ФІЗІКА

УДК 539.12:530.145

В. А. ПЛЕТЮХОВ

ОБЪЕДИНЕННОЕ ПОЛЕ МАКСВЕЛЛА – КАЛЬБА – РАМОНДА И ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СТРУН

Брестский государственный университет им. А. С. Пушкина, Брест, Беларусь,
e-mail: pletyukhov@yandex.by

Даны тензорная и матричная формулировки релятивистского волнового уравнения, обеспечивающего совместное описание электромагнитного поля и безмассового поля Кальба – Рамонда с нулевой спиральностью. Показано, что данное уравнение является частным случаем системы уравнений Дирака – Кэлера. Этот результат открывает новые возможности применения поля Дирака – Кэлера в теории струн.

Ключевые слова: электромагнитное поле, поле Кальба – Рамонда, нотоф, релятивистские волновые уравнения, струны.

V. A. PLETYUKHOV

UNITED MAXWELL – KALB – RAMOND FIELD AND THE INTERACTION OF STRINGS

Brest State University named after A. S. Pushkin, Brest, Belarus, e-mail:pletyukhov@yandex.by

Tensor and matrix formulations of the relativistic wave equation providing a description both of an electromagnetic field and a massless Kalb – Ramond field with the zero helicity are given. It is shown that this equation is a particular case of the Dirac – Kähler system. It opens new possibilities for applications of the Dirac – Kähler field in the string theory.

Keywords: electromagnetic field, Kalb – Ramond field, relativistic wave equations, strings.

Уравнение Дирака – Кэлера и его безмассовые пределы исследуются давно и с разных позиций (см., напр., [1; 2]). Физическая интерпретация последних существенно зависит от трактовки входящих в них полевых величин.

Рассмотрим, например, безмассовый предел уравнения Дирака – Кэлера вида

$$\partial_\mu \psi_\mu = 0, \tag{1}$$

$$\partial_\mu \psi_{[\nu\alpha\beta]} - \partial_\beta \psi_{[\mu\nu\alpha]} + \partial_\alpha \psi_{[\beta\mu\nu]} - \partial_\nu \psi_{[\alpha\beta\mu]} = 0, \tag{2}$$

$$\partial_\nu \psi_{[\mu\nu]} + \partial_\mu \psi_0 + \psi_\mu = 0, \tag{3}$$

$$\partial_\mu \psi_{[\nu\alpha]} + \partial_\alpha \psi_{[\mu\nu]} + \partial_\nu \psi_{[\alpha\mu]} + \partial_\beta \psi_{[\beta\mu\nu\alpha]} + \psi_{[\mu\nu\alpha]} = 0, \tag{4}$$

$$-\partial_\mu \psi_\nu + \partial_\nu \psi_\mu + \partial_\alpha \psi_{[\mu\nu\alpha]} = 0, \tag{5}$$

где ψ_0 – скаляр, ψ_μ – вектор, $\psi_{[\mu\nu]}$, $\psi_{[\mu\nu\alpha]}$, $\psi_{[\mu\nu\alpha\beta]}$ – полностью антисимметричные тензоры второго, третьего и четвертого ранга. Как показано в работе [3], если считать здесь величины ψ_0, $\psi_{[\mu\nu]}$, $\psi_{[\mu\nu\alpha\beta]}$ потенциалами, а ψ_μ, $\psi_{[\mu\nu\alpha]}$ – напряженностями, система (1)–(5) дает совместное описание поля Кальба – Рамонда [4] (нотофа Огиевецкого – Полубаринова [5]) и безмассового скалярного поля с удвоенным набором состояний, вырожденных по некоторому дополнительному квантовому числу.

Иная картина получается, если считать функции ψ_μ и $\psi_{[\mu\nu]}$ потенциалами, а $\psi_{[\mu\nu\alpha]}$ – напряженностью. Разберем эту ситуацию подробно.

