УДК 511.42

А. С. КУДИН, А. В. ЛУНЕВИЧ

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ХИНЧИНА В СЛУЧАЕ РАСХОДИМОСТИ В ТРЕХМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь,
e-mail: kunixd@gmail.com

Получено доказательство теоремы Хинчина в случае расходимости в трехмерном евклидовом пространстве для множества неприводимых полиномов степени ровно *n*. В ходе доказательства в трехмерном евклидовом пространстве построена регулярная система троек сопряженных действительных алгебраических чисел степени ровно *n*. Все результаты получены с помощью методов метрической теории чисел.

Ключевые слова: диофантовы приближения, метрическая теория трансцендентных чисел, теорема типа Хинчина, регулярная система.

A. S. KUDIN, A. V. LUNEVICH

ANALOG OF THE KHINTCHINE THEOREM IN THE CASE OF DIVERGENCE IN THE THREE-DIMENSIONAL EUCLIDEAN SPACE

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus, e-mail: kunixd@gmail.com

In the article we proved the Khintchine theorem in the case of divergence in the three-dimensional Euclidean space while considering only irreducible polynomials of degree exactly n. In the course of proof we built a regular system of triples of conjugate real algebraic numbers of degree exactly n in the three-dimensional Euclidean space. All results are obtained using the methods of metric number theory.

Keywords: Diophantine approximation, metric theory of transcendental numbers, Khintchine-type theorem, regular system.

Для полинома $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0\in\mathbb{Z}[x]$ пусть $H(P)=\max_{0\le i\le n}|a_i|$ – его высота. Если $P(x)$ – полином с корнями $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$, то пусть $S(\alpha_i)=\left\{x\in\mathbb{R}:|x-\alpha_i|=\min\limits_{1\le j\le n}|x-\alpha_j|\right\}$. Для положительного действительного числа Q и натурального числа n обозначим множество целочисленных полиномов степени не более n как $\mathcal{P}_n$ и множество полиномов из $\mathcal{P}_n$ с $H(P)\le Q$ как $\mathcal{P}_n(Q)$. Если $A\subset\mathbb{R}^k$ $(k\ge 1)$ – измеримое по Лебегу множество, то пусть $\mu(A)$ – его мера Лебега в пространстве $\mathbb{R}^k$, размерность которого k будет ясна из контекста.

В основании многих задач метрической теории диофантовых приближений лежит теорема Хинчина, доказанная в 1924 г. [1]. Пусть $\Psi(H)$ – монотонно убывающая функция, определенная на $\mathbb{R}_+$, и $J\subset\mathbb{R}$ – некоторый интервал. Обозначим как $\mathcal{L}_1(\Psi)$ множество тех $x\in J$, для которых существует бесконечно много решений $p,q\in\mathbb{Z}$ неравенства $|qx-p|<\Psi(q)$. В соответствии с теоремой Хинчина, $\mu(\mathcal{L}_1(\Psi))=0$ в случае $\sum_{h=1}^{\infty}\Psi(h)<\infty$ и $\mu(\mathcal{L}_1(\Psi))=\mu(J)$ в случае $\sum_{h=1}^{\infty}\Psi(h)=\infty$.

По аналогии с теоремой Хинчина обозначим как $\mathcal{L}_n(\Psi)$ множество тех $x\in J$, для которых существует бесконечно много решений неравенства $|P(x)|<H(P)^{-n+1}\Psi(H(P))$ в полиномах $P\in\mathcal{P}_n$. При $\Psi(H)=H^{-\lambda}$ $(\lambda\le 1)$, используя принцип ящиков Дирихле, несложно доказать, что $\mu(\mathcal{L}_n(\Psi))=\mu(J)$. В 1932 г. К. Малер [2] ввел классификацию действительных и комплексных чисел и в связи с этим предположил, что при $\Psi(H)=H^{-\lambda}$ $(\lambda>1)$ выполняется $\mu(\mathcal{L}_n(\Psi))=0$. В 1964 г.

гипотеза Малера была доказана В. Г. Спринджуком [3]. Естественно, возникает вопрос о возможности уточнения правой части в гипотезе Малера. В 1966 г. А. Бейкер [4] доказал, что, если $\sum_{h=1}^{\infty}\Psi(h)<\infty$, то для почти всех (в смысле меры Лебега) $x\in\mathbb{R}$ неравенство $|P(x)|<\Psi^{n}(H(P))$ имеет не более чем конечное число решений $P\in\mathcal{P}_n$, а также предположил, что для $\mathcal{L}_n(\Psi)$ справедлив аналог теоремы Хинчина, а именно, $\mu(\mathcal{L}_n(\Psi))=0$ при $\sum_{h=1}^{\infty}\Psi(h)<\infty$ и $\mu(\mathcal{L}_n(\Psi))=\mu(J)$ при $\sum_{h=1}^{\infty}\Psi(h)=\infty$. Эта гипотеза в случае сходимости была доказана В. И. Берником [5], а в случае расходимости – В. Бересневичем [6]. Естественным образом возникает задача обобщения теоремы Хинчина на пространства больших размерностей. В данной работе мы рассматриваем аналог теоремы Хинчина в случае расходимости в пространстве $\mathbb{R}^3$. Отметим, что в работе [7] получен аналог теоремы Хинчина в случае расходимости в пространстве $\mathbb{R}\times\mathbb{C}\times\mathbb{Q}_p$. Отличительной чертой данной работы является то, что мы доказываем теорему Хинчина в случае расходимости в более сильной формулировке, а именно, для неприводимых полиномов степени ровно n и общего вида правых частей неравенств. Это потребует построения в $\mathbb{R}^3$ регулярной системы, состоящей из более узкого множества точек, а именно, из троек сопряженных действительных алгебраических чисел степени ровно n.

Пусть $T_0=\left(-2^{-1};2^{-1}\right)^3$. Пусть $\mathbf{v}=(v_1,v_2,v_3)$ и $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ – векторы с действительными координатами, удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases} v_i>0,\ \lambda_i>0,\ i=1,2,3,\\ v_1+v_2+v_3=n-3,\\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1. \end{cases}$$

Определим $\mathcal{L}_{\mathbf{v},\boldsymbol{\lambda}}$ как множество точек $(x_1,x_2,x_3)\in T_0$, для которых имеется бесконечно много неприводимых полиномов $P\in\mathcal{P}_n$, $\deg P=n$, удовлетворяющих системе неравенств

$$\left\{|P(x_k)|<H(P)^{-v_k}\,\Psi^{\lambda_k}(H(P))\ \ (1\le k\le 3).\right. \qquad (1)$$

В работе будет доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Если* $n\ge 3$ *и* $\sum_{h=1}^{\infty}\Psi(h)=\infty$, *то* $\mu(\mathcal{L}_{\mathbf{v},\boldsymbol{\lambda}})=\mu(T_0)$.

Важной частью доказательства теоремы 1 являются данные ниже понятие регулярной системы точек в $\mathbb{R}^3$ и теорема 2, в которой доказывается регулярность системы троек сопряженных действительных алгебраических чисел степени n.

Определение 1. Пусть даны параллелепипед $T_0\subset\mathbb{R}^3$, счетное множество Γ точек $\boldsymbol{\beta}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\in\mathbb{R}^3$, положительная функция $N:\Gamma\to\mathbb{R}_+$ и монотонно убывающие функции $M_1,M_2,M_3:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, которые формируют вектор-функцию $\mathbf{M}=(M_1,M_2,M_3)$. Тройку $(\Gamma,N,\mathbf{M})$ будем называть регулярной системой в T_0, если существует постоянная $C_1=C_1(\Gamma,N,\mathbf{M})>0$ такая, что для любого параллелепипеда $I=I_1\times I_2\times I_3\subset T_0$ найдется достаточно большое число $Q_0(\Gamma,N,\mathbf{M},I)>0$ такое, что для любого $Q>Q_0$ можно выбрать набор точек $\boldsymbol{\beta}_1,\ldots,\boldsymbol{\beta}_t\in\Gamma$ такой, что

$$N(\boldsymbol{\beta}_i)\le Q\ \ (1\le i\le t),$$

а для параллелепипедов

$$\Pi(\boldsymbol{\beta}_i)=\left\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3:\ \ |x_k-\beta_k|<M_k(Q)\ \ (1\le k\le 3)\right\}$$

выполняются условия

$$\Pi(\boldsymbol{\beta}_i)\subset I\ \ (1\le i\le t),\ \ \Pi(\boldsymbol{\beta}_i)\cap\Pi(\boldsymbol{\beta}_j)=\varnothing\ \ (1\le i<j\le t),\ \ t\ge C_1\frac{\mu(I)}{\mu(\Pi(\boldsymbol{\beta}_i))}.$$

Теорема 2. *Пусть заданы натуральное число* $n\ge 3$ *и вектор с действительными координатами* $\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$, *удовлетворяющими условиям* $\omega_1,\omega_2,\omega_3>1$, $\omega_1+\omega_2+\omega_3=n+1$. *Определим* *параллелепипед* $T_0 = \left(-2^{-1}; 2^{-1}\right)^3$ *и счетное множество* Γ *троек* $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{R}^3$ *сопряженных действительных алгебраических чисел степени ровно n. Определим функцию* $N(\boldsymbol{\beta}) = H(P)$*, где* $P \in \mathbb{Z}[x]$ *– неприводимый и примитивный полином степени n такой, что* $P(\beta_1) = P(\beta_2) = P(\beta_3) = 0$. *Определим вектор-функцию* $\mathbf{M}(Q) = \left(Q^{-\omega_1}, Q^{-\omega_2}, Q^{-\omega_3}\right)$*. Тогда тройка* $(\Gamma, N, \mathbf{M})$ *является регулярной системой в* T_0.

Теорема 2 доказывается с помощью леммы 10 и леммы 11, которые даны ниже.

В лемме 10 мы фиксируем некоторый параллелепипед $I \subset T_0$ и рассматриваем множество B_1 точек I, для которых среди неприводимых полиномов $P \in \mathcal{P}_n(Q)$, $\deg P = n$ имеются решения системы неравенств $\left|P(x_k)\right| < b_1 Q^{-\omega_k + 1}$ $(1 \le k \le 3)$. Мы доказываем, что при некотором $b_1(n)$ меру точек B_1 можно сделать сколь угодно близкой мере I при достаточно большом Q. Доказывается, что при достаточно большом $b_1(n)$ данная система разрешима для всех точек I в ненулевых полиномах $P \in \mathcal{P}_n(Q)$, а также то, что мера точек, для которых данная система разрешима в ненулевых полиномах из $\mathcal{P}_{n-1}(Q)$ и в приводимых ненулевых полиномах из $\mathcal{P}_n(Q)$, может быть сделана сколь угодно меньше меры I при достаточно большом Q, и из этих двух утверждений непосредственно следует утверждение леммы.

