УДК 519.21+519.6

А. Д. ЕГОРОВ

О ПОРЯДКЕ СХОДИМОСТИ АППРОКСИМАЦИЙ ОДНОГО КЛАССА ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ ВИНЕРОВСКОГО ПРОЦЕССА

Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь,
e-mail: egorov@im.bas-net.by

Получена теорема о порядке сходимости приближенной формулы для вычисления математического ожидания одного класса функционалов специального вида от винеровского процесса. Формула основана на использовании дискретизации временного интервала и квадратурных формул, точных для функциональных многочленов третьей степени.

Ключевые слова: винеровский процесс, функционал от винеровского процесса, математическое ожидание, приближенное вычисление, порядок сходимости.

A. D. EGOROV

ORDER OF CONVERGENCE OF APPROXIMATIONS FOR ONE CLASS OF FUNCTIONALS OF THE WIENER PROCESS

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus,
e-mail: egorov@im.bas-net.by

The result on the order of convergence of the approximate formula is obtained for evaluation of the mathematical expectation of one class of special-type functionals of the Wiener process. The formula is based on the use of sampling the time interval and the quadrature formulas exact for third-degree functional polynomials.

Keywords: Wiener process, functional of the Wiener process, mathematical expectation, approximate evaluation, order of convergence.

В данной работе рассматривается задача приближенного вычисления математического ожидания

$$I \equiv E\left[\int_0^t G(X_s)\,ds\right],\ t \in [0,T], \tag{1}$$

где $G(u)$, $u \in R$, – заданная функция, имеющая ограниченные производные до шестого порядка включительно, X_t – случайный процесс, заданный равенством

$$X_t = x + \int_0^t p(s)\,dW_s,\ t \in [0,T],$$

где $x \in R$, $p(t)$ – детерминированная кусочно-непрерывная функция, удовлетворяющая условию $\sup_{[0,T]} |p(t)| \le p = \text{const}$, $W = \{W_t, t \in [0,T]\}$ –винеровский процесс. Далее будет использоваться представление

$$X_t = X_{t_k} + \int_{t_k}^t p(s)\,dW_s,\ t \in [t_k, t_{k+1}], \tag{2}$$

где $t_k = k\Delta$, $\Delta = \dfrac{t}{n}$, $k = 0,1,2,\ldots,n,$ – фиксированное разбиение отрезка $[0,t]$.

Наряду с соотношением (2) рассматривается равенство

$$\hat{X}_t = x_k + \int_{t_k}^{t} p(s) dW_s, \ t \in [t_k, t_{k+1}], \tag{3}$$

где вещественные числа x_k, $k = 0,1,2,\dots,N$, $x_0 = x$, будут выбираться в соответствии с рассматриваемым ниже алгоритмом, предложенным в работе [1] для вычисления ожиданий функционалов от решений стохастических дифференциальных уравнений. Заметим, что из принятых ограничений вытекает возможность перестановки знаков математического ожидания и интеграла в (1) и применения квадратурной формулы трапеций

$$\int_0^t E\left[G(X_s)\right] ds \approx \frac{t}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(E\left[G(X_{t_k})\right] + E\left[G(X_{t_{k+1}})\right] \right) \equiv I_n, \tag{4}$$

где

$$\left| I - I_n \right| \le \frac{t}{12} \left(\frac{t}{n} \right)^2 \left| \frac{d^2}{ds^2} \left(E\left[G(X_s)\right] \right) \Big|_{s=t^*} \right|, \ t^* \in [0,t]. \tag{5}$$

Так как точные значения ожиданий в правой части равенства (4) не известны, мы должны заменить их приближенными значениями и получить оценку погрешности формулы (4) после этой замены. В данной работе приближенные значения получаются в соответствии с упомянутым выше алгоритмом последовательно, используя функциональные квадратурные формулы для вычисления математических ожиданий, точные для многочленов третьей степени [2, 3]. Алгоритм предполагает также замену в правой части (4) X_{s_k} на $\hat{X}_{s_k}$ из формулы (3), т. е. использование вместо (4) приближенной формулы

$$\int_0^t E\left[G(X_s)\right] ds \approx \frac{t}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(E\left[G\left(\hat{X}_{t_k}\right)\right] + E\left[G\left(\hat{X}_{t_{k+1}}\right)\right] \right) \equiv \hat{I}_n. \tag{6}$$