© Плетюхов В. А., 2015

Сначала установим статус скалярной функции ψ_0 при указанной трактовке. Нетрудно видеть, что система (1)–(5) и напряженность $\psi_{[\mu\nu\alpha]}$ инвариантны относительно преобразований

$$\psi_\mu \to \psi_\mu + \partial_\mu \lambda(x), \quad \psi_0 \to \psi_0 - \lambda(x), \tag{6}$$

где произвол в выборе функции $\lambda(x)$ ограничен условием

$$\Box \lambda(x) = 0. \tag{7}$$

Действуя на уравнение (3) оператором ∂_μ и учитывая (1), найдем, что функция ψ_0 удовлетворяет аналогичному (7) уравнению

$$\Box \psi_0 = 0. \tag{8}$$

Следовательно, скалярную функцию ψ_0 в системе (1)–(5) можно рассматривать как калибровочную, т. е., не уменьшая общности, положить $\psi_0 = 0$. При этом из системы (1)–(5) автоматически выпадет уравнение (1), которое становится следствием уравнения (3).

Рассуждая подобным образом, можно придать смысл калибровочной также псевдоскалярной функции $\psi_{[\mu\nu\alpha\beta]}$. В результате, полагая $\psi_{[\mu\nu\alpha\beta]} = 0$ и исключая уравнение (2), которое становится следствием уравнения (4), получим систему

$$\partial_\nu \psi_{[\mu\nu]} + \psi_\mu = 0, \tag{9}$$

$$\partial_\mu \psi_{[\nu\alpha]} + \partial_\alpha \psi_{[\mu\nu]} + \partial_\nu \psi_{[\alpha\mu]} + \psi_{[\mu\nu\alpha]} = 0, \tag{10}$$

$$-\partial_\mu \psi_\nu + \partial_\nu \psi_\mu + \partial_\alpha \psi_{[\mu\nu\alpha]} = 0. \tag{11}$$

Уравнение (9) устанавливает связь между потенциалами; (10) является определением напряженности $\psi_{[\mu\nu\alpha]}$ через тензор-потенциал $\psi_{[\mu\nu]}$. Вводя обозначение

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu \psi_\nu - \partial_\nu \psi_\mu, \tag{12}$$

где $F_{\mu\nu}$ интерпретируется в качестве напряженности «чистого» векторного поля с потенциалом ψ_μ, уравнение (11) можно переписать в виде

$$-F_{[\mu\nu]} + \partial_\alpha \psi_{[\mu\nu\alpha]} = 0 \tag{13}$$

и идентифицировать его как уравнение движения в системе (9)–(11).

Важно отметить, что система (9)–(11) не распадается относительно преобразований группы Лоренца.

Анализ физического содержания системы (9)–(11) начнем с рассмотрения ее частных случаев (пределов). Так, если положить $\psi_\mu = 0$, из (9)–(11) получаем систему

$$\partial_\mu \psi_{[\nu\alpha]} + \partial_\alpha \psi_{[\mu\nu]} + \partial_\nu \psi_{[\alpha\mu]} + \psi_{[\mu\nu\alpha]} = 0, \tag{14}$$

$$\partial_\alpha \psi_{[\mu\nu\alpha]} = 0. \tag{15}$$

Уравнение $\partial_\nu \psi_{[\mu\nu]} = 0$, вытекающее из (9) при $\psi_\mu = 0$, приобретает статус дополнительного условия, связанного с инвариантностью системы (14), (15) относительно калибровочных преобразований

$$\psi_{[\mu\nu]} \to \psi_{[\mu\nu]} - \partial_\mu \Lambda_\nu + \partial_\nu \Lambda_\mu, \tag{16}$$

и поэтому может не включаться в систему (14), (15) в качестве независимого уравнения.

Система (14), (15) описывает вышеупомянутое поле Кальба – Рамонда [4], которое, в свою очередь, является модификацией предложенного еще в 1966 г. В. И. Огиевецким и И. И. Полубариновым теории нотофа – безмассовой частицы со спиральностью 0, но переносящей во взаимодействиях, как и фотон, спин 1 [5].

