2\|V_k\| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow +\infty$, противоречит первому равенству в (12). Следовательно, показатель $\Omega_0^*(\cdot)$ устойчив вверх.

Аналогично этим способом устанавливается устойчивость вниз показателя $\omega_*^0(\cdot)$.

2. Докажем устойчивость вниз показателя $\omega_*^0(\cdot)$, используя второе представление в (11).

Пусть $r(t)$, $t \geq 0$, – нижняя функция системы (1). Как показано в подп 1.2 доказательства теоремы 1, для любого ненулевого решения $y(\cdot)$ возмущенной системы (6) с $\|Q\| \leq \varepsilon$ имеет место неравенство (19). Вследствие этого неравенства для нормы матрицы Коши $X_{A+Q}(\cdot, \cdot)$ системы (6), где $\|Q\| \leq \varepsilon$, получаем при всех $t \geq \tau \geq 0$ оценку

$$\|X_{A+Q}^{-1}(t, \tau)\| = \sup_{y(\cdot) \in \mathcal{X}(A+Q)} \frac{\|y(\tau)\|}{\|y(t)\|} \stackrel{(19)}{\leq} c_r \exp \left\{ -\int_{\tau}^t r(s) ds + c_r \varepsilon (t - \tau) \right\}.$$

Поэтому в силу второго равенства в (11) для любой нижней функции $r(\cdot)$ при всех достаточно больших T верно неравенство

$$\begin{aligned} \omega_*^0(A + Q) &\geq \overline{\lim}_{k-m \rightarrow +\infty} \frac{1}{(k-m)T} \sum_{i=m+1}^k \ln \|X_{A+Q}^{-1}(iT, (i-1)T)\|^{-1} \geq \\ &\geq -c_r \varepsilon + \overline{\lim}_{k-m \rightarrow +\infty} \sum_{i=m+1}^k \int_{(i-1)T}^{iT} r(s) ds. \end{aligned}$$

Следовательно, при любой нижней функции $r(\cdot)$ справедлива оценка

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \inf_{\|Q\| \leq \varepsilon} \omega_*^0(A + Q) \geq \overline{\lim}_{k-m \rightarrow +\infty} \sum_{i=m+1}^k \int_{(i-1)T}^{iT} r(s) ds.$$

Взяв в этом неравенстве в качестве нижней функции $r(\cdot)$ функцию $r_T(\cdot)$ (см. определение (21)) и перейдя затем к пределу при $T \rightarrow +\infty$, получим $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \inf_{\|Q\| \leq \varepsilon} \omega_*^0(A + Q) \geq \omega_*^0(A)$. Поскольку обратное неравенство очевидно, устойчивость вниз показателя $\omega_*^0(\cdot)$ доказана.

Точно так же, используя неравенство (15) и верхнюю функцию (17), получаем доказательство устойчивости вверх показателя $\Omega_0^*(\cdot)$. Теорема доказана.

Покажем, что, если $n \geq 2$, показатели $\Omega_0^*(\cdot)$ и $\omega_*^0(\cdot)$ в направлениях, противоположных указанным в теореме 3, неустойчивы.

Т е о р е м а 4. Если $n \geq 2$, то показатель $\Omega_0^*(\cdot)$ неустойчив вниз, а показатель $\omega_0^*(\cdot)$ – вверх, т. е. при $n \geq 2$ существуют такие системы $A \in \mathcal{M}_n$, для которых выполнены соответственно неравенства

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \inf_{\|Q\| \leq \varepsilon} \Omega_0^*(A+Q) < \Omega_0^*(A) \text{ и } \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \sup_{\|Q\| \leq \varepsilon} \omega_0^*(A+Q) > \omega_0^*(A). \quad (36)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для натурального p назовем p -блоком диагональную кусочно-постоянную 2×2 -матрицу $B_p(t)$, $t \in [0, 3p)$, определяемую следующим образом:

$$B_p(t) = \begin{cases} \text{diag}[1, -2], & \text{если } t \in [0, p) \cup (2p, 3p), \\ \text{diag}[1, 1], & \text{если } t \in [p, 2p]. \end{cases} \quad (37)$$

Через $B_p(t; \tau)$ обозначим сдвиг p -блока на $\tau > 0$ единиц вправо, т. е. $B_p(t; \tau) \equiv B_p(t - \tau)$, где $t \in [\tau, \tau + 3p)$.