Оценим погрешность аппроксимации после такой замены:

$$\hat{R}_n \equiv I - \hat{I}_n = (I - I_n) + \left(I_n - \hat{I}_n\right), \tag{7}$$

где первая разность в правой части (7) оценивается по формуле (5), а для второй разности имеем

$$\begin{aligned}\left(I_n - \hat{I}_n\right) = \frac{t}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \Bigg(\left(E\left[G(X_{t_k})\right] - E\left[G\left(\hat{X}_{t_k}\right)\right] \right) + \\ + \left(E\left[G(X_{t_{k+1}})\right] - E\left[G\left(\hat{X}_{t_{k+1}}\right)\right] \right) \Bigg).\end{aligned} \tag{8}$$

Поэтому получение оценки предлагаемого алгоритма связано с оценкой разностей

$$r_{k+1} \equiv E\left[G(X_{t_{k+1}})\right] - E\left[G\left(\hat{X}_{t_{k+1}}\right)\right], \ k = 0,1,2,\dots . \tag{9}$$

Используя разложение Тейлора

$$\begin{aligned} G(X_{t_{k+1}}) &= G\left(X_{t_k} + \int_{t_k}^{t_{k+1}} p(s) dW_s \right) = G(X_{t_k}) + G'(X_{t_k}) \int_{t_k}^{t_{k+1}} p(s) dW_s + \\ &+ \frac{1}{2} G''(X_{t_k}) \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} p(s) dW_s \right)^2 + \frac{1}{6} G^{(3)}(X_{t_k}) \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} p(s) dW_s \right)^3 + \\ &+ \frac{1}{24} G^{(4)}\left(X_{t_k} + \theta \int_{t_k}^{t_{k+1}} p(s) dW_s \right) \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} p(s) dW_s \right)^4, \ \theta \in [t_k, t_{k+1}], \end{aligned}$$

и аналогичное разложение $G\left(\hat{X}_{t_{k+1}}\right)=G\left(x_k+\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} p(s)dW_s\right)$, получим

$$r_{k+1}=\left(E\left[G\left(X_{t_k}\right)\right]-G\left(x_k\right)\right)+$$

$$+E\left[G'\left(X_{t_k}\right)\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} p(s)dW_s-G'\left(x_k\right)\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} p(s)dW_s\right]+$$

$$+\frac{1}{2}E\left[G''\left(X_{t_k}\right)\left(\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} p(s)dW_s\right)^2-G''\left(x_k\right)\left(\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} p(s)dW_s\right)^2\right]+$$

$$+\frac{1}{6}E\left[G^{(3)}\left(X_{t_k}\right)\left(\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} p(s)dW_s\right)^3-G^{(3)}\left(x_k\right)\left(\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} p(s)dW_s\right)^3\right]+$$

$$+\frac{1}{24}E\left[G^{(4)}\left(X_{t_k}+\theta\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} p(s)dW_s\right)\left(\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} p(s)dW_s\right)^4-\right.$$

$$\left.-G^{(4)}\left(x_k+\tilde{\theta}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} p(s)dW_s\right)\left(\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} p(s)dW_s\right)^4\right]\equiv p_k+\sum_{m=1}^{4} p_k^{(m)},\ \ \theta,\tilde{\theta}\in\left[t_k,t_{k+1}\right].$$