В лемме 11 мы фисируем параллелепипед $I \subset T_0$ и рассматриваем множество B_2 точек из I, для которых среди ненулевых полиномов $P \in \mathcal{P}_n(Q)$ существуют решения системы неравенств $\left|P(x_k)\right| < b_1 Q^{-\omega_k + 1}$ $(1 \le k \le 3)$ и $\min_{1 \le k \le 3}\left(\left|P'(x_k)\right|\right) < \delta_0 Q$. Доказывается, что для любого b_1 можно взять достаточно малое δ_0 так, чтобы для любого параллелепипеда $I \subset T_0$ мера B_2 была сколь угодно мала относительно меры I при достаточно большом Q. Сначала мы рассматриваем случай $n = 3$ и доказываем, что все корни полиномов P достаточно удалены друг от друга, что позволяет получить оценки снизу производной в каждом корне, а также оценить количество полиномов. Для каждого полинома решения системы заключаются в параллелепипеды с центрами в его корнях и суммированием по полиномам получается оценка сверху меры B_2. На втором этапе доказательства мы рассматриваем случай $n > 3$ и представляем B_2 как объединение двух множеств: B_{21}, для точек которого выполняется $Q^{1/2} \le \min_{1 \le k \le 3}\left(\left|P'(x_k)\right|\right)$, и B_{22}, для точек которого выполняется противоположное неравенство. Оценка меры B_{21} сводится к случаю $n = 3$ с помощью метода существенных и несущественных областей, введенного В. Г. Спринджуком [3], а оценка меры B_{22} получается аналогично оценке из работы [7, с. 168].

В доказательстве теоремы 2 для параллелепипеда $I \subset T_0$ строятся множества B_1 и B_2 из лемм 10 и 11 так, чтобы мера множества $B_1 \setminus B_2$ была достаточно велика относительно меры I. Из того, что для точек множества $B_1 \setminus B_2$ система $\left|P(x_k)\right| < b_1 Q^{-\omega_k + 1}$ $(1 \le k \le 3)$ и $\min_{1 \le k \le 3}\left(\left|P'(x_k)\right|\right) \ge \delta_0 Q$ разрешима в неприводимых полиномах $P \in \mathcal{P}_n(Q)$, $\deg P = n$, следует близость к точкам корней полиномов P, т. е. троек сопряженных действительных алгебраических чисел степени ровно n (элементов регулярной системы), количество которых оценивается снизу с помощью оценки меры множества $B_1 \setminus B_2$.

В теореме 1 мы фиксируем произвольный параллелепипед $I \subset T_0$ и доказываем, что $\mu\left(\mathcal{L}_{\mathbf{v},\boldsymbol{\lambda}} \cap I\right) \ge \lambda \mu(I)$ для некоторого $\lambda < 1$, из чего при помощи леммы 4 следует $\mu\left(\mathcal{L}_{\mathbf{v},\boldsymbol{\lambda}}\right) = \mu(T_0)$. Чтобы получить оценки вида $\mu\left(\mathcal{L}_{\mathbf{v},\boldsymbol{\lambda}} \cap I\right) \ge \lambda \mu(I)$, мы в первую очередь для троек $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ сопряженных действительных алгебраических чисел степени ровно n вводим параллелепипеды вида

$$\sigma(\boldsymbol{\beta}) = \left\{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \left|x_i - \beta_i\right| < c_{17}(n) H(\boldsymbol{\beta})^{-v_i - 1} \Psi_0^{\lambda_i}\left(H(\boldsymbol{\beta})\right)\right\},$$

где $\Psi_0(H) = \min\left(2^{-1} H^{-1}, \Psi(H)\right)$, и доказываем, что из $\mathbf{x} \in \sigma(\boldsymbol{\beta})$ следует разрешимость для точки $\mathbf{x}$ системы (1) в неприводимых полиномах $P \in \mathcal{P}_n$, $\deg P = n$, тем самым сводя задачу к оценке меры множества точек $\mathbf{x} \in I$, которые попадают в бесконечное число параллелепипедов $\sigma(\boldsymbol{\beta})$. Далее при помощи теоремы 2 строим тройки $\boldsymbol{\beta}$ и параллелепипеды $E_k(\boldsymbol{\beta})$, вложенные в $\sigma(\boldsymbol{\beta})$, и оцениваем искомую меру при помощи леммы 7.

В доказательствах теорем и лемм статьи будут использоваться следующие вспомогательные утверждения.

Л е м м а 1. *Пусть* $P \in \mathcal{P}_n$ *и* $x \in S(\alpha_1)$. *Тогда*

$$|x-\alpha_1| \le n\frac{|P(x)|}{|P'(x)|},\ \text{если}\ |P'(x)|>0, \tag{2}$$

$$|x-\alpha_1| \le 2^{n-1}\frac{|P(x)|}{|P'(\alpha_1)|},\ \text{если}\ |P'(\alpha_1)|>0, \tag{3}$$

$$|x-\alpha_1| \le \min_{2\le j\le n}\left(2^{n-j}\frac{|P(x)|}{|P'(\alpha_1)|}|\alpha_1-\alpha_2|\cdot\ldots\cdot|\alpha_1-\alpha_j|\right)^{1/j},\ \text{если}\ |P'(\alpha_1)|>0. \tag{4}$$

Лемма 1 доказана в [8].

Л е м м а 2. *Если* $P \in \mathcal{P}_n$ *– приводимый полином,* $P(x)=P_1(x)\cdot\ldots\cdot P_k(x)$ $(2\le k\le n)$, $\deg P_k \ge 1$ $(1\le k\le n)$, *то*

$$c_1(n)H(P) \le H(P_1)\cdot\ldots\cdot H(P_k) \le c_2(n)H(P). \tag{5}$$

Лемма 2 доказана в [3].

Л е м м а 3. *Пусть* $I\subset\mathbb{R}$ *– некоторый интервал и* $B\subset I$ *– измеримое множество вещественных чисел с условием* $\mu(B)\ge k^{-1}\mu(I)$, *где* k *– натуральное число. Если для всех* $x\in B$ *выполняется неравенство* $|P(x)|<H^{-\omega}$, *где* $\omega>0$ *и* $\deg P\le n$, *то для всех* $x\in I$ *выполняется неравенство* $|P(x)|<(3k)^n(n+1)^{n+1}H^{-\omega}$.

Лемма 3 доказана в [9].

Л е м м а 4. *Пусть* $T\subset\mathbb{R}^3$ *– параллелепипед и* $A\subset T$ *– измеримое множество. Если существует положительная константа* $\lambda<1$ *такая, что* $\mu(A\cap I)\ge\lambda\mu(I)$ *для любого параллелепипеда* $I\subset T$, *то* $\mu(A)=\mu(T)$.

Л е м м а 5. *Пусть* $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ *– убывающая последовательность положительных чисел и ряд* $\sum_{i=1}^{\infty}a_i$ *расходится. Пусть* $b_i=\min(a_i,i^{-1})$. *Тогда* $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ *тоже убывает и ряд* $\sum_{i=1}^{\infty}b_i$ *расходится.*

Л е м м а 6. *Если* $\{\Psi(i)\}_{i=1}^{\infty}$ *– убывающая последовательность положительных чисел и ряд* $\sum_{i=1}^{\infty}\Psi(i)$ *сходится (расходится), то для любого* $k\in\mathbb{N}$ *ряд* $\sum_{i=0}^{\infty}2^i\Psi(k2^i)$ *сходится (расходится).*

Аналогичное лемме 4 утверждение, а также леммы 5 и 6 доказаны в [6].

Л е м м а 7. *Пусть* $E_i\subset\mathbb{R}^3$ *– последовательность измеримых множеств, объединение которых ограничено, и пусть ряд* $\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i)$ *расходится. Пусть* E *– множество точек, попадающих в бесконечное число множеств* E_i. *Тогда*

$$\mu(E)\ge\overline{\lim_{N\to\infty}}\frac{\left(\sum_{i=1}^{N}\mu(E_i)\right)^2}{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\mu(E_i\cap E_j)}. \tag{6}$$

Лемма 7 – это частный случай леммы 5 в работе [10, с. 23].

Л е м м а 8. *Пусть* $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_k)\in\mathbb{R}^k$ *и* $b_2>0$. *Пусть* $\omega_n(\mathbf{x})$ *– точная верхняя грань тех* $\omega>0$, *для которых неравенство* $\prod_{1\le i\le k}|P(x_i)|<b_2H(P)^{-\omega}$ *имеет бесконечное число решений в полиномах* $P\in\mathcal{P}_n$. *Тогда при* $1\le k\le n$ *для любого фиксированного* b_2 *для почти всех (в смысле меры Лебега)* $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^k$ *выполняется* $\omega_n(\mathbf{x})=n+1-k$.

Лемма 8 является очевидным обобщением теоремы из работы [11].

Перейдем к доказательству теорем и лемм данной статьи. Следующая лемма технического характера используется в доказательстве леммы 10.

Л е м м а 9. *Пусть* $I \subset \mathbb{R}^3$ *– некоторый параллелепипед,* $\tau > 0$, $b_3 > 0$, $\mathcal{P} \subset \mathbb{Z}[x]$ *– множество полиномов такое, что*

$$\forall H_0 \in \mathbb{N} \ \#\{P \in \mathbb{P} : \mathrm{H}(P) = H_0\} < \infty. \tag{7}$$

Пусть $L(I,\mathcal{P},\tau,b_3)$ *– множество точек* $\mathbf{x} = (x_1,x_2,x_3) \in I$*, для которых среди* $P \in \mathcal{P}$ *существует бесконечно много решений неравенства*

$$\Pi_{i=1}^3 |P(x_i)| < b_3 H(P)^{-\tau}. \tag{8}$$

Для $Q > 0$ *пусть* $M(I,\mathcal{P},\tau,b_3,Q)$ *– множество точек* $\mathbf{x} = (x_1,x_2,x_3) \in I$*, для которых разрешима система*

$$\begin{cases} \Pi_{i=1}^3 |P(x_i)| < b_3 Q^{-\tau}, \\ P \in \mathcal{P},\ H(P) \le Q,\ P \ne 0. \end{cases} \tag{9}$$

Тогда, если $\mu(L(I,\mathcal{P},\tau,b_3)) = 0$ *для некоторых I,* $\mathcal{P}$*,* τ*,* b_3*, то для любого* $1 > \varepsilon_3 > 0$ *найдется такое* $Q_0(I,\mathcal{P},\tau,b_3,\varepsilon_3)$*, что для всех* $Q > Q_0$ *выполняется* $\mu(M(I,\mathcal{P},\tau,b_3,Q)) < \varepsilon_3 \mu(I)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 9.