Отметим на временной полуоси попарно непересекающиеся полуинтервалы Δ_l , $l \in \mathbb{N}$, удовлетворяющие следующим условиям. Полуинтервал Δ_l расположен на полуоси правее полуинтервала Δ_{l-1} , $l \geq 2$, и имеет длину $|\Delta_l|$, равную $3l^2(l+1)/2$. При этом каждый полуинтервал Δ_l точками $\tau_l^1 < \tau_l^2 < \dots < \tau_l^{l+1}$ (точки τ_l^1 и τ_l^{l+1} – соответственно левый и правый концы полуинтервала Δ_l) разбит на l полуинтервалов $\Delta_l^p = [\tau_l^p, \tau_l^{p+1})$, $p = 1, \dots, l$, и длина $|\Delta_l^p|$ полуинтервала Δ_l^p равна $3lp$. Кроме того, для любого $q \in \mathbb{N}$ найдется бесконечно много отрезков Δ_l , для которых число τ_l^q кратно $3q$ (выполнение этого условия легко обеспечить, строя полуинтервалы Δ_l индукцией по $l \in \mathbb{N}$). Для $q \in \mathbb{N}$ множество тех l , для которых $\tau_l^q / (3q) \in \mathbb{N}$, обозначим $L(q)$ и для $l \in L(q)$ натуральное число $\tau_l^q / (3q)$ – через $p_l(q)$.

Построим вначале двумерную систему $A_2 \in \mathcal{M}_2$, для которой выполнено первое из неравенств (36). Зададим ее сначала на каждом полуинтервале Δ_l , $l \in \mathbb{N}$. Для этого, поскольку $\Delta_l = \bigcup_{p=1}^l \Delta_l^p$, достаточно задать ее на каждом полуинтервале Δ_l^p , $l \in \mathbb{N}$, $p = 1, \dots, l$. Так как длина полуинтервала Δ_l^p равна $3lp$, то разобьем полуинтервал Δ_l^p на l равных (длины $3p$) полуинтервалов $\Delta_l^{p,i}$, $i = 1, \dots, l$ (нумерация слева направо), и пусть $T_l^{p,i}$ – левый конец полуинтервала $\Delta_l^{p,i}$ (в частности, $T_l^{p,1} = \tau_l^p$). На полуинтервале $\Delta_l^{p,i}$ положим матрицу $A_2(\cdot)$ совпадающей со сдвигом p -блока на $T_l^{p,i}$ единиц вправо, т. е. в силу (37)

$$A_2(t) = B_p(t, T_l^{p,i}) = \begin{cases} \text{diag}[1, -2], & \text{если } t \in [T_l^{p,i}, T_l^{p,i} + p) \cup (T_l^{p,i} + 2p, T_l^{p,i} + 3p), \\ \text{diag}[1, 1], & \text{если } t \in [T_l^{p,i} + p, T_l^{p,i} + 2p], \end{cases} \quad (38)$$

где $l \in \mathbb{N}$, $p = 1, \dots, l$, $i = 1, \dots, l$. При $t \notin \bigcup_{l \in \mathbb{N}} \Delta_l$ положим $A_2(t) \equiv \text{diag}[1, 1]$. Система A_2 построена. Для упрощения в дальнейшем записи обозначим отрезок $[T_l^{p,i} + p, T_l^{p,i} + 2p]$ через $\delta_l^{p,i}$, $l \in \mathbb{N}$, $p = 1, \dots, l$, $i = 1, \dots, l$.

Поскольку построенная система $A_2 \in \mathcal{M}_2$ диагональная: $A_2(t) = \text{diag}[a_1(t), a_2(t)]$, $t \geq 0$, и $a_1(t) \equiv 1$, а $a_2(t) \leq 1$, то $\Omega_0^*(A_2) = 1$.

Покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется 2×2 -матрица-возмущение $Q_\varepsilon(\cdot)$, такая, что $\|Q_\varepsilon\| \leq \varepsilon$ и $\Omega_0^*(A_2 + Q_\varepsilon) = 0$. Зафиксируем какое-либо натуральное $p_\varepsilon \geq \varepsilon^{-1}$. Для каждого $l \geq p_\varepsilon$ и при каждом таком l для всех $p = p_\varepsilon, \dots, l$ положим $Q_\varepsilon(t) \equiv \begin{pmatrix} 0 & p^{-1} \\ -p^{-1} & 0 \end{pmatrix}$ при $t \in \delta_l^{p,i}$, $i = 1, \dots, l$, и $Q_\varepsilon(t) \equiv \text{diag}[0, 0]$ при остальных $t \geq 0$.

Вследствие задания матрицы $Q_\varepsilon(\cdot)$ и равенств (38) для матрицы Коши $X_{A_2+Q_\varepsilon}(\cdot, \cdot)$ на тех полуинтервалах $\Delta_l^{p,i}$, на которых $Q_\varepsilon(t) \neq \text{diag}[0, 0]$, справедливы равенства:

$$\begin{aligned} X_{A_2+Q_\varepsilon}(T_l^{p,i} + p, T_l^{p,i}) &= X_{A_2+Q_\varepsilon}(T_l^{p,i} + 3p, T_l^{p,i} + 2p) = \text{diag}[e^p, e^{-2p}], \\ X_{A_2+Q_\varepsilon}(T_l^{p,i} + 2p, T_l^{p,i} + p) &= e^p \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Поэтому, перемножая эти матрицы, получаем

$$X_{A_2+Q_\varepsilon}(T_l^{p,i} + 3p, T_l^{p,i}) = \prod_{j=3}^1 X_{A_2+Q_\varepsilon}(T_l^{p,i} + jp, T_l^{p,i} + (j-1)p) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

в частности, $\|X_{A_2+Q_\varepsilon}(T_l^{p,i} + 3p, T_l^{p,i})\| = 1$ при всех $l \geq p_\varepsilon$, $p = p_\varepsilon, \dots, l$ и $i = 1, \dots, l$. Значит, для любого фиксированного $q \in \mathbb{N}$ и $q \geq p_\varepsilon$, если $l \in L(q)$, получаем (ниже $T_q \stackrel{\text{def}}{=} 3q$):

$$\sum_{i=p_l(q)}^{p_l(q)+l} \ln \|X_{A_2+Q_\varepsilon}(iT_q, (i-1)T_q)\| = 0. \quad (39)$$

Следовательно, считая натуральное $q \geq p_\varepsilon$ и взяв в первом равенстве из (11) $T = T_q$ и $m = p_l(q)$, $k = p_l(q) + l$, где $l \in L(q)$, в силу (39) получим:

$$\Omega_0^*(A_2 + Q_\varepsilon) \leq \lim_{T_q \rightarrow +\infty} \lim_{L(q) \ni l \rightarrow +\infty} \sum_{i=p_l(q)}^{p_l(q)+l} \ln \|X_{A_2+Q_\varepsilon}(iT_q, (i-1)T_q)\| = 0.$$

Итак, $\Omega_0^*(A_2 + Q_\varepsilon) \leq 0$ при любом $\varepsilon > 0$. Хотя этого неравенства достаточно для доказательства первого неравенства из (36), несложно показать, что в действительности $\Omega_0^*(A_2 + Q_\varepsilon) = 0$. Первое неравенство в (36) в случае $n = 2$ доказано. Для его доказательства в случае $n > 2$ достаточно в качестве матрицы $A(\cdot)$ коэффициентов и матрицы-возмущения $Q(\cdot)$ взять блочно-диагональные $n \times n$ -матрицы $A(\cdot) \equiv \text{diag}[A_2(\cdot), 0, \dots, 0]$ и $Q(\cdot) \equiv \text{diag}[Q_\varepsilon(\cdot), 0, \dots, 0]$.

Для доказательства второго неравенства в (36) достаточно вместо построенной матрицы $A(\cdot)$ взять матрицу $-A(\cdot)$. Тогда несложно убедиться, что для исходной и возмущенной систем справедливы равенства $\omega_*^0(-A) = -1$ и $\omega_*^0(-A + Q_\varepsilon) = 0$ при любом $\varepsilon > 0$. Теорема доказана.

Т е о р е м а 5. *Каждый из показателей $\Omega_0(\cdot)$ и $\omega^0(\cdot)$ не устойчив ни вверх, ни вниз при малых возмущениях матрицы коэффициентов.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение теоремы легко следует из примеров систем, построенных в доказательстве теорем 2 и 4.