В другом частном случае, когда $\psi_{[\mu\nu]} = 0$, из системы (9)–(11) остается уравнение (11), которое с учетом обозначения (12) принимает вид (13). Применяя к (13) оператор ∂_μ, получим

$$\partial_\nu F_{[\mu\nu]} = 0. \tag{17}$$

Соотношения (12), (17), рассматриваемые как система независимых уравнений, представляют собой хорошо известную десятимерную формулировку уравнений свободного электромагнитного поля.

Таким образом, естественно предположить, что система (9)–(11) описывает некоторое объединенное поле Максвелла – Кальба – Рамонда с возможными значениями спиральности $0, \pm 1$. С точки зрения подхода теории релятивистских волновых уравнений (РВУ) [6] нераспадение системы (9)–(11) по группе Лоренца означает, что здесь речь идет о едином физическом объекте, в том же смысле, например, как мы трактуем электромагнитное поле по отношению к электрической и магнитной компонентам.

С целью строгого и однозначного подтверждения этого предположения рассмотрим эквивалентные системе (9)–(11) уравнения второго порядка

$$\Box \psi_\mu = 0, \tag{18}$$

$$\Box \psi_{[\mu\nu]} = 0, \tag{19}$$

для которых уравнение (9) и вытекающее из него соотношение

$$\partial_\mu \psi_\mu = 0 \tag{20}$$

играют роль дополнительных условий.

Решения уравнений (18), (19) представим в виде суперпозиции плоских волн:

$$\psi_\mu(x) = \sum_k N_k \left(C_{\mu k} e^{ikx} + C^+_{\mu k} e^{-ikx} \right), \tag{21}$$

$$\psi_{[\mu\nu]}(x) = \sum_k \frac{N_k}{i\omega} \left(C_{[\mu\nu]k} e^{ikx} + C^+_{[\mu\nu]k} e^{-ikx} \right), \tag{22}$$

где множитель $\frac{1}{i\omega}$ введен в (22) для того, чтобы амплитуды разложений (21), (22) имели одинаковую размерность.

Разложим амплитуды $C_{\mu k}$, $C^+_{\mu k}$, $C_{[\mu\nu]k}$, $C^+_{[\mu\nu]k}$ по неортогональному базису $e^{(1)}_\mu$, $e^{(2)}_\mu$, k_μ, n_μ со свойствами [5]:

$$\begin{aligned} &e^{(i)}_\mu e^{(j)}_\mu = \delta_{ij}, \quad e^{(i)}_\mu k_\mu = e^{(i)}_\mu n_\mu = 0, \\ &k^2_\mu = 0, \quad n^2_\mu = -1, \quad k_\mu n_\mu = -\omega. \end{aligned} \tag{23}$$

Будем иметь

$$C_{\mu k} = \sum_{i=1}^{2} c_{ki} e^{(i)}_\mu + c_{k3} k_\mu + c_{k4} n_\mu, \tag{24}$$

$$C^+_{\mu k} = \sum_{i=1}^{2} c^+_{ki} e^{(i)}_\mu + c^+_{k3} k_\mu + c^+_{k4} n_\mu, \tag{25}$$

$$C_{[\mu\nu]k} = a_k \left(e^{(1)}_\mu e^{(2)}_\nu - e^{(1)}_\nu e^{(2)}_\mu \right) + \sum_{i=1}^{2} b_{ki} \left(e^{(i)}_\mu k_\nu - e^{(i)}_\nu k_\mu \right) + \sum_{i=1}^{2} d_{ki} \left(e^{(i)}_\mu n_\nu - e^{(i)}_\nu n_\mu \right) + f_k \left(k_\mu n_\nu - k_\nu n_\mu \right), \tag{26}$$

$$C^+_{[\mu\nu]k} = a^+_k \left(e^{(1)}_\mu e^{(2)}_\nu - e^{(1)}_\nu e^{(2)}_\mu \right) + \sum_{i=1}^{2} b^+_{ki} \left(e^{(i)}_\mu k_\nu - e^{(i)}_\nu k_\mu \right) + \sum_{i=1}^{2} d^+_{ki} \left(e^{(i)}_\mu n_\nu - e^{(i)}_\nu n_\mu \right) + f^+_k \left(k_\mu n_\nu - k_\nu n_\mu \right). \tag{27}$$