Для $H_1,H_2,H_3 \in \mathbb{N}$ таких, что $H_3 \le H_1 \le H_2$, введем обозначения

$$N(H_1,H_2) = \left\{\mathbf{x} \in I : \exists P \in \mathcal{P},\ H(P) = H_1,\ \Pi_{i=1}^3 |P(x_i)| < b_3 H_2^{-\tau}\right\},$$
$$S(H_3) = \cup_{H_1 \ge H_3} N(H_1,H_1).$$

Из определения M следует, что при $1 \le Q' \le Q$

$$M = \left(\bigcup_{1 \le H < Q'} N(H,Q)\right) \cup \left(\bigcup_{Q' \le H \le Q} N(H,Q)\right) = M_1 \cup M_2.$$

Оценим сверху меру M_2. Очевидно, что $M \quad \subset S(Q')$. Согласно определению L и (7),

$$L = \bigcap_{H_3=1}^{\infty} \bigcup_{H_1 \ge H_3} N(H_1,H_1) = \bigcap_{H_3=1}^{\infty} S(H_3).$$

Так как $S(1) \subset S(2) \subset \ldots$, в соответствии со свойством счетно-аддитивности меры Лебега, из $\mu(L) = 0$ следует, что $\mu(S(H_3)) \xrightarrow[H_3 \to \infty]{} 0$. Следовательно, существует Q' такое, что $\mu(M_2) \le \mu(S(Q')) < 2^{-1}\varepsilon_3 \mu(I)$. Теперь оценим сверху меру M_1. Очевидно, что из $\Pi_{i=1}^3 |P(x_i)| < b_3 Q^{-\tau}$ следует истинность хотя бы одного из неравенств $|P(x_i)| < b_3^{1/3} Q^{-\tau/3}$ $(1 \le i \le 3)$, поэтому

$$M_1 \subset \bigcup_{P \in \mathcal{P}, 1 \le H(P) < Q'} \ \bigcup_{1 \le i \le 3} \left\{\mathbf{x} \in I : |P(x_i)| < b_3^{1/3} Q^{-\tau/3}\right\}.$$

Согласно (7) и так как Q' фиксировано, в объединении участвует не более чем конечное число полиномов, поэтому существует такое Q'', что при $Q > Q''$ выполняется $\mu(M_1) < 2^{-1}\varepsilon_3 \mu(I)$. Возьмем $Q_0 = \max(Q',Q'')$. Лемма 9 доказана.

Л е м м а 10. *Пусть n,* $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1,\omega_2,\omega_3)$*,* T_0 *– такие же, как в теореме* 2. *Пусть* $I = I_1 \times I_2 \times I_3 \subset T_0$ *– параллелепипед. Тогда существует такое* $b_1(n) > 0$*, что для любого* $1 > \varepsilon_1 > 0$ *найдется*

$Q_0(I,\boldsymbol{\omega},b_1,\varepsilon_1)$ *такое, что для всех* $Q > Q_0$ *выполняется* $\mu(B_1) \geq (1-\varepsilon_1)\mu(I)$, *где* $B_1 = B_1(I,\boldsymbol{\omega},b_1,Q)$ – *это множество точек* $\mathbf{x} = (x_1,x_2,x_3) \in I$, *для которых среди неприводимых полиномов* $P \in \mathcal{P}_n(Q)$ *степени ровно n имеются решения системы*

$$\left\{ |P(x_1)| < b_1 Q^{-\omega_1+1},\ |P(x_2)| < b_1 Q^{-\omega_2+1},\ |P(x_3)| < b_1 Q^{-\omega_3+1}. \right. \qquad (10)$$

Доказательство леммы 10.

Докажем, что при достаточно большом $b_1(n)$ и $Q > Q_1(\boldsymbol{\omega},b_1)$ для всех точек $\mathbf{x} \in I$ система (10) разрешима в полиномах $P \in \mathcal{P}_n(Q)$, $P \neq 0$. Зафиксируем некоторую точку $\mathbf{x} = (x_1,x_2,x_3) \in I$. Очевидно, что для любого $P \in \mathcal{P}_n(Q/2)$ точка $M_P = (|P(x_1)|,|P(x_2)|,|P(x_3)|)$ принадлежит параллелепипеду $J_1 \times J_2 \times J_3 = [-Q,Q]^3$. Покроем интервалы J_i $(1 \leq i \leq 3)$ непересекающимися интервалами Δ_{j_i} длиной $b_1 Q^{-\omega_i+1}$. Ясно, что количество интервалов Δ_{j_i} не превосходит $\lceil \mu(J_i)/\mu(\Delta_{j_i}) \rceil$, что для любого b_1 при $Q > Q_2(\boldsymbol{\omega},b_1)$ не превосходит $2\mu(J_i)/\mu(\Delta_{j_i}) = 4b_1^{-1}Q^{\omega_i}$. Таким образом, набор параллелепипедов $\Delta_{j1} \times \Delta_{j2} \times \Delta_{j3}$ образует покрытие параллелепипеда $J_1 \times J_2 \times J_3$ и количество элементов в покрытии $\#\{\Delta_{j1} \times \Delta_{j2} \times \Delta_{j3}\} \leq 2^6 b_1^{-3} Q^{\omega_1+\omega_2+\omega_3} = 2^6 b_1^{-3} Q^{n+1}$. Если $b_1(n)$ достаточно велико, то $\#\mathcal{P}_n(Q/2) \geq Q^{n+1} > 2^6 b_1^{-3} Q^{n+1} \geq \#\{\Delta_{j1} \times \Delta_{j2} \times \Delta_{j3}\}$, поэтому найдутся два различных полинома $P_1, P_2 \in \mathcal{P}_n(Q/2)$ такие, что $M_{P_1}, M_{P_2} \in \Delta_{j1} \times \Delta_{j2} \times \Delta_{j3}$ для некоторого $\Delta_{j1} \times \Delta_{j2} \times \Delta_{j3}$, тогда для $P = P_2 - P_1 \in \mathcal{P}_n(Q)$, $P \neq 0$ выполняется система (10) в точке $\mathbf{x}$.

Пусть $\mathcal{P}_R$, $\mathcal{P}_I$ – множества соответственно приводимых и неприводимых полиномов из $\mathcal{P}_n$ степени ровно *n*. Также по аналогии определим $\mathcal{P}_R(Q)$ и $\mathcal{P}_I(Q)$. Согласно лемме 8, $\mu\left(L\left(I,\mathcal{P}_{n-1},n-2,b_1^3\right)\right) = 0$, так как $\omega_{n-1}(\mathbf{x}) = n-3$ для почти всех (в смысле меры Лебега) $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, что меньше $\tau = n-2$. Следовательно, по лемме 9 при $Q > Q_3$ выполняется $\mu\left(M\left(I,\mathcal{P}_{n-1},n-2,b_1^3,Q\right)\right) < 2^{-1}\varepsilon_1\mu(I)$.

Теперь рассмотрим множество $L\left(I,\mathcal{P}_R,n-2,b_1^3\right)$. По определению, для каждой точки $\mathbf{x} \in L\left(I,\mathcal{P}_R,n-2,b_1^3\right)$ существует бесконечно много решений неравенства

$$\Pi_{i=1}^3 |P(x_i)| < b_1^3 H(P)^{-n+2} \qquad (11)$$

в приводимых полиномах $P(x) = P_1(x)P_2(x) \in \mathcal{P}_n$. С помощью леммы 2 из (11) получим

$$\left(\Pi_{i=1}^3 |P_1(x_i)|\right)\left(\Pi_{i=1}^3 |P_2(x_i)|\right) < b_1^3 c_2(n)^{-n+2} H(P_1)^{-n+2} H(P_2)^{-n+2}, \qquad (12)$$

откуда без ограничения общности следует $\Pi_{i=1}^3 |P_1(x_i)| < \sqrt{b_1^3 c_2(n)^{-n+2}} H(P_1)^{-n+2}$. Множество точек $\mathbf{x} \in L\left(I,\mathcal{P}_R,n-2,b_1^3\right)$, для которых имеется бесконечно много таких $P_1(x)$, обозначим как V_1, а те точки, для которых имеется лишь конечное число таких $P_1(x)$, обозначим как V_2. Очевидно, что $V_1 \subset L\left(I,\mathcal{P}_{n-1},n-2,\sqrt{b_1^3 c_2(n)^{-n+2}}\right)$, и, аналогично предыдущему случаю, $\mu(V_1) = 0$. Для каждой точки из V_2 найдется хотя бы один P_1, который встречается бесконечно много раз в разложениях $P(x) = P_1(x)P_2(x)$. Обозначим множество точек из V_2 с таким P_1 как $V_2(P_1)$. Также для $\varepsilon > 0$ и $P_1 \in \mathbb{Z}[x]$, $P_1 \neq 0$ введем следующие обозначения:

$$U_\varepsilon(P_1) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \Pi_{i=1}^3 |P_1(x_i)| \geq \varepsilon H(P_1)^{-n+2}\right\},$$

$$U_0(P_1) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \Pi_{i=1}^3 |P_1(x_i)| = 0\right\}.$$

