КАРОТКІЯ ПАВЕДАМЛЕННІ

УДК 511.42

А. Г. ГУСАКОВА

НЕУЛУЧШАЕМОСТЬ ТЕОРЕМЫ ДИРИХЛЕ О ПРИБЛИЖЕНИИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ РАЦИОНАЛЬНЫМИ

Белорусский государственный университет

(Поступила в редакцию 30.03.2014)

Теория диофантовых приближений начинается с 1842 г. со следующей теоремы.

Теорема Дирихле [1]. *Пусть* α *и* $Q \geq 1$ *– действительные числа. Тогда существуют целые числа p, q, удовлетворяющие неравенствам*

$$\left|\alpha - p/q\right| < \frac{1}{qQ}, \ 1 \leq q \leq Q. \tag{1}$$

В работе доказано, что теорема Дирихле о приближении действительных чисел рациональными не допускает принципиального улучшения. Для этого используется теорема Гурвица и новый подход, основанный на метрической теории диофантовых приближений.

Будем искать такое $c_1 > 0$, что про любом $\varepsilon > 0$, некотором $Q > Q_0(\varepsilon)$ и $\alpha \in \mathbb{R}\backslash Q$ выполняется неравенство

$$\left|\alpha - p/q\right| > \frac{c_1 - \varepsilon}{qQ}. \tag{2}$$

Теорема. *Справедливы следующие утверждения:*

Предложение 1. *Если* $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, *то* $c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Предложение 2. *Существуют действительные числа* $\alpha \in [0,1)$, *для которых* $c_1 = \frac{\pi^2}{12}$.

Предложение 3. *В окрестности числа* $\frac{1}{2}$ *существуют действительные числа, для которых* $c_1 = 1$.

Доказательство предложения 1. Возьмем $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ и натуральное q, при котором верно неравенство

$$\left|\gamma_1 - p/q\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2},$$

где $\gamma_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Положим $Q = q$. Иррациональные числа $\gamma_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ и $\gamma_2 = \frac{-\sqrt{5}-1}{2}$ являются сопряженными корнями квадратного трехчлена $P_2(x) = x^2 + x - 1$. Так как $P_2(x) = (x-\gamma_1)(x-\gamma_2)$ и $P_2(x)$ не имеет рациональных корней, то для любого рационального числа p/q выполняются неравенства $P_2(p/q) \neq 0$ и $\left|q^2 P_2(p/q)\right| \geq 1$. Если $\left|\gamma_1 - p/q\right| > \varepsilon$, то неравенство (2) справедливо при любом $Q > Q_0(\varepsilon)$. Поэтому остается рассмотреть случай $\left|\gamma_1 - p/q\right| < \varepsilon$, в котором $\left|p/q\right| < \gamma_1 + \varepsilon$.

Заметим, что $\gamma_1 - \gamma_2 = \sqrt{D(P_2)} = \sqrt{5}$. Тогда из неравенств

$$1 \le q^2 \left|\gamma_1 - p/q\right|\left|\gamma_2 - p/q\right| < q^2 (\left|\gamma_2\right| + \gamma_1 + \varepsilon)\left|\gamma_1 - p/q\right| =$$

$$= q^2 (-\gamma_2 + \gamma_1 + \varepsilon)\left|\gamma_1 - p/q\right| = q^2 (\sqrt{5} + \varepsilon)\left|\gamma_1 - p/q\right|$$

следует

$$\left|\gamma_1 - p/q\right| > \frac{1}{q^2 (\sqrt{5} + \varepsilon)} = \frac{1}{qQ(\sqrt{5} + \varepsilon)} > \frac{1/\sqrt{5} - \varepsilon}{qQ}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о предложения 2. Для доказательства нам понадобятся две леммы.

Л е м м а 1 (преобразование Абеля). *Справедливо равенство*

$$\sum_{n=1}^{N} a_n b_n = \sum_{n=1}^{N-1} (b_n - b_{n+1}) A_n + b_N A_N, \tag{3}$$

где $A_n = a_1 + \ldots + a_n$.

Для доказательства леммы 1 достаточно раскрыть скобки в правой части равенства (3) и привести подобные члены.

Л е м м а 2. *Пусть* $\varphi(n)$ *– функция Эйлера натурального числа* n*. Тогда*

$$\sum_{n=1}^{N} \varphi(n) = \frac{3}{\pi^2} N^2 + o(N \ln N).$$

Лемма 2 доказана в [3].

Обозначим через $A(c_3, Q)$ множество точек интервала [0, 1), для которых при $0 \le p \le q$ выполняется неравенство

$$\left|x - p/q\right| < \frac{c_3}{qQ}, \; 1 \le q \le Q. \tag{4}$$

Если зафиксировать p и q, то подмножество $A(p, q) \in A(c_3, Q)$ представляет собой интервал с центром в точке p/q длины $\left|A(p,q)\right| = \dfrac{2c_3}{qQ}$. В случае, когда p и q имеют общий делитель α, очевидно, что $A(p,q) \subset A\left(\dfrac{p}{\alpha}, \dfrac{q}{\alpha}\right)$. Это означает, что множество $A(c_3, Q)$ останется неизменным, если в неравенстве (4) рассматривать p и q с условием $(p, q) = 1$.