Оценим величины $p_k^{(m)}$, $m=1,2,3,4$:

$$p_k^{(1)}=E\left[G'\left(X_{t_k}\right)\right]E\left[\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} p(s)dW\right]-G'\left(x_k\right)E\left[\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} p(s)dW_s\right]=0;$$

$$\left|p_k^{(2)}\right|=\frac{1}{2}\left|E\left[G''\left(X_{t_k}\right)\right]E\left[\left(\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} p(s)dW_s\right)^2\right]-G''\left(x_k\right)E\left[\left(\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} p(s)dW_s\right)^2\right]\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} p^2(s)ds\left|E\left[G''\left(X_{t_k}\right)\right]-G''\left(x_k\right)\right|\le\frac{1}{2}p^2\Delta\left|E\left[G''\left(X_{t_k}\right)\right]-G''\left(x_k\right)\right|;$$

$$p_k^{(3)}=\frac{1}{6}\left|E\left[G^{(3)}\left(X_{t_k}\right)\right]E\left[\left(\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} p(s)dW_s\right)^3\right]-G^{(3)}\left(x_k\right)E\left[\left(\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} p(s)dW_s\right)^3\right]\right|=0;$$

$$\left|p_k^{(4)}\right|\le\frac{1}{12}c^{(4)}E\left[\left(\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} p(s)dW_s\right)^4\right]\le\frac{1}{12}c^{(4)}p^4\Delta^2,$$

где $c^{(4)}=\sup\limits_{y\in R}\left|G^{(4)}(y)\right|$. Из полученных оценок следует, что

$$\left|r_{k+1}\right|\le\left|E\left[G\left(X_{t_k}\right)-G\left(x_k\right)\right]\right|+\frac{1}{2}p^2\Delta\left|E\left[G''\left(X_{t_k}\right)\right]-G''\left(x_k\right)\right|+\frac{1}{12}c^{(4)}p^4\Delta^2. \qquad (10)$$

Для оценки $\left|E\left[G\left(X_{t_k}\right)-G\left(x_k\right)\right]\right|$ воспользуемся очевидным неравенством

$$\left|E\left[G\left(X_{t_k}\right)\right]-G\left(x_k\right)\right|\le\left|E\left[G\left(X_{t_k}\right)\right]-E\left[G\left(\hat{X}_{t_k}\right)\right]\right|+$$

$$+\left|E\left[G\left(\hat{X}_{t_k}\right)\right]-J\left(G\left(\hat{X}_{t_k}\right)\right)\right|+\left|J\left(G\left(\hat{X}_{t_k}\right)\right)-G\left(x_k\right)\right|\equiv\left|r_k\right|+q_k+\Delta^2, \qquad (11)$$

где в соответствии с рассматриваемым здесь алгоритмом мы полагаем, что x_k может быть найдено с точностью, не ниже, чем Δ^2, из равенства

$$J\left(G\left(\hat{X}_{t_k}\right)\right)-G\left(x_k\right)=0, \tag{12}$$

и используем следующую приближенную формулу для вычисления $E\left[G\left(\hat{X}_{(\cdot)}\right)\right]$, точную для многочленов третьей степени (см. [2]):

$$E\left[G\left(\hat{X}_t\right)\right]\approx J\left(G\left(\hat{X}_{(\cdot)}\right)\right)\equiv\frac{1}{2\Delta}\int\limits_{U_k}G\left(x_k+p\left(|u|\right)\rho_{t,k}\left(u\right)\right)du, \tag{13}$$

где $\rho_{t,k}\left(u\right)=\sqrt{\Delta}1_{[t_k,t]}\left(|u|\right)\operatorname{sign}\left(u\right),\ U_k=\left[-t_k,-t_{k-1}\right]\cup\left[t_{k-1},t_k\right]$.