Подставляя разложения (21), (22), (24)–(27) в дополнительные условия (9), (20), получим соотношения

$$c_{k4} = c^+_{k4} = 0, \quad d_{ki} = c_{ki}, \quad d^+_{ki} = -c^+_{ki}, \quad f_k = c_{k3}, \quad f^+_k = -c^+_{k3}. \tag{28}$$

Кроме того, уравнения (9), (19) инвариантны относительно калибровочных преобразований (16), где калибровочная вектор-функция $\Lambda_\mu(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\Box\Lambda_\mu(x) - \partial_\mu\partial_\nu\Lambda_\nu(x) = 0. \tag{29}$$

Решение уравнения (29) носит характер суперпозиции плоских волн

$$\Lambda_\mu(x) = \sum_k \mathrm{M}_k\left(\Lambda_{\mu k}e^{ikx} + \Lambda^+_{\mu k}e^{-ikx}\right), \tag{30}$$

но при этом в разложениях амплитуд

$$\Lambda_{\mu k} = \sum_{i=1}^{2}\lambda_{ki}e^{(i)}_\mu + \lambda_{k3}k_\mu, \tag{31}$$

$$\Lambda^+_{\mu k} = \sum_{i=1}^{2}\lambda^+_{ki}e^{(i)}_\mu + \lambda^+_{k3}k_\mu \tag{32}$$

отсутствуют слагаемые с n_μ вследствие наличия члена $\partial_\mu\partial_\nu\Lambda_\nu(x)$ в уравнении (29).

Подстановка разложений (30)–(32) в калибровочные преобразования (16) приводит к соответствующим преобразованиям для амплитуд

$$C_{[\mu\nu]k} \to C_{[\mu\nu]k} + i\sum_{i=1}^{2}\lambda_{ki}\left(e^{(i)}_\mu k_\nu - e^{(i)}_\nu k_\mu\right), \tag{33}$$

$$C^+_{[\mu\nu]k} \to C^+_{[\mu\nu]k} + i\sum_{i=1}^{2}\lambda^+_{ki}\left(e^{(i)}_\mu k_\nu - e^{(i)}_\nu k_\mu\right), \tag{34}$$

которые указывают на несущественный характер слагаемых, содержащих коэффициенты b_{ki}, b^+_{ki} в выражениях (26), (27). Вследствие этого можно положить

$$b_{ki} = b^+_{ki} = 0. \tag{35}$$

С учетом равенств (28), (35) разложения (24)–(27) принимают вид

$$C_{\mu k} = \sum_{i=1}^{2}c_{ki}e^{(i)}_\mu + c_{k3}k_\mu, \tag{36}$$

$$C^+_{\mu k} = \sum_{i=1}^{2}c^+_{ki}e^{(i)}_\mu + c^+_{k3}k_\mu, \tag{37}$$

$$C_{[\mu\nu]k} = a_k\left(e^{(1)}_\mu e^{(2)}_\nu - e^{(1)}_\nu e^{(2)}_\mu\right) + \sum_{i=1}^{2}c_{ki}\left(e^{(i)}_\mu n_\nu - e^{(i)}_\nu n_\mu\right) + c_{k3}\left(k_\mu n_\nu - k_\nu n_\mu\right), \tag{38}$$

$$C^+_{[\mu\nu]k} = a^+_k\left(e^{(1)}_\mu e^{(2)}_\nu - e^{(1)}_\nu e^{(2)}_\mu\right) - \sum_{i=1}^{2}c^+_{ki}\left(e^{(i)}_\mu n_\nu - e^{(i)}_\nu n_\mu\right) - c^+_{k3}\left(k_\mu n_\nu - k_\nu n_\mu\right). \tag{39}$$