Очевидно, что $\mathbb{R}^3 = \left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} U_{1/k}(P_1)\right) \cup U_0(P_1)$ и $\mu(U_0(P_1)) = 0$ для любого $P_1 \in \mathbb{Z}[x]$, $P_1 \neq 0$. Из данных выше определений и (12) следует, что для каждой точки $\mathbf{x} \in V_2(P_1) \cap U_{1/k}(P_1)$ $(k \in \mathbb{N})$ найдется бесконечно много $P_2 \in \mathcal{P}_{n-1}$, удовлетворяющих $\Pi_{i=1}^{3} |P_2(x_i)| < k b_1^3 c_2(n)^{-n+2} H(P_2)^{-n+2}$, и следовательно, $V_2(P_1) \cap U_{1/k}(P_1) \subset L\left(I, \mathcal{P}_{n-1}, n-2, k b_1^3 c_2(n)^{-n+2}\right)$. Как и ранее, получим, что $\mu(V_2(P_1) \cap U_{1/k}(P_1)) = 0$, откуда следует $\mu(V_2(P_1)) = 0$, так как $V_2(P_1)$ является счетным объединением множеств меры нуль:

$$V_2(P_1) = V_2(P_1) \cap \mathbb{R}^3 = \left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left(V_2(P_1) \cap U_{1/k}(P_1)\right)\right) \cup \left(V_2(P_1) \cap U_0(P_1)\right).$$

Аналогично равенство $\mu(V_2) = 0$ следует из $V_2 = \bigcup_{P_1 \in \mathcal{P}_{n-1}, P_1 \neq 0} V_2(P_1)$. Объединяя доказанные выше утверждения, получаем $\mu\left(L\left(I, \mathcal{P}_R, n-2, b_1^3\right)\right) = \mu(V_1 \cup V_2) = 0$, откуда и из леммы 9 вытекает, что при $Q > Q_4$ выполняется $\mu\left(M\left(I, \mathcal{P}_R, n-2, b_1^3, Q\right)\right) < 2^{-1} \varepsilon_1 \mu(I)$. Таким образом, доказано, что при $Q > Q_5$ множества $\mathbf{x} \in I$, для которых в ненулевых полиномах $\mathcal{P}_{n-1}(Q)$ и $\mathcal{P}_R(Q)$ разрешима система (10) (включающиеся во множества $M\left(I, \mathcal{P}_{n-1}, n-2, b_1^3, Q\right)$ и $M\left(I, \mathcal{P}_R, n-2, b_1^3, Q\right)$ соответственно), имеют суммарную меру менее $\varepsilon_1 \mu(I)$. Также ранее доказано, что при $Q > \max(Q_1, Q_2)$ для всех $\mathbf{x} \in I$ система (10) разрешима в ненулевых полиномах $\mathcal{P}_n(Q)$. С учетом того, что $\mathcal{P}_n(Q) = \mathcal{P}_{n-1}(Q) \coprod \mathcal{P}_R(Q) \coprod \mathcal{P}_I(Q)$, мера $\mathbf{x} \in I$, для которых система (10) разрешима в полиномах $\mathcal{P}_I(Q)$, $\mu(B_1) > (1 - \varepsilon_1)\mu(I)$. Лемма 10 доказана.

Л е м м а 11. *Пусть n,* $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, T_0 *– такие же, как в теореме* 2. *Пусть* $I = I_1 \times I_2 \times I_3 \subset T_0$ *– параллелепипед. Тогда для любого* $b_1 > 0$ *и любого* $1 > \varepsilon_2 > 0$ *найдется достаточно малое* $\delta_0(\boldsymbol{\omega}, b_1, \varepsilon_2) > 0$ *такое, что для всех* $Q > Q_0(I, \boldsymbol{\omega}, b_1, \varepsilon_2, \delta_0)$ *выполняется* $\mu(B_2) \leq \varepsilon_2 \mu(I)$, *где* $B_2 = B_2(I, \boldsymbol{\omega}, b_1, \delta_0, Q)$ *– это множество точек* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in I$, *для которых среди полиномов* $P \in \mathcal{P}_n(Q)$, $P \neq 0$ *имеются решения системы*

$$\begin{cases} |P(x_1)| < b_1 Q^{-\omega_1 + 1}, \ |P(x_2)| < b_1 Q^{-\omega_2 + 1}, \ |P(x_3)| < b_1 Q^{-\omega_3 + 1}, \\ \min\left(|P'(x_1)|, |P'(x_2)|, |P'(x_3)|\right) < \delta_0 Q. \end{cases} \tag{13}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 11.

Для некоторого $\delta_I > 0$ пусть $I_\delta = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in I \mid \exists 1 \leq i < j \leq 3 : |x_i - x_j| < \delta_I\right\}$. Очевидно, что $\mu(I_\delta) < d(I)\delta_I$ для некоторого $d(I)$, которое зависит только от I. В дальнейшем мы будем рассматривать систему (13) на множестве $\overline{I} = I \setminus I_\delta$, для всех точек $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \overline{I}$ которого, очевидно, выполняется $|x_i - x_j| \geq \delta_I$ для любых $1 \leq i < j \leq 3$.

Пусть $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in B_2 \cap \overline{I}$, следовательно, найдется $P \in \mathcal{P}_n(Q)$, $P \neq 0$, удовлетворяющий системе (13) в точке $\mathbf{x}$. Пусть $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$. В дальнейшем будем считать, что β_i – ближайший к x_i корень полинома P $(i = 1, 2, 3)$. Из (13) и (4) следует

$$|x_i - \beta_i| \leq b_1^{1/n} Q^{-(\omega_i - 1)/n} = b_1^{1/n} Q^{-\tau_i}, \tag{14}$$

где $\tau_i = (\omega_i - 1)/n > 0$ по определению ω_i. Откуда, так как $|x_i - x_j| \geq \delta_I$ и $|x_i| \leq 1/2$, следует, что при $Q > Q_1(\boldsymbol{\omega}, b_1, \delta_I)$

$$|x_i - \beta_i| < 1 \ (1 \leq i \leq 3), \tag{15}$$

$$|\beta_i - \beta_j| \geq 2^{-1} \delta_I \ (1 \leq i < j \leq 3), \tag{16}$$

$$|\beta_i| \leq 1 \ (1 \leq i \leq 3). \tag{17}$$

В соответствии с системой (13) в формулировке леммы, $\left|P'(x_i)\right| < \delta_0 Q$ для некоторого $1 \le i \le 3$. Оценим сверху $\left|P'(\beta_i)\right|$, для чего разложим P' в ряд Тейлора в окрестности β_i:

$$P'(x_i) = P'(\beta_i) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} P^{(k+1)}(\beta_i)(x_i - \beta_i)^k.$$

Из (14), (15) и (17) следует оценка $\left|P^{(k+1)}(\beta_i)(x_i - \beta_i)^k\right| < c_3(n, b_1) Q^{1-\tau_i}$ $(1 \le k \le n-1)$, при помощи которой получим из ряда Тейлора, что $\left|P'(\beta_i)\right| < \delta_0 Q + c_4(n, b_1) Q^{1-\tau_i}$. Так как $\tau_i > 0$, при $Q > Q_2(\boldsymbol{\omega}, b_1, \delta_0)$ последняя оценка дает $\left|P'(\beta_i)\right| < 2\delta_0 Q$. Таким образом, доказано, что из системы (13) следует система

$$\begin{cases} \left|P(x_1)\right| < b_1 Q^{-\omega_1+1}, \ \left|P(x_2)\right| < b_1 Q^{-\omega_2+1}, \ \left|P(x_3)\right| < b_1 Q^{-\omega_3+1}, \\ \min\left(\left|P'(\beta_1)\right|, \left|P'(\beta_2)\right|, \left|P'(\beta_3)\right|\right) < 2\delta_0 Q. \end{cases} \tag{18}$$

Рассмотрим случай $n = 3$. В этом случае $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ – это все корни полинома P. Так как все корни полинома P ограничены (формула (17)), получаем

$$H(P) < c_5(n)\left|a_3\right|. \tag{19}$$

Также из (16) можно получить оценку снизу для $\left|P'(\beta_1)\right|$ и, аналогичным образом, такую же оценку снизу для $\left|P'(\beta_2)\right|$ и $\left|P'(\beta_3)\right|$:

$$\left|P'(\beta_1)\right| = \left|a_3\right|\left|\beta_1 - \beta_2\right|\left|\beta_1 - \beta_3\right| > 2^{-2}\delta_I{}^2\left|a_3\right| > 2^{-2}\delta_I{}^2 c_5(n)^{-1} H(P). \tag{20}$$

Из (18) и (20) получим оценку для высоты полинома P:

$$H(P) < 2^3 \delta_I{}^{-2} \delta_0 c_5(n) Q = \bar{H}.$$

Так как производные во всех корнях ограничены снизу, из (3) следует, что для фиксированного P все решения (18) лежат в параллелепипедах вида

$$\Pi(\boldsymbol{\gamma}) = \left\{\left|x_i - \gamma_i\right| < 2^2 \frac{\left|P(x_i)\right|}{\left|P'(\gamma_i)\right|} < 2^4 b_1 \delta_I{}^{-2} c_5(n) Q^{-\omega_i+1} H(P)^{-1} \ \ (i = 1,2,3)\right\},$$

где $\boldsymbol{\gamma} = \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ – некоторая перестановка корней $\beta_1, \beta_2, \beta_3$. Мера каждого такого параллелепипеда

$$\mu(\Pi(\boldsymbol{\gamma})) = 2^{15} b_1^3 \delta_I{}^{-6} c_5(n)^3 Q^{-1} H(P)^{-3}.$$

Из всего вышесказанного следует, что

$$B_2 \cap \bar{I} \subset \bigcup_{1 \le H_1 < \bar{H}} \ \bigcup_{\substack{P \in \mathcal{P}_3, \\ H(P) = H_1}} \ \bigcup_{\substack{\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3), \\ P(\gamma_i) = 0}} \Pi(\boldsymbol{\gamma}),$$

откуда получаем оценку для меры $B_2 \cap \bar{I}$

$$\mu\left(B_2 \cap \bar{I}\right) < \sum_{1 \le H_1 < \bar{H}} (3H_1)^3 \cdot 3! \cdot 2^{15} b_1^3 \delta_I{}^{-6} c_5(n)^3 Q^{-1} H_1^{-3} < b_1^3 \delta_0 \delta_I{}^{-8} c_6(n),$$

откуда следует оценка для меры B_2

$$\mu(B_2) < \mu\left(B_2 \cap \bar{I}\right) + \mu(I_\delta) < b_1^3 \delta_0 \delta_I{}^{-8} c_6(n) + d(I)\delta_I.$$

Выберем δ_I достаточно малым, чтобы выполнялось $\mu(I_\delta) < 2^{-1}\varepsilon_2\mu(I)$, а затем выберем δ_0 достаточно малым, чтобы выполнялось $\mu(B_2 \cap \overline{I}) < 2^{-1}\varepsilon_2\mu(I)$. Тогда $\mu(B_2) < \varepsilon_2\mu(I)$ и лемма 11 в случае $n = 3$ доказана.