Таким образом, предлагаемая алгоритмом из [1] приближенная формула может быть записана в виде

$$E\left[\int\limits_0^t G\left(X_s\right)ds\right]\approx\frac{t}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(J\left(G\left(\hat{X}_{t_k}\right)\right)+J\left(G\left(\hat{X}_{t_{k+1}}\right)\right)\right). \tag{14}$$

Из (10)–(11) вытекает рекуррентное соотношение, которое может быть использовано для оценивания r_k:

$$\left|r_{k+1}\right|\le\left|r_k\right|+q_k+\frac{1}{2}p^2\Delta\left|E\left[G''\left(X_{t_k}\right)\right]-G''\left(x_k\right)\right|+O\left(\Delta^2\right). \tag{15}$$

Оценим далее q_k при условии (12) и с учетом того, что приближенная формула точна для функциональных многочленов третьей степени от $\hat{X}_s,\ s\in\left[t_k,t\right]$:

$$\begin{aligned}\left|q_k\right|=\frac{1}{24}\Bigg|&E\left[G^{(4)}\left(x_{k-1}+\theta\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}b\left(s\right)dW_s\right)\left(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}b\left(s\right)dW_s\right)^4\right]-\\&-J\left(\left[G^{(4)}\left(x_{k-1}+\theta\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}p\left(s\right)dW_s\right)\left(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}p\left(s\right)dW_s\right)^4\right]\right)\Bigg|\le\\&\le\frac{1}{24}c^{(4)}\left(E\left[\left(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}p\left(s\right)dW_s\right)^4\right]+J\left(\left(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}p\left(s\right)dW_s\right)^4\right)\right)\le\\&\le\frac{1}{24}c^{(4)}p^4\Delta^2+\frac{1}{24}c^{(4)}\frac{1}{\Delta}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\left(\sqrt{\Delta}\right)^4p^4\left(u\right)du\le\frac{1}{12}c^{(4)}p^4\Delta^2.\end{aligned} \tag{16}$$

Оценим теперь множитель $\left|E\left[G''\left(X_{t_k}\right)\right]-G''\left(x_k\right)\right|$ из (15). Для этого сначала вычислим

$$\begin{aligned}J\left(G\left(\hat{X}_{t_k}\right)\right)&=J\left(G\left(x_k+\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}p\left(s\right)dW_s\right)\right)=G\left(x_{k-1}\right)+G'\left(x_{k-1}\right)\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}p\left(s\right)dW_s+\\&+\frac{1}{2}G''\left(x_{k-1}\right)\left(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}p\left(s\right)dW_s\right)^2+\frac{1}{6}G^{(3)}\left(x_{k-1}\right)\left(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}p\left(s\right)dW_s\right)^3+\\&+\frac{1}{24}G^{(4)}\left(x_{k-1}+\theta\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}p\left(s\right)dW_s\right)\left(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}p\left(s\right)dW_s\right)^4=\\&=G\left(x_{k-1}\right)+\frac{1}{2}G''\left(x_{k-1}\right)\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}p^2\left(s\right)ds+\frac{1}{24}c^{(4)}J\left(\left(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}p\left(s\right)dW_s\right)^4\right)\le\end{aligned}$$

$$\le G(x_{k-1}) + \frac{1}{2} G''(x_{k-1}) \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} p^2(s)ds + \frac{1}{24} c^{(4)} \frac{1}{\Delta} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} p^4(u) du \Delta^2 \le$$

$$\le G(x_{k-1}) + \frac{1}{2} c^{(2)} p^2 \Delta + \frac{1}{24} c^{(4)} p^4 \Delta^2 =$$

$$= G(x_{k-1}) + O(\Delta), \left(\theta \in [t_k, t_{k+1}]\right). \tag{17}$$

В силу (12) из (17) следует, что

$$G(x_k) = G(x_{k-1}) + O(\Delta). \tag{18}$$

Далее, аналогичным способом вычисляя $J\left(G''\left(\hat{X}_{t_k}\right)\right)$, получаем

$$J\left(G''\left(\hat{X}_{t_k}\right)\right) = G''(x_{k-1}) + O(\Delta). \tag{19}$$