Для устранения нефизических компонент, которые все еще содержатся в выражениях (35)–(39), перепишем последние, перейдя в обычный ортонормированный базис:

$$e^{(\alpha)}_\mu = \delta_{\mu\alpha}, \quad e^{(\alpha)}_\mu e^{(\alpha')}_\mu = \delta_{\alpha\alpha'}, \quad e^{(\alpha)}_\mu e^{(\alpha)}_\nu = \delta_{\mu\nu}, \tag{40}$$

первые два орта которого $(\alpha = 1,2)$ совпадают с ортами $e^{(i)}_\mu$ базиса (23) и соответствуют поперечным составляющим поля $\psi_\mu(x)$, третий $(\lambda = 3)$ и четвертый $(\lambda = 4)$ – продольной и скалярной составляющим этого поля.

В базисе (40) векторы k_μ и n_μ имеют вид

$$k_\mu = (0,0,\omega,i\omega), \quad n_\mu = (0,0,0,i). \tag{41}$$

Для амплитуд (36), (37) получаются выражения

$$C_{\mu k}=\sum_{i=1}^{2}c_{ki}e_{\mu}^{(i)}+\tilde{c}_{k3}e_{\mu}^{(3)}+i\tilde{c}_{k3}e_{\mu}^{(4)}, \quad (42)$$

$$C_{\mu k}^{+}=\sum_{i=1}^{2}c_{ki}^{+}e_{\mu}^{(i)}+\tilde{c}_{k3}^{+}e_{\mu}^{(3)}+i\tilde{c}_{k3}^{+}e_{\mu}^{(4)}, \quad (43)$$

где использованы обозначения

$$\tilde{c}_{k3}=\omega c_{k3}, \quad \tilde{c}_{k3}^{+}=\omega c_{k3}^{+}. \quad (44)$$

Если расписать (42), (43) по компонентам, будем иметь

$$\begin{aligned} &C_{1k}=c_{k1}e_1^{(1)}, \quad C_{2k}=c_{k2}e_2^{(2)}, \quad C_{3k}=\tilde{c}_{k3}e_3^{(3)}, \quad C_{4k}=i\tilde{c}_{k3}e_4^{(4)},\\ &C_{1k}^{+}=c_{k1}^{+}e_1^{(1)}, \quad C_{2k}^{+}=c_{k2}^{+}e_2^{(2)}, \quad C_{3k}^{+}=\tilde{c}_{k3}^{+}e_3^{(3)}, \quad C_{4k}^{+}=i\tilde{c}_{k3}^{+}e_4^{(4)}. \end{aligned} \quad (45)$$

Аналогично для амплитуд (38), (39) получаем

$$\begin{aligned} &C_{[12]k}=a_k e_1^{(1)}e_2^{(2)}, \quad C_{[23]k}=C_{[31]k}=0,\\ &C_{[14]k}=ic_{k1}e_1^{(1)}e_4^{(4)}, \quad C_{[24]k}=ic_{k2}e_2^{(2)}e_4^{(4)}, \quad C_{[34]k}=i\tilde{c}_{k3}e_3^{(3)}e_4^{(4)},\\ &C_{[12]k}^{+}=a_k^{+}e_1^{(1)}e_2^{(2)}, \quad C_{[23]k}^{+}=C_{[31]k}^{+}=0,\\ &C_{[14]k}^{+}=-ic_{k1}^{+}e_1^{(1)}e_4^{(4)}, \quad C_{[24]k}^{+}=-ic_{k2}^{+}e_2^{(2)}e_4^{(4)}, \quad C_{[34]k}^{+}=-i\tilde{c}_{k3}^{+}e_3^{(3)}e_4^{(4)}. \end{aligned} \quad (46)$$

Найдем выражение для энергии рассматриваемого поля. Лагранжиан, из которого получается система (9)–(11), может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} L=&-\frac{1}{2}\psi_{[\mu\nu]}\left(\partial_{\mu}\psi_{\nu}-\partial_{\nu}\psi_{\mu}\right)-\frac{1}{2}\psi_{\mu}^{2}-\frac{1}{6}\psi_{[\mu\nu\alpha]}\left(\partial_{\mu}\psi_{[\nu\alpha]}+\right.\\ &\left.+\partial_{\alpha}\psi_{[\mu\nu]}+\partial_{\nu}\psi_{[\alpha\mu]}\right)-\frac{1}{12}\psi_{[\mu\nu\alpha]}^{2}. \end{aligned} \quad (47)$$