Теперь перейдем к случаю $n > 3$. Представим B_2 в виде $B_2 = B_{21} \cup B_{22}$, где B_{21} – это множество точек $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in I$, для которых среди полиномов $P \in \mathcal{P}_n(Q)$, $P \neq 0$ имеются решения системы

$$\begin{cases} |P(x_1)| < b_1 Q^{-\omega_1+1}, \ |P(x_2)| < b_1 Q^{-\omega_2+1}, \ |P(x_3)| < b_1 Q^{-\omega_3+1}, \\ Q^{1/2} \leq \min(|P'(x_1)|, |P'(x_2)|, |P'(x_3)|) < \delta_0 Q, \end{cases} \tag{21}$$

а B_{22} – это множество точек $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in I$, для которых среди полиномов $P \in \mathcal{P}_n(Q)$, $P \neq 0$ имеются решения системы

$$\begin{cases} |P(x_1)| < b_1 Q^{-\omega_1+1}, \ |P(x_2)| < b_1 Q^{-\omega_2+1}, \ |P(x_3)| < b_1 Q^{-\omega_3+1}, \\ \min(|P'(x_1)|, |P'(x_2)|, |P'(x_3)|) < Q^{1/2}. \end{cases} \tag{22}$$

Рассмотрим множество B_{21}. Из (21) получим оценку снизу для производной в $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, для чего разложим P' в ряд Тейлора в окрестности β_i:

$$P'(x_i) = P'(\beta_i) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} P^{(k+1)}(\beta_i)(x_i - \beta_i)^k = P'(\beta_i) + R_1.$$

Согласно (2), $|x_i - \beta_i| < n|P(x_i)||P'(x_i)|^{-1} \leq nb_1 Q^{-\omega_i + 1/2}$, из чего получим

$$\left|P^{(k+1)}(\beta_i)(x_i - \beta_i)^k\right| < c_7(n, b_1) Q^{-\omega_i + 3/2} \quad (1 \leq k \leq n-1).$$

Так как $-\omega_i + 3/2 < 1/2$, из последней оценки следует, что $|R_1| < 2^{-1} Q^{1/2}$ при $Q > Q_3(\boldsymbol{\omega}, b_1)$, из чего с помощью ряда Тейлора и (21) получаем $|P'(\beta_i)| \geq 2^{-1} Q^{1/2}$. Таким образом, учитывая (18), мы доказали, что из системы (21) следует система

$$\begin{cases} |P(x_1)| < b_1 Q^{-\omega_1+1}, \ |P(x_2)| < b_1 Q^{-\omega_2+1}, \ |P(x_3)| < b_1 Q^{-\omega_3+1}, \\ 2^{-1} Q^{1/2} \leq \min(|P'(\beta_1)|, |P'(\beta_2)|, |P'(\beta_3)|) < 2\delta_0 Q. \end{cases} \tag{23}$$

Согласно (3), при фиксированных P и тройке его корней $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ все решения (23) содержатся в паралелепипеде

$$\sigma(P, \boldsymbol{\beta}) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : |x_i - \beta_i| < 2^{n-1} \frac{b_1 Q^{-\omega_i+1}}{|P'(\beta_i)|} \ (1 \leq i \leq 3) \right\}. \tag{24}$$

Применим метод существенных и несущественных областей, введенный В. Г. Спринджуком [3], для сведения задачи оценки меры B_{21} к полиномам меньшей степени $n' < n$. Выберем $\boldsymbol{\omega}'$ так, чтобы они удовлетворяли условиям леммы 11 и при этом $\omega_i > \omega_i'$. Например, можно взять $\omega_i' = \frac{n'-2}{n-2}(\omega_i - 1) + 1$. Для некоторого фиксированного $b_4 > 1$ построим параллелепипеды

$$\sigma_1(P, \boldsymbol{\beta}) = J_1(P, \boldsymbol{\beta}) \times J_2(P, \boldsymbol{\beta}) \times J_3(P, \boldsymbol{\beta}),$$

где

$$J_i(P, \boldsymbol{\beta}) = \left\{ x_i \in \mathbb{R} : |x_i - \beta_i| < b_4 2^{n-1} \frac{b_1 Q^{-\omega_i'+1}}{|P'(\beta_i)|} \leq 2^n b_1 b_4 Q^{-\omega_i' + 1/2} \right\} \ (1 \leq i \leq 3). \tag{25}$$

Очевидно, что $\sigma(P,\boldsymbol{\beta}) \subset \sigma_1(P,\boldsymbol{\beta})$ и

$$\mu(\sigma(P,\boldsymbol{\beta})) \le b_4^{-3} Q^{n'-n} \mu(\sigma_1(P,\boldsymbol{\beta})). \tag{26}$$

Также важно отметить, что из $-\omega_i' + 1/2 < -1/2$ в определении $J_i(P,\boldsymbol{\beta})$ и (14) вытекает, что при $Q > Q_4(I,\boldsymbol{\omega},b_1,b_4,\varepsilon_2)$ для любого такого $\sigma_1(P,\boldsymbol{\beta})$ выполняется

$$\sigma_1(P,\boldsymbol{\beta}) \subset I \cup G_1, \tag{27}$$

где G_1 – некоторое множество с мерой $\mu(G_1) < 2^{-2}\varepsilon_2\mu(I)$.

Пусть $\mathbf{b} = (a_n, a_{n-1}, ..., a_{n'+1})$ – вектор, состояший из коэффициентов полинома $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$. Обозначим через $\mathcal{P}_n(Q,\mathbf{b})$ подмножество полиномов из $\mathcal{P}_n(Q)$ с вектором $\mathbf{b}$. Для каждого $\mathcal{P}_n(Q,\mathbf{b})$ разобьем все возможные пары $(P,\boldsymbol{\beta})$ $(P \in \mathcal{P}_n(Q,\mathbf{b}))$ на классы $S_n(Q,\mathbf{b},j)$ $(1 \le j \le c_8(n))$ так, чтобы в каждом классе $S_n(Q,\mathbf{b},j)$ было не более одной пары $(P,\boldsymbol{\beta})$ для любого $P \in \mathcal{P}_n(Q,\mathbf{b})$. Пару $(P_1,\boldsymbol{\beta}_1) \in S_n(Q,\mathbf{b},j)$, порождающую параллелепипед $\sigma_1(P_1,\boldsymbol{\beta}_1)$, будем называть существенной, если для любого другой пары $(P_2,\boldsymbol{\beta}_2) \in S_n(Q,\mathbf{b},j)$ выполняется неравенство

$$\mu(\sigma_1(P_1,\boldsymbol{\beta}_1) \cap \sigma_1(P_2,\boldsymbol{\beta}_2)) < 2^{-1}\mu(\sigma_1(P_1,\boldsymbol{\beta}_1)). \tag{28}$$

Обозначим как $S_n{}^A(Q,\mathbf{b},j)$ множество существенных пар из $S_n(Q,\mathbf{b},j)$. Если же найдется другая пара $(P_2,\boldsymbol{\beta}_2) \in S_n(Q,\mathbf{b},j)$ такая, что

$$\mu(\sigma_1(P_1,\boldsymbol{\beta}_1) \cap \sigma_1(P_2,\boldsymbol{\beta}_2)) \ge 2^{-1}\mu(\sigma_1(P_1,\boldsymbol{\beta}_1)), \tag{29}$$

то будем называть пару $(P_1,\boldsymbol{\beta}_1)$ несущественной. Обозначим как $S_n{}^B(Q,\mathbf{b},j)$ множество несущественных пар из $S_n(Q,\mathbf{b},j)$.

Из всего вышесказанного следует, что

$$B_{21} \subset \left(\bigcup_{\mathbf{b}} \bigcup_{1 \le j \le c_8(n)} \bigcup_{(P_1,\boldsymbol{\beta}_1) \in S_n{}^A(Q,\mathbf{b},j)} \sigma(P_1,\boldsymbol{\beta}_1) \right) \cup \left(\bigcup_{\mathbf{b}} \bigcup_{1 \le j \le c_8(n)} \bigcup_{(P_1,\boldsymbol{\beta}_1) \in S_n{}^B(Q,\mathbf{b},j)} \sigma(P_1,\boldsymbol{\beta}_1) \right) = B_{21A} \cup B_{21B}.$$

Получим оценку сверху меры B_{21A}. Для каждого $S_n{}^A(Q,\mathbf{b},j)$ для всех $\sigma_1(P_1,\boldsymbol{\beta}_1)$ не менее половины меры свободно от точек других $\sigma_1(P_1,\boldsymbol{\beta}_1)$, поэтому, с учетом (27),

$$\sum_{(P_1,\boldsymbol{\beta}_1) \in S_n{}^A(Q,\mathbf{b},j)} \mu(\sigma_1(P_1,\boldsymbol{\beta}_1)) \le 2\mu(I) + 2\mu(G_1) \le \left(2 + \frac{\varepsilon_2}{2}\right)\mu(I).$$

Из последнего неравенства, с помощью (26) и так как $\#\{\mathbf{b}\} \le c_9(n)Q^{n-n'}$, получим

$$\mu(B_{21A}) \le \sum_{\mathbf{b}} \sum_{1 \le j \le c_8(n)} \sum_{(P_1,\boldsymbol{\beta}_1) \in S_n{}^A(Q,\mathbf{b},j)} \mu(\sigma(P_1,\boldsymbol{\beta}_1)) \le \sum_{\mathbf{b}} \sum_{1 \le j \le c_8(n)} \sum_{(P_1,\boldsymbol{\beta}_1) \in S_n{}^A(Q,\mathbf{b},j)} b_4^{-3} Q^{n'-n} \mu(\sigma_1(P_1,\boldsymbol{\beta}_1)) \le$$

$$\le \sum_{\mathbf{b}} \sum_{1 \le j \le c_8(n)} b_4^{-3} Q^{n'-n} \left(2 + \frac{\varepsilon_2}{2}\right)\mu(I) \le 3c_9(n)Q^{n-n'} c_8(n) b_4^{-3} Q^{n'-n} \mu(I) \le 3c_8(n)c_9(n)b_4^{-3}\mu(I).$$