Обозначим

$$A(q) = \bigcup_{\substack{1 \le p \le q \\ (p,q)=1}} A(p,q)$$

и оценим меру $A(q)$. Имеем

$$\mu A(q) \le \sum_{\substack{1 \le p \le q \\ (p,q)=1}} \mu A(p,q) = \frac{2c_3}{Q} \sum_{(p,q)=1} q^{-1} = \frac{2c_3}{Q} \frac{\varphi(q)}{q}, \tag{5}$$

где $\varphi(q)$ – функция Эйлера. Обозначим $T(Q) = \sum_{q=1}^{Q} \varphi(q) q^{-1}$, применим к сумме преобразование Абеля и проведем оценки, используя лемму 2:

$$T(Q) = \sum_{q=1}^{Q} \varphi(q) q^{-1} = \sum_{q=1}^{Q-1} \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{q+1}\right) \sum_{l=1}^{q} \varphi(l) + Q^{-1} \sum_{l=1}^{Q} \varphi(l) =$$

$$= \sum_{q=1}^{Q-1} \frac{1}{q(q+1)} \left(\frac{3}{\pi^2} q^2 + o(q \ln q)\right) + Q^{-1} \left(\frac{3}{\pi^2} Q^2 + o(Q \ln Q)\right) \le$$

$$\le \sum_{q=1}^{Q-1} \frac{3}{\pi^2} \left(1 - \frac{1}{q+1}\right) + \frac{3}{\pi^2} Q + o(\ln^2 Q) \le \frac{6}{\pi^2} Q + o(\ln^2 Q). \tag{6}$$

С учетом (5) и (6) получим

$$\mu A(c_3,Q)\le\sum_{q=1}^{Q}\mu A(q)\le\frac{12c_3}{\pi^2}+o\left(\frac{\ln^2 Q}{Q}\right)=\frac{12c_3}{\pi^2}+\varepsilon_2$$

для любого ε_2 и $Q > Q_0(\varepsilon_2)$.

Сейчас выберем c_3 таким, чтобы выполнялось неравенство $\frac{12c_3}{\pi^2}+\varepsilon_2<1$. Получаем оценку $c_3<\frac{(1-\varepsilon_2)\pi^2}{12}$. Для таких c_3 мера множества $[0, 1)\backslash A(c_3, Q)$ положительна. Это означает, что существуют точки $\alpha\in[0,1)$, для которых при $c_1=\frac{\pi^2}{12}$ выполняется неравенство (2).

Доказательство предложения 3. Докажем сейчас, что при любом $\varepsilon_3 > 0$ и достаточно большом $Q > Q_0(\varepsilon_3)$ всегда найдется точка $\alpha=1/2+\delta$ такая, что неравенство

$$|\alpha-p/q|>\frac{1-\varepsilon_3}{qQ} \tag{7}$$

выполняется для всех $(p, q) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}$, $1\le q\le Q$. При $\delta=\frac{1-\varepsilon_4}{2Q}$ верно неравенство

$$|\alpha-1/2|=\frac{1-\varepsilon_4}{2Q}>\frac{1-\varepsilon_3}{2Q}$$

для $\varepsilon_4=\varepsilon_3/2$ и (7) выполняется. Возьмем произвольное рациональное число $p/q\ne 1/2$, $1\le q\le Q$. Тогда имеем неравенство

$$0\ne\left|\frac{1}{2}-p/q\right|=\left|\frac{q-2p}{2p}\right|\ge\frac{1}{2q}. \tag{8}$$

Для $p/q>\frac{1}{2}$ пусть выполняется неравенство

$$|\alpha-p/q|<\frac{1-\varepsilon_3}{qQ}. \tag{9}$$

Тогда из (8) и

$$|\alpha-p/q|=\left|\frac{1}{2}+\frac{1-\varepsilon_4}{2Q}-\frac{p}{q}\right|\ge\frac{1}{2q}-\frac{1-\varepsilon_4}{2Q}$$

получим неравенство

$$\frac{1}{2q}-\frac{1-\varepsilon_4}{2Q}<\frac{1-\varepsilon_3}{qQ},$$

откуда

$$\frac{1-\varepsilon_3}{Q}+\frac{1-\varepsilon_4}{2}\frac{q}{Q}>\frac{1}{2};$$

$$1-(1-\varepsilon_4)<\frac{2(1-\varepsilon_3)}{Q}.$$

Поэтому $Q<\frac{2(1-\varepsilon_3)}{\varepsilon_4}$. Если $Q>Q_0(\varepsilon_3)=\frac{2(1-\varepsilon_3)}{\varepsilon_4}$, то неравенство (9) противоречиво. Таким образом, $c_1=1$.

Литература

1. *Dirichlet L. G. P.* Verallgemeinerung eines Satzes aus der Lehre von den Kettenbruchen nebst einigen Anwendungen auf die Theorie der Zahlen. S.-B. Preus. Akad. Wiss., 1842. P. 93–95.
2. *Bernik V. I., Dodson M. M.* Metric Diophantine approximation on manifolds. Cambridge Tracts in Mathematics, CUP, 1999. Vol. 137.
3. *Schmidt W. M.* Diophantine Approximation (Lecture Notes in Mathematics). Berlin, 1980.

A. G. GUSAKOVA

ABOUT UNIMPROVABLE OF DIRICHLET'S THEOREM ON THE APPROXIMATION OF REAL NUMBERS BY RATIONAL

Summary

It is proved that the Dirichlet's theorem on the approximation of real numbers by rational can not be improved.