(Единственным отличием от вышеприведенных оценок $J\left(G\left(\hat{X}_{t_k}\right)\right)$ является использование констант $c^{(m+2)}$ при оценке производных $G^{(m+2)}$.)
Из (16) следует, что

$$x_k = G^{-1}\left(G(x_{k-1}) + O(\Delta)\right) = x_{k-1} + \left(G^{-1}\right)'\left(G(x_{k-1})\right) O(\Delta) + O\left(\Delta^2\right) =$$

$$= x_{k-1} + \left(G^{-1}\right)'\left(G(x_{k-1})\right) O(\Delta) =$$

$$= x_{k-1} + \frac{1}{G'(x_{k-1})} O(\Delta) = x_{k-1} + O(\Delta), \text{ (} G^{-1} \text{ – обратная функция)}$$

с учетом условия $G'(x_{k-1}) \ne 0$. Отсюда получим

$$G''(x_k) = G''\left(x_{k-1} + O(\Delta)\right) = G''(x_{k-1}) + G^{(3)}(x_{k-1}) O(\Delta) + O\left(\Delta^2\right) =$$

$$= G''(x_{k-1}) + O(\Delta). \tag{20}$$

Из (19) и (20) получаем

$$J\left(G''\left(\hat{X}_{t_k}\right)\right) = G''(x_k) + O(\Delta). \tag{21}$$

Далее,

$$\left|E\left[G''\left(\hat{X}_{t_k}\right)\right] - G''(x_k)\right| \le \left|E\left[G''\left(\hat{X}_{t_k}\right)\right] - J\left(G''\left(\hat{X}_{t_k}\right)\right)\right| +$$

$$+ \left|J\left(G''\left(\hat{X}_{t_k}\right)\right) - G''(x_k)\right| = O\left(\Delta^2\right) + O(\Delta) = O(\Delta), \tag{22}$$

где использована оценка, аналогичная (16) для случая G'', и оценка (21). Отсюда получаем, что

$$\left|E\left[G''\left(X_{t_k}\right)\right] - G''(x_k)\right| \le \left|E\left[G''\left(X_{t_k}\right)\right] - E\left[G''\left(\hat{X}_{t_k}\right)\right]\right| +$$

$$+ \left|E\left[G''\left(\hat{X}_{t_k}\right)\right] - G''(x_k)\right| \equiv \left|r_k''\right| + O(\Delta), \tag{23}$$

где $r_k'' = E\left[G''\left(X_{t_k}\right)\right] - E\left[G''\left(\hat{X}_{t_k}\right)\right]$ можно найти из рекуррентного соотношения, которое получается подобно тому, как это было сделано для r_k в (9)–(11):

$$\left|r_k''\right| \le \left|E\left[G''\left(X_{t_{k-1}}\right)\right] - G''(x_{k-1})\right| +$$

$$+ \frac{1}{2} p^2 \Delta \left|E\left[G^{(4)}\left(X_{t_{k-1}}\right)\right] - G^{(4)}(x_{k-1})\right| + O\left(\Delta^2\right) \le$$

$$\leq \left| E\left[G''\left(X_{t_{k-1}} \right) \right] - G''\left(x_{k-1} \right) \right| + c^{(4)} p^2 \Delta + O\left(\Delta^2 \right) \leq$$

$$\leq \left| E\left[G''\left(X_{t_{k-1}} \right) \right] - G''\left(x_{k-1} \right) \right| + O(\Delta) =$$

(используются (15) и (22))

$$= \left| E\left[G''\left(X_{t_{k-1}} \right) \right] - E\left[G''\left(\hat{X}_{t_{k-1}} \right) \right] \right| + \left| E\left[G''\left(\hat{X}_{t_{k-1}} \right) \right] - J\left(G''\left(\hat{X}_{t_{k-1}} \right) \right) \right| +$$

$$+ \left| J\left(G''\left(\hat{X}_{t_{k-1}} \right) \right) - G''\left(x_{k-1} \right) \right| + O(\Delta) =$$

$$= \left| r''_{k-1} \right| + \frac{1}{12} c^{(6)} p^4 \Delta^2 + O(\Delta) = \left| r''_{k-1} \right| + O(\Delta),$$

т. е.