Так как для всех $t, s \geq 0$ верно равенство $\max_{x \in \mathcal{X}(A)} \|x(t)\| / \|x(s)\| = \|X_A(t, s)\|$, то

$$\Omega_0(A) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t - \tau} \ln \max_{x \in \mathcal{X}(A)} \frac{\|x(t)\|}{\|x(s)\|} \geq \sup_{x \in \mathcal{X}(A)} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t - \tau} \ln \frac{\|x(t)\|}{\|x(s)\|} = s\beta(A) \quad (40)$$

(см. первые равенства в определениях (2) и (9)). Согласно теореме 2, существует система $A \in \mathcal{M}_n$, для которой $\Omega_0(A) < \Omega_0^*(A)$. Тогда для этой системы в силу этого неравенства, теоремы 1 и неравенства (40) имеем

$$\Omega_0(A) < \Omega_0^*(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \sup_{\|Q\| \leq \varepsilon} s\beta(A + Q) \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \sup_{\|Q\| \leq \varepsilon} \Omega_0(A + Q).$$

Следовательно, показатель $\Omega_0(A)$ не устойчив вверх при малых возмущениях матрицы коэффициентов.

Докажем, что показатель $\Omega_0(A)$ не устойчив и вниз при таких возмущениях. Рассмотрим систему A , построенную в доказательстве теоремы 4. Несложно убедиться, что для нее справедливы равенства $\Omega_0(A) = \Omega_0^*(A) = 1$. Но тогда для этой системы получаем:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \inf_{\|Q\| \leq \varepsilon} \Omega_0(A+Q) \leq \lim_{(29) \quad \varepsilon \rightarrow +0} \inf_{\|Q\| \leq \varepsilon} \Omega_0^*(A+Q) < \Omega_0^*(A) = \Omega_0(A).$$

Точно так же доказывается, что показатель $\omega^0(A)$ не устойчив ни вверх, ни вниз при малых возмущениях матрицы коэффициентов. Теорема доказана.

В заключение работы отметим один открытый вопрос: исчерпывают ли на классе $\mathcal{M}_n$ неравенства (29) все возможные соотношения между показателями $\omega_0(A)$, $\omega_*^0(A)$, $\omega^0(A)$, $\Omega_0(A)$, $\Omega_0^*(A)$, $\Omega^0(A)$. Если исключить из этого списка показатели $\omega_*^0(A)$ и $\Omega_0^*(A)$, то ответ на этот вопрос, как показано в работе [28], является утвердительным.

Авторы выражают благодарность профессору А. Чорнику и М. Незабитовскому, высказавшим гипотезу о несправедливости равенств (10), многочисленные обсуждения вопросов, связанных с равномерными асимптотическими характеристиками дифференциальных и разностных систем.