Задавая достаточно большое значение $b_4 > b_{40}(n,\varepsilon_2)$, добьемся того, чтобы

$$\mu(B_{21A}) \le 3^{-1}\varepsilon_2\mu(I). \tag{30}$$

Оценим сверху меру B_{21B}. В дальнейшем нам будут нужны оценки сверху для $\left|P\left(x_i\right)\right|$ и $\left|P'\left(x_i\right)\right|$ при $\mathbf{x}\in\sigma_1\left(P,\boldsymbol{\beta}\right)$. Разложим P в ряд Тейлора в окрестности β_i:

$$P\left(x_i\right)=P'\left(\beta_i\right)\left(x_i-\beta_i\right)+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}P^{(k)}\left(\beta_i\right)\left(x_i-\beta_i\right)^k.$$

Из (25) при $Q>Q_5\left(\boldsymbol{\omega},b_1,b_4\right)$ получаем оценки

$$\left|P'\left(\beta_i\right)\left(x_i-\beta_i\right)\right|<2^{n-1}b_1b_4Q^{-\omega_i'+1},$$

$$\left|P^{(k)}\left(\beta_i\right)\left(x_i-\beta_i\right)^k\right|<c_{10}\left(n\right)Q\cdot 2^n b_1b_4Q^{-2\omega_i'+1}<2^n b_1b_4c_{10}\left(n\right)Q^{-2\omega_i'+2}\quad\left(2\le k\le n\right),$$

из которых получаем

$$\left|P\left(x_i\right)\right|<2^n b_1b_4Q^{-\omega_i'+1}\left(1+nc_{10}\left(n\right)Q^{-\omega_i'+1}\right)\le c_{11}\left(n\right)b_1b_4Q^{-\omega_i'+1}\quad\left(1\le i\le 3\right).$$

Разложим P' в ряд Тейлора в окрестности β_i:

$$P'\left(x_i\right)=P'\left(\beta_i\right)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k!}P^{(k+1)}\left(\beta_i\right)\left(x_i-\beta_i\right)^k.$$

Из (25) получаем оценку

$$\left|P^{(k+1)}\left(\beta_i\right)\left(x_i-\beta_i\right)^k\right|<c_{10}\left(n\right)Q\left(2^n b_1b_4Q^{-\omega_i'+1/2}\right)^k\le 2^n b_1b_4c_{10}\left(n\right)Q^{1-\left(\omega_i'-1/2\right)}\quad\left(1\le k\le n-1\right),$$

из которой с учетом (23) при $Q>Q_6\left(\boldsymbol{\omega},b_1,b_4,\delta_0\right)$ для некоторого $1\le i\le 3$ следует

$$\left|P'\left(x_i\right)\right|<4\delta_0Q.$$

Таким образом, мы доказали, что для $\mathbf{x}\in\sigma_1\left(P,\boldsymbol{\beta}\right)$ справедлива система неравенств

$$\begin{cases}\left|P\left(x_1\right)\right|<c_{11}\left(n\right)b_1b_4Q^{-\omega_1'+1},\ \left|P\left(x_2\right)\right|<c_{11}\left(n\right)b_1b_4Q^{-\omega_2'+1},\ \left|P\left(x_3\right)\right|<c_{11}\left(n\right)b_1b_4Q^{-\omega_3'+1},\\ \min\left(\left|P'\left(x_1\right)\right|,\left|P'\left(x_2\right)\right|,\left|P'\left(x_3\right)\right|\right)<4\delta_0Q.\end{cases}\tag{31}$$

При фиксированном ${S_n}^B\left(Q,\mathbf{b},j\right)$ по определению для любой пары $\left(P_1,\boldsymbol{\beta}_1\right)\in {S_n}^B\left(Q,\mathbf{b},j\right)$ найдется пара $\left(P_2,\boldsymbol{\beta}_2\right)\in S_n\left(Q,\mathbf{b},j\right)$ такая, что выполняется (29), откуда очевидным образом для $1\le i\le 3$ получаем

$$\mu\left(J_i\left(P_1,\boldsymbol{\beta}_1\right)\cap J_i\left(P_2,\boldsymbol{\beta}_2\right)\right)\ge 2^{-1}\mu\left(J_i\left(P_1,\boldsymbol{\beta}_1\right)\right).\tag{32}$$

Из (31) получаем, что для ненулевого полинома $R=P_1-P_2\in\mathcal{P}_{n'}\left(2Q\right)$ для каждого $\mathbf{x}\in\sigma_1\left(P_1,\boldsymbol{\beta}_1\right)\cap\sigma_1\left(P_2,\boldsymbol{\beta}_2\right)$ выполняется система неравенств

$$\begin{cases}\left|R\left(x_1\right)\right|<2c_{11}\left(n\right)b_1b_4Q^{-\omega_1'+1},\ \left|R\left(x_2\right)\right|<2c_{11}\left(n\right)b_1b_4Q^{-\omega_2'+1},\ \left|R\left(x_3\right)\right|<2c_{11}\left(n\right)b_1b_4Q^{-\omega_3'+1},\\ \min\left(\left|R'\left(x_1\right)\right|,\left|R'\left(x_2\right)\right|,\left|R'\left(x_3\right)\right|\right)<8\delta_0Q.\end{cases}$$

При помощи (32) и леммы 3 получаем, что уже для всех $\mathbf{x}\in\sigma_1\left(P_1,\boldsymbol{\beta}_1\right)$ выполняется система неравенств

$$\begin{cases}\left|R\left(x_1\right)\right|<c_{12}\left(n\right)b_1b_4Q^{-\omega_1'+1},\ \left|R\left(x_2\right)\right|<c_{12}\left(n\right)b_1b_4Q^{-\omega_2'+1},\ \left|R\left(x_3\right)\right|<c_{12}\left(n\right)b_1b_4Q^{-\omega_3'+1},\\ \min\left(\left|R'\left(x_1\right)\right|,\left|R'\left(x_2\right)\right|,\left|R'\left(x_3\right)\right|\right)<c_{13}\left(n\right)\delta_0Q.\end{cases}$$

Введем замену переменных $Q' = 2Q$. Таким образом, для некоторого ненулевого $R \in \mathcal{P}_{n'}(Q')$ для всех $\mathbf{x} \in \sigma_1(P_1, \boldsymbol{\beta}_1)$ верно

$$\begin{cases} |R(x_1)| < c_{14}(n) b_1 b_4 (Q')^{-\omega_1' + 1}, \ |R(x_2)| < c_{14}(n) b_1 b_4 (Q')^{-\omega_2' + 1}, \ |R(x_3)| < c_{14}(n) b_1 b_4 (Q')^{-\omega_3' + 1}, \\ \min(|R'(x_1)|, |R'(x_2)|, |R'(x_3)|) < c_{15}(n) \delta_0 Q'. \end{cases}$$

Следовательно,

$$B_{21B} \cap I = \bigcup_{\mathbf{b}} \bigcup_{1 \le j \le c_8(n)} \bigcup_{(P_1, \boldsymbol{\beta}_1) \in S_n{}^B(Q, \mathbf{b}, j)} (\sigma(P_1, \boldsymbol{\beta}_1) \cap I) \subset B_2(I, \boldsymbol{\omega}', c_{14}(n) b_1 b_4(n), c_{15}(n) \delta_0, Q').$$

Пусть теперь $n' = 3$. Используя уже доказанный случай $n = 3$, получим, что при достаточно малом δ_0 при $2Q = Q' > Q_0'(I, \boldsymbol{\omega}', c_{14}(n) b_1 b_4(n), 12^{-1} \varepsilon_2, c_{15}(n) \delta_0)$ выполняется

$$\mu(B_{21B} \cap I) \le \mu(B_2(I, \boldsymbol{\omega}', c_{14}(n) b_1 b_4(n), c_{15}(n) \delta_0, Q')) < 12^{-1} \varepsilon_2 \mu(I),$$

откуда с учетом (27) получаем

$$\mu(B_{21B}) < 3^{-1} \varepsilon_2 \mu(I). \tag{33}$$

Рассмотрим множество B_{22}. По аналогии с доказательством, данным в работе [7, с. 168], получим, что при $Q > Q_7(I, \boldsymbol{\omega}, b_1, 3^{-1} \varepsilon_2)$

$$\mu(B_{22}) < 3^{-1} \varepsilon_2 \mu(I). \tag{34}$$

Из (30), (33), (34) получаем, что $\mu(B_2) \le \varepsilon_2 \mu(I)$. Лемма 11 доказана.

Доказательство теоремы 2.

Пусть $I = I_1 \times I_2 \times I_3 = \prod_{1 \le i \le 3} (e_i; f_i) \subset (-2^{-1}; 2^{-1})^3$. Для $\varepsilon_4 = 10^{-1}$ определим параллелепипед $I' = \prod_{1 \le i \le 3} \left(e_i + \frac{\varepsilon_4}{2} |I_i|; f_i - \frac{\varepsilon_4}{2} |I_i| \right)$. Очевидно, что $\mu(I') = (1 - \varepsilon_4)^3 \mu(I)$.

Для некоторого $\delta > 0$ пусть $I_\delta' = \{(x_1, x_2, x_3) \in I' \mid \exists 1 \le i < j \le 3 : |x_i - x_j| < \delta\}$. Очевидно, что $\mu(I_\delta') < d(I') \delta$ для некоторого $d(I')$, которое зависит только от I'. Возьмем достаточно малый $\delta = \delta(I')$ такой, что $\mu(I_\delta') \le 6^{-1} \mu(I')$.