Отсюда для плотности энергии имеем выражение

$$\begin{aligned} T_{44}=&-\psi_{[4\mu]}\partial_4\psi_{\mu}+\frac{1}{2}\left(\partial_4\psi_{[\mu\nu]}+\partial_{\nu}\psi_{[4\mu]}+\partial_{\mu}\psi_{[\nu4]}\right)\partial_4\psi_{[\mu\nu]}+\\ &+\frac{1}{2}\psi_{[\mu\nu]}\left(\partial_{\mu}\psi_{\nu}-\partial_{\nu}\psi_{\mu}\right)-\frac{1}{2}\psi_{\mu}\partial_{\nu}\psi_{[\mu\nu]}-\frac{1}{12}\left(\partial_{\mu}\psi_{[\nu\alpha]}+\partial_{\alpha}\psi_{[\mu\nu]}+\partial_{\nu}\psi_{[\alpha\mu]}\right)^2. \end{aligned} \quad (48)$$

С учетом легко проверяемых тождественных равенств

$$\frac{1}{2}\left(\partial_4\psi_{[\mu\nu]}+\partial_{\nu}\psi_{[4\mu]}+\partial_{\mu}\psi_{[\nu4]}\right)\partial_4\psi_{[\mu\nu]}=\left(\partial_4\psi_{[12]}\right)^2,$$

$$\frac{1}{2}\psi_{[\mu\nu]}\left(\partial_{\mu}\psi_{\nu}-\partial_{\nu}\psi_{\mu}\right)=\psi_{[4\nu]}\partial_4\psi_{\nu}+\psi_{[34]}\partial_3\psi_4,$$

$$\frac{1}{2}\psi_{\mu}\partial_{\nu}\psi_{[\mu\nu]}=\frac{1}{2}\left(\psi_{\mu}\partial_4\psi_{[\mu4]}-\psi_4\partial_3\psi_{[34]}\right),$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{12}\left(\partial_{\mu}\psi_{[\nu\alpha]}+\partial_{\alpha}\psi_{[\mu\nu]}+\partial_{\nu}\psi_{[\alpha\mu]}\right)^2=&\frac{1}{2}\left[\left(\partial_4\psi_{[12]}\right)^2+\left(\partial_3\psi_{[12]}\right)^2+\right.\\ &\left.+\left(\partial_3\psi_{[14]}\right)^2+\left(\partial_3\psi_{[24]}\right)^2\right] \end{aligned}$$

формула (48) преобразуется следующим образом:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{T}_{44} = &\left(\partial_4 \psi_{[12]}\right)^2 + \psi_{[34]} \partial_3 \psi_4 + \frac{1}{2} \psi_4 \partial_3 \psi_{[34]} - \frac{1}{2} \psi_\mu \partial_4 \psi_{[\mu\nu]} - \\
&- \frac{1}{2}\left[\left(\partial_4 \psi_{[12]}\right)^2 + \left(\partial_3 \psi_{[12]}\right)^2 + \left(\partial_3 \psi_{[14]}\right)^2 + \left(\partial_3 \psi_{[24]}\right)^2\right].
\end{aligned} \tag{49}
$$

Подставляя теперь разложения (21), (22) с амплитудами (45), (46) в выражение

$$
\mathrm{E} = \int \mathrm{T}_{44} \partial^3 x
$$

для энергии классического поля, получим

$$
\mathrm{E} = \frac{1}{2} \sum_k \omega \left[\sum_{i=1}^{2} \left(c_{ki} c_{ki}^{+} + c_{ki}^{+} c_{ki} \right) + \tilde{c}_{k3} \tilde{c}_{k3}^{+} + \tilde{c}_{k3}^{+} \tilde{c}_{k3} + a_k a