Список использованной литературы

1. Былов, Б. Ф. Почти приводимые системы дифференциальных уравнений / Б. Ф. Былов // Сиб. мат. журн. – 1962. – Т. 3, № 3. – С. 333–359.
2. Миллионщиков, В. М. Структура фундаментальных матриц R-систем с почти периодическими коэффициентами / В. М. Миллионщиков // Докл. АН СССР. – 1966. – Т. 171, № 2. – С. 288–291.
3. Далецкий, Ю. Л. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн. – М.: Наука, 1970.
4. Vinograd, R. E. Simultaneous attainability of central Lyapunov and Bohl exponents for ODE linear systems / R. E. Vinograd // Proc. Am. Math. Soc. – 1983. – Vol. 88, N 4. – P. 595–601.
5. Барабанов, Е. А. Равномерные показатели линейных систем дифференциальных уравнений / Е. А. Барабанов, А. В. Конюх // Дифференц. уравнения. – 1994. – Т. 30, № 10. – С. 1665–1676.
6. Барабанов, Е. А. Генеральные показатели решений линейных дифференциальных систем как функции начального вектора / Е. А. Барабанов, А. В. Конюх // Успехи мат. наук. – 1994. – Т. 49, вып. 4. – С. 94–95.
7. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости / Б. Ф. Былов [и др.]. – М.: Наука, 1966.
8. Розенвассер, Е. Н. Показатели Ляпунова в теории линейных систем управления / Е. Н. Розенвассер. – М.: Наука, 1977.
9. Bohe, P. Über Differentialungleichungen / P. Bohe // J. reine und angew. Math. – 1913. – Bd. 144, Hf 4. – S. 284–318.
10. Боль, П. Собрание трудов / П. Боль. – Рига: Зинатне, 1974.
11. Персидский, К. П. К теории устойчивости интегралов системы дифференциальных уравнений. Часть первая / К. П. Персидский // Изв. физ.-мат. о-ва при Казан. ун-те. 3-я сер. – 1936–1937. – Т. 8. – С. 47–85.
12. Персидский, К. П. Избранные труды: в 2 т. / К. П. Персидский. – Алма-Ата: Наука, 1976. – Т. 1: Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. Теория вероятностей.
13. Крейн, М. Г. О некоторых вопросах, связанных с кругом идей Ляпунова в теории устойчивости / М. Г. Крейн // Успехи мат. наук. – 1948. – Т. 3, вып. 3. – С. 166–169.
14. Крейн, М. Г. Лекции по теории устойчивости решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / М. Г. Крейн. – Киев: Изд-во АН УССР, Ин-т математики, 1964.
15. Миллионщиков, В. М. К спектральной теории неавтономных линейных систем дифференциальных уравнений / В. М. Миллионщиков // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1968. – Т. 18. – С. 147–168.
16. Czornik, A. On the spectrum of discrete time-varying linear systems / A. Czornik, M. Niezabitowski // Nonlinear Analysis: Hybrid Systems. – 2013. – Vol. 9. – P. 27–41.
17. Czornik, A. Alternative formulae for lower general exponent of discrete linear time-varying systems / A. Czornik, M. Niezabitowski // J. of the Franklin Inst. – 2015. – Vol. 352. – P. 399–419.
18. Беклемишев, Д. В. Дополнительные главы линейной алгебры / Д. В. Беклемишев – М.: Наука, 1983.
19. Barabanov, E. A. Bohl exponents of linear differential systems / E. A. Barabanov, A. V. Konyukh // Memoirs on Diff. Eq. and Math. Phys. – 2001. – Vol. 24. – P. 151–158.
20. Барабанов, Е. А. Показатели Боля линейных дифференциальных систем при убывающих возмущениях / Е. А. Барабанов, С. В. Кузнецов // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2001. – Т. 45, № 3. – С. 7–10.
21. Изобов, Н. А. Введение в теорию показателей Ляпунова / Н. А. Изобов. – Минск: БГУ, 2006.
22. Виноград, Р. Э. О центральном характеристическом показателе системы дифференциальных уравнений / Р. Э. Виноград // Мат. сб. – 1957. – Т. 42, вып. 2. – С. 207–222.

23. Миллионщиков, В. М. О неустойчивости характеристических показателей статистически правильных систем / В. М. Миллионщиков // Мат. заметки. – 1967. – Т. 2, вып. 3. – С. 315–318.
24. Миллионщиков, В. М. Доказательство достижимости центральных показателей линейных систем / В. М. Миллионщиков // Сиб. мат. журн. – 1969. – Т. 10, № 1. – С. 99–104.
25. Виноград, Р. Э. Необходимый и достаточный критерий и точная асимптотика устойчивости по первому приближению / Р. Э. Виноград // Дифференц. уравнения. – 1969. – Т. 5, № 5. – С. 800–813.
26. Изобов, Н. А. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений / Н. А. Изобов. // Итоги науки и техники. Сер. Мат. анализ / ВИНТИ. – М., 1974. – Т. 12. – С. 71–146.
27. Миллионщиков, В. М. О неустойчивости особых показателей и о несимметричности отношения почти приво-димости линейных систем дифференциальных уравнений / В. М. Миллионщиков // Дифференц. уравнения. – 1969. – Т. 5, № 4. – С. 749–750.
28. Серебрякова, Н. Г. Взаимоотношения между генеральными показателями линейных дифференциальных систем / Н. Г. Серебрякова, А. Ф. Касабуцкий // Вес. Бел. дзярж. пед. ун-та. Сер. 3. – 2014. – № 4. – С. 34–37.

Поступила в редакцию 22.07.2015