Для тройки действительных чисел $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \in \mathbb{R}^3$ и $b_5 > 0$ определим параллелепипеды

$$\Pi(\boldsymbol{\gamma}, b_5) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \ |x_k - \gamma_k| < b_5 Q^{-\omega_k} \ \ (1 \le k \le 3)\}.$$

Применим леммы 10 и 11 для параллелепипеда I'. По лемме 10 существует $b_1(n)$ такой, что для $\varepsilon_1 = 6^{-1}$ для всех $Q > Q_0(I', \boldsymbol{\omega})$ выполняется

$$\mu(B_1) \ge (5/6) \mu(I'). \tag{35}$$

По лемме 11 для $\varepsilon_2 = 6^{-1}$ найдется $\delta_0(\boldsymbol{\omega})$ такой, что для всех $Q > Q_1(I', \boldsymbol{\omega})$ выполняется

$$\mu(B_2) \le (1/6) \mu(I').$$

Согласно определениям множеств B_1, B_2, $I_\delta{}'$, для всех точек $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in B_3 = B_1 \cap (I' \setminus B_2) \cap (I' \setminus I_\delta')$ среди неприводимых полиномов $P \in \mathcal{P}_n(Q)$ степени ровно n существуют решения системы неравенств

$$\begin{cases}\left|P(x_1)\right| < b_1 Q^{-\omega_1+1}, \ \left|P(x_2)\right| < b_1 Q^{-\omega_2+1}, \ \left|P(x_3)\right| < b_1 Q^{-\omega_3+1}, \\ \min\left(\left|P'(x_1)\right|, \left|P'(x_2)\right|, \left|P'(x_3)\right|\right) \ge \delta_0(\boldsymbol{\omega}) Q.\end{cases}$$

При этом $\mu(B_3) \ge 2^{-1}\mu(I')$. Докажем, что существуют попарно различные действительные корни $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ полинома P такие, что

$$\left|x_i - \beta_i\right| < 3b_1(n)\delta_0^{-1}(\boldsymbol{\omega}) Q^{-\omega_i}. \tag{36}$$

Разложим P в ряд Тейлора в окрестности точки x_i:

$$P(y_i) = P(x_i) + P'(x_i)(y_i - x_i) + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} P^{(k)}(x_i)(y_i - x_i)^k.$$

Не теряя общности, можно считать, что $P(x_i) > 0$ и $P'(x_i) < 0$. Возьмем $y_i = x_i + 3b_1(n)\delta_0^{-1}(\boldsymbol{\omega})Q^{-\omega_i}$, тогда при $Q > Q_2(\boldsymbol{\omega})$ получим

$$0 \le P(x_i) < b_1(n) Q^{-\omega_i+1},$$
$$P'(x_i)(y_i - x_i) \le -3b_1(n) Q^{-\omega_i+1},$$
$$\left|P^{(k)}(x_i)(y_i - x_i)^k\right| < \left(3b_1(n)\delta_0^{-1}(\boldsymbol{\omega})\right)^2 c_{16}(n) Q^{-2\omega_i+1} < n^{-1} b_1(n) Q^{-\omega_i+1},$$
$$\left|P(x_i) + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} P^{(k)}(x_i)(y_i - x_i)^k\right| < 2b_1(n) Q^{-\omega_i+1},$$

что дает $P(y_i) < 0$. Так как $P(x_i) > 0$, из непрерывности $P(x)$ следует, что P имеет корень $\beta_i \in \left[x_i; x_i + 3b_1(n)\delta_0^{-1}(\boldsymbol{\omega})Q^{-\omega_i}\right]$. Также $\mathbf{x} \in B_3 \subset I' \setminus I'_\delta$, поэтому $\left|x_i - x_j\right| \ge \delta$, откуда получаем, что $\left|\beta_i - \beta_j\right| > 2^{-1}\delta$ при $Q > Q_3(I', \boldsymbol{\omega})$, а следовательно, β_i попарно различны. Таким образом, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ – тройка сопряженных действительных алгебраических чисел степени ровно n и высоты не более Q.

Так как множество таких троек $\boldsymbol{\beta}$ не более чем конечно, мы можем выбрать из них максимальный набор $\boldsymbol{\beta}_1, ..., \boldsymbol{\beta}_t$ таким образом, чтобы параллелепипеды $\Pi\left(\boldsymbol{\beta}_j, 1\right)$ $(1 \le j \le t)$ не пересекались. Согласно (36), для каждого $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in B_3$ найдется тройка $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ такая, что $\mathbf{x} \in \Pi\left(\boldsymbol{\beta}, 3b_1(n)\delta_0^{-1}(\boldsymbol{\omega})\right)$. Если $\boldsymbol{\beta} \ne \boldsymbol{\beta}_j$ $(1 \le j \le t)$, то найдется такое $\boldsymbol{\beta}_j$, что $\Pi(\boldsymbol{\beta}, 1) \cap \Pi(\boldsymbol{\beta}_j, 1) \ne \varnothing$, откуда получаем $\mathbf{x} \in \Pi\left(\boldsymbol{\beta}_j, 3b_1(n)\delta_0^{-1}(\boldsymbol{\omega}) + 2\right)$. Следовательно,

$$B_3 \subset \bigcup_{1 \le j \le t} \Pi\left(\boldsymbol{\beta}_j, 3b_1(n)\delta_0^{-1}(\boldsymbol{\omega}) + 2\right),$$

из чего получаем оценку снизу для t:

$$t \ge \frac{\mu(B_3)}{\mu\left(\Pi\left(\boldsymbol{\beta}_j, 3b_1(n)\delta_0^{-1}(\boldsymbol{\omega}) + 2\right)\right)} \ge \frac{2^{-1}(1-\varepsilon_4)^3 \mu(I)}{\mu\left(\Pi(\boldsymbol{\beta}_j, 1)\right)\left(3b_1(n)\delta_0^{-1}(\boldsymbol{\omega}) + 2\right)^3} = C_1 \frac{\mu(I)}{\mu\left(\Pi\left(\boldsymbol{\beta}_j, 1\right)\right)},$$

где $C_1 = C_1(\boldsymbol{\omega}) = 2^{-1}(1-\varepsilon_4)^3\left(3b_1(n)\delta_0^{-1}(\boldsymbol{\omega}) + 2\right)^{-3}$. Также очевидно, что при $Q > Q_4(I', \boldsymbol{\omega})$ выполняется $\Pi\left(\boldsymbol{\beta}_j, 1\right) \subset I$. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 1.

Зафиксируем некоторый параллелепипед $I = I_1 \times I_2 \times I_3 \subset T_0 = \left(-2^{-1};2^{-1}\right)^3$. Пусть $\Psi_0(H) = \min\left(2^{-1}H^{-1}, \Psi(H)\right)$, тогда $\sum_{H=1}^{\infty}\Psi_0(H)=\infty$ согласно лемме 5. Далее пусть $\Phi(H) = H\Psi_0(H)$, тогда, согласно лемме 6,

$$\Phi(H) \le 2^{-1}, \tag{37}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Phi\left(2^k\right)=\infty\ . \tag{38}$$

Пусть $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in T_0$ – тройка сопряженных действительных алгебраических чисел степени ровно n. Это значит, что найдется такой неприводимый и примитивный полином $P \in \mathbb{Z}[x]$, что $P(\beta_i)=0$. Рассмотрим параллелепипед

$$\sigma(\boldsymbol{\beta}) = \left\{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : |x_i - \beta_i| < c_{17}(n) H(\boldsymbol{\beta})^{-v_i-1}\Psi_0^{\lambda_i}\left(H(\boldsymbol{\beta})\right)\right\},$$

где $H(\boldsymbol{\beta}) = H(P)$. Докажем, что при $c_{17}(n) = \left(n^2 n!\right)^{-1}$ из $\mathbf{x} \in \sigma(\boldsymbol{\beta})$ следует (1), для чего разложим P в ряд Тейлора в окрестности β_i и используем оценку $\left|P^{(k)}(\beta_i)\right| < \dfrac{n!n}{(n-i)!}H(P)$:

$$\left|P(x_i)\right| \le \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left|P^{(k)}(\beta_i)\right|\left|x_i-\beta_i\right|^k \le \sum_{k=1}^{n} c_{17}(n)\frac{1}{k!}\frac{n!n}{(n-i)!}H(P)^{-v_i}\Psi_0^{\lambda_i}\left(H(P)\right) \le$$
$$\le H(P)^{-v_i}\Psi_0^{\lambda_i}\left(H(P)\right) \le H(P)^{-v_i}\Psi^{\lambda_i}\left(H(P)\right).$$

Таким образом, если $\mathbf{x} \in T_0$ принадлежит бесконечному числу $\sigma(\boldsymbol{\beta})$, то $\mathbf{x} \in \mathcal{L}_{\mathbf{v},\boldsymbol{\lambda}}$.

Пусть $\omega_i = v_i + 1 + \lambda_i$, $(i = 1,2,3)$. Согласно теореме 2, найдутся $C_1 = C_1(\boldsymbol{\omega}) > 0$ и $k = k_0(\boldsymbol{\omega}, I)$ такие, что для любого $k \ge k_0$ найдется множество $A_k(I)$, состоящее из троек $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1,\beta_2,\beta_3) \in I$ сопряженных действительных алгебраических чисел степени ровно n, для которого справедливо

$$C_1 2^{k(n+1)}\mu(I) \le \# A_k(I) \le 2^{k(n+1)}\mu(I), \tag{39}$$

$$H(\boldsymbol{\beta}) \le 2^k \ \left(\forall \boldsymbol{\beta} \in A_k(I)\right), \tag{40}$$

и для параллелепипедов

$$\Pi_k(\boldsymbol{\beta}) = \left\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 :\ \ |x_i - \beta_i| < 2^{-k\omega_i}\right\} \tag{41}$$

выполняются свойства

$$\Pi_k(\boldsymbol{\beta}) \subset I \ \left(\forall \boldsymbol{\beta} \in A_k(I)\right), \tag{42}$$

$$\Pi_k(\boldsymbol{\beta}_1) \cap \Pi_k(\boldsymbol{\beta}_2) = \varnothing \ \left(\forall \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2 \in A_k(I)\right). \tag{43}$$

Для всех $\boldsymbol{\beta} \in A_k(I)$ определим параллелепипеды

$$E_k(\boldsymbol{\beta}) = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : |x_i - \beta_i| < 2^{-1}c_{17}(n)2^{-k(v_i+1)}\Psi_0^{\lambda_i}\left(2^k\right) = 2^{-1}c_{17}(n)2^{-k\omega_i}\Phi^{\lambda_i}\left(2^k\right)\right\},$$

мера каждого из которых, очевидно,

$$\mu\left(E_k(\boldsymbol{\beta})\right) = c_{17}^3(n)2^{-k(n+1)}\Phi\left(2^k\right).$$

Из (37) и $c_{17}(n) < 1$ вытекает $E_k(\boldsymbol{\beta}) \subset \Pi_k(\boldsymbol{\beta})$, откуда следует $E_k(\boldsymbol{\beta}_1) \subset I$ и $E_k(\boldsymbol{\beta}_1) \cap E_k(\boldsymbol{\beta}_2) = \varnothing$ $\left(\forall \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2 \in A_k(I)\right)$. Определим

$$E_k = \bigcup_{\boldsymbol{\beta} \in A_k(I)} E_k(\boldsymbol{\beta}),\ \ E(I) = \bigcap_{N=k_0}^{\infty}\bigcup_{k=N}^{\infty}E_k\,.$$

Так как $E_k \subset I$, $E_k(\boldsymbol{\beta}) \subset \sigma(\boldsymbol{\beta})$, и так как фиксированный $\mathbf{x} \in T_0$ может принадлежать лишь конечному числу $E_k(\boldsymbol{\beta})$ для фиксированного $\boldsymbol{\beta}$, очевидно, что множество точек, попадающих в бесконечное число множеств E_k, $E(I) \subset \mathcal{L}_{\mathbf{v},\boldsymbol{\lambda}}$.