$$\left| r''_k \right| = \left| r''_{k-1} \right| + O(\Delta). \tag{24}$$

Таким образом, получаем из (15), (23):

$$\left| r_{k+1} \right| = \left| r_k \right| + q_k + O\left(\Delta^2 \right) + p^2 \Delta \left(\left| r''_k \right| + O(\Delta) \right) + O\left(\Delta^2 \right) =$$

$$= \left| r_k \right| + p^2 \left| r''_k \right| \Delta + O\left(\Delta^2 \right) = \left| r_k \right| + \left| r''_k \right| O(\Delta) + O\left(\Delta^2 \right), \tag{25}$$

и далее, с учетом (24),

$$\sum_{k=1}^{n} r_k = r_1 + \left(r_1 + O\left(\Delta^2 \right) \right) + \left(r_1 + 2O\left(\Delta^2 \right) \right) + \cdots + \left(r_1 + nO\left(\Delta^2 \right) \right) =$$

$$= nr_1 + O\left(\Delta^2 \right) \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} n(n-1) O\left(\Delta^2 \right) = O(1),$$

где мы воспользовались тем, что $r_1 \equiv E\left[G\left(X_{t_1} \right) \right] - E\left[G\left(\hat{X}_{t_1} \right) \right] = 0$. Из приведенных оценок вытекает справедливость следующей теоремы.

Т е о р е м а. *Имеет место следующая асимптотическая оценка порядка погрешности приближенной формулы* (14):

$$\left| \int_0^t E\left[G\left(X_s \right) \right] ds - \frac{t}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(J\left(G\left(\hat{X}_{t_k} \right) \right) + J\left(G\left(\hat{X}_{t_{k+1}} \right) \right) \right) \right| = O\left(n^{-1} \right),$$

где $\hat{X}_{t_{k+1}} = x_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} p(s) dW_s$, x_k *находится из равенства* (12), $J\left(G\left(\hat{X}_{t_k} \right) \right)$ *определяется формулой* (13).

Рассмотрим пример, иллюстрирующий применение предложенного алгоритма.

Положим в (1): $G(u) = 1 + \cos(1 + 0{,}5u) \sin(0{,}5u)$, $p(s) = 1$. Точное значение ожидания (1) в этом случае равно $I = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 1 + \sin 1) \left(1 - e^{-\frac{t}{2}} \right) + (1 - 0{,}5 \sin 1) t$. Результаты вычислений по приближенной формуле (14) для $x = \frac{\pi}{4}$ приведены в таблице.

t	Точное значение	$n = 50$	$n = 100$	$n = 500$
0,2	0,208833	0,208646	0,208739	0,208814
0,6	0,600795	0,599224	0,600004	0,600636
1,0	0,963708	0,95963	0,961654	0,963295
1,4	1,30284	1,29537	1,29907	1,30208
1,8	1,62249	1,61094	1,61666	1,62132

Примечание. Приведенные численные результаты согласуются с указанным в теореме порядком сходимости.

Список использованной литературы

1. *Zherelo, A. V.* On convergence of the method based on approximately exact formulas for functional polynomials for calculations of expectation of the functionals to solution of stochastic differential equations / A. V. Zherelo // Monte Carlo Methods and Applications. – 2013. – Vol. 19 (4). – P. 183–200.

2. *Egorov, A. D.* Functional integrals: Approximate evaluations and applications / A. D. Egorov, P. I. Sobolevsky, L. A. Yanovich. – [S. l.]: Kluwer Academic Publishers, 1993.

3. *Егоров, А. Д.* Введение в теорию и приложения функционального интегрирования / А. Д. Егоров, Е. П. Жидков, Ю. Ю. Лобанов. – М.: Физматлит, 2006.

4. *Egorov, A. D.* Approximate formulas for expectations of functionals of solutions to stochastic differential equations / A. D. Egorov, K. K. Sabelfeld // Monte Carlo Methods and Applications. – 2010. – Vol. 16, N 2. – P. 95–127.

Поступила в редакцию 13.05.2015