Оценим снизу меру $E(I)$, используя лемму 7. Из (39) получаем

$$C_1 c_{17}^3(n)\Phi\left(2^k\right)\mu(I) \le \mu(E_k) \le c_{17}^3(n)\Phi\left(2^k\right)\mu(I),$$

откуда

$$C_1 c_{17}^3(n)\mu(I)\sum_{k=k_0}^{N}\Phi\left(2^k\right) \le \sum_{k=k_0}^{N}\mu(E_k), \tag{44}$$

из чего вместе с (38) получаем $\sum_{k=k_0}^{\infty}\mu(E_k) = \infty$.

Из (38) следует, что существует такое N_0, что при $N > N_0$

$$\sum_{k=k_0}^{N}\Phi\left(2^k\right) > 1. \tag{45}$$

В дальнейшем будет рассматривать только $N > N_0$. Зафиксируем некоторые $k_0 \le k < l \le N$ и оценим сверху $\sum_{k_0 \le k < l \le N}\mu(E_k \cap E_l)$. Для любого $E_k(\boldsymbol{\beta}_1)\left(\boldsymbol{\beta}_1 \in A_k(I)\right)$ количество $E_l(\boldsymbol{\beta}_2)\left(\boldsymbol{\beta}_2 \in A_l(I)\right)$, имеющих с $E_k(\boldsymbol{\beta}_1)$ непустое пересечение, не более

$$\#\left\{E_l(\boldsymbol{\beta}_2) : E_k(\boldsymbol{\beta}_1) \cap E_l(\boldsymbol{\beta}_2) \ne \varnothing\right\} \le \prod_{i=1}^{3}\left(2 + \frac{c_{17}(n)2^{-k\omega_i}\Phi^{\lambda_i}\left(2^k\right)}{2^{-l\omega_i}}\right),$$

откуда

$$\begin{aligned}\mu\left(E_k(\boldsymbol{\beta}_1) \cap E_l\right) &\le \#\left\{E_l(\boldsymbol{\beta}_2) : E_k(\boldsymbol{\beta}_1) \cap E_l(\boldsymbol{\beta}_2) \ne \varnothing\right\}\mu\left(E_l(\boldsymbol{\beta}_2)\right) \le \\ &\le \prod_{i=1}^{3}\left(2 + \frac{c_{17}(n)2^{-k\omega_i}\Phi^{\lambda_i}\left(2^k\right)}{2^{-l\omega_i}}\right)\left(c_{17}(n)2^{-l\omega_i}\Phi^{\lambda_i}\left(2^l\right)\right) \le \\ &\le c_{17}{}^3(n)\Phi\left(2^l\right)\prod_{i=1}^{3}\left(2 \cdot 2^{-l\omega_i} + c_{17}(n)2^{-k\omega_i}\Phi^{\lambda_i}\left(2^k\right)\right),\end{aligned}$$

следовательно,

$$\begin{aligned}\mu(E_k \cap E_l) \le \#A_k(I)\mu\left(E_k(\boldsymbol{\beta}_1) \cap E_l\right) &\le \left(\mu(I)\prod_{i=1}^{3}2^{k\omega_i}\right)\mu\left(E_k(\boldsymbol{\beta}_1) \cap E_l\right) \le \\ &\le c_{17}{}^3(n)\Phi\left(2^l\right)\mu(I)\prod_{i=1}^{3}\left(2 \cdot 2^{(k-l)\omega_i} + c_{17}(n)\Phi^{\lambda_i}\left(2^k\right)\right),\end{aligned}$$

из чего следует

$$\sum_{k_0 \le k < l \le N}\mu(E_k \cap E_l) \le c_{17}{}^3(n)\mu(I)\sum_{k_0 \le k < l \le N}\Phi\left(2^l\right)\prod_{i=1}^{3}\left(2 \cdot 2^{(k-l)\omega_i} + c_{17}(n)\Phi^{\lambda_i}\left(2^k\right)\right).$$

Если раскрыть скобки в произведении в правой части, мы получим восемь сумм по индексам $k_0 \le k < l \le N$. Обозначим эти суммы S_j $(1 \le j \le 8)$. Первая сумма

$$\begin{aligned}S_1 = c_{17}{}^3(n)\mu(I)\sum_{k_0 \le k < l \le N}\Phi\left(2^l\right)\prod_{i=1}^{3}\left(c_{17}(n)\Phi^{\lambda_i}\left(2^k\right)\right) &= c_{17}{}^6(n)\mu(I)\sum_{k_0 \le k < l \le N}\Phi\left(2^k\right)\Phi\left(2^l\right) \le \\ &\le c_{17}{}^6(n)\mu(I)\left(\sum_{k=k_0}^{N}\Phi\left(2^k\right)\right)^2,\end{aligned}$$

где последнее неравенство следует из (45). Остальные суммы $S_j\ (2 \le j \le 8)$ имеют вид

$$S_j = c_{17}{}^3(n)\mu(I)\sum_{k_0 \le k < l \le N} \Phi\left(2^l\right)\left(2^{u_1}2^{(k-l)u_2}c_{17}{}^{u_3}(n)\Phi^{u_4}\left(2^k\right)\right),$$

где $1 \le u_1(j) \le 3,\ u_2(j, \boldsymbol{\omega}) > 0,\ 0 \le u_3(j) \le 2,\ 0 \le u_4(j, \boldsymbol{\lambda}) \le 1.$ Так как $0 < c_{17}(n) < 1$ и $0 < \Phi\left(2^k\right) < 1$, мы можем получить оценку $c_{17}{}^{u_3}(n)\Phi^{u_4}\left(2^k\right) < 1$, из которой следует

$$S_j \le c_{17}{}^3(n)\mu(I)\sum_{k_0 \le k < l \le N} 2^{u_1}2^{(k-l)u_2}\Phi\left(2^l\right) \le 2^3 c_{17}{}^3(n)\mu(I)\sum_{k_0 \le k < l \le N} 2^{(k-l)u_2}\Phi\left(2^l\right) \le$$
$$\le 2^3 c_{17}{}^3(n)\mu(I)\sum_{l=k_0+1}^{N}\Phi\left(2^l\right)\sum_{k=k_0}^{l-1}2^{(k-l)u_2} \le 2^3 c_{17}{}^3(n)\mu(I)\sum_{l=k_0+1}^{N}\Phi\left(2^l\right)\frac{1}{2^{u_2}-1} \le$$
$$\le c_{18}(\boldsymbol{\omega})\mu(I)\left(\sum_{k=k_0}^{N}\Phi\left(2^k\right)\right)^2.$$

Объединим полученные выше оценки

$$\sum_{k_0 \le k < l \le N}\mu\left(E_k \cap E_l\right) \le c_{19}(\boldsymbol{\omega})\mu(I)\left(\sum_{k=k_0}^{N}\Phi\left(2^k\right)\right)^2. \qquad (46)$$

При помощи (44), (46) и леммы 7 оценим снизу $\mu(E)$:

$$\mu(E) \ge \frac{\left(\sum_{i=1}^{N}\mu(E_i)\right)^2}{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\mu\left(E_i \cap E_j\right)} \ge \frac{\left(C_1 c_{17}^3(n)\mu(I)\right)^2\left(\sum\limits_{k=k_0}^{N}\Phi\left(2^k\right)\right)^2}{c_{19}(\boldsymbol{\omega})\mu(I)\left(\sum\limits_{k=k_0}^{N}\Phi\left(2^k\right)\right)^2} = \mu(I)\left(C_1 c_{17}^3(n)\right)^2 c_{19}{}^{-1}(\boldsymbol{\omega}).$$

Так как параллелепипед $I \subset T_0$ взят произвольно, из леммы 4 получим $\mu(E(I)) = \mu(T_0)$, откуда, очевидно, следует $\mu\left(\mathcal{L}_{\mathbf{v},\boldsymbol{\lambda}}\right) = \mu(T_0)$. Теорема 1 доказана.

Список использованной литературы

1. *Khintchine, A.* Continued Fractions / A. Khintchine. – Chicago: University of Chicago Press, 1964.

2. *Mahler, K.* Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus. Teil I / K. Mahler // J. Reine Angew. Math. – 1932. – Vol. 166. – P. 118–150.

3. *Спринджук, В. Г.* Проблема Малера в метрической теории чисел / В. Г. Спринджук. – Минск: Наука и техника, 1967.

4. *Baker, A.* On a theorem of Sprindzuk / A. Baker // Proc. R. Soc. London, Ser. A. – 1966. – Vol. 292, iss. 1428. – P. 92–104.

5. *Берник, В. И.* О точном порядке приближения нуля значениями целочисленных многочленов / В. И. Берник // Acta Arith. – 1989. – Vol. 53. – P. 17–28.

6. *Beresnevich, V.* On approximation of real numbers by real algebraic numbers / V. Beresnevich // Acta Arith. – 1999. – Vol. 90, N 2. – P. 97–112.

7. *Bernik, V.* A divergent Khintchine theorem in the real, complex, and p-adic fields / V. Bernik, N. Budarina, D. Dickinson // Lith. Math. J. – 2008. – Vol. 48, N 2. – P. 158–173.

8. *Берник, В. И.* Распределение действительных алгебраических чисел произвольной степени в коротких интервалах / В. И. Берник, Ф. Гётце // Изв. РАН. Сер. мат. – 2015. – Т. 79, вып. 1. – С. 21–42.

9. *Берник, В. И.* Применение размерности Хаусдорфа в теории диофантовых приближений / В. И. Берник // Acta Arith. – 1983. – Vol. 42, N 3. – P. 219–253.

10. *Спринджук, В. Г.* Метрическая теория диофантовых приближений / В. Г. Спринджук. – М.: Наука, 1977.

11. *Берник, В. И.* Метрическая теорема о совместном приближении нуля значениями целочисленных многочленов / В. И. Берник // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1980. – Т. 44, вып. 1. – С. 24–45.

Поступила в редакцию 20.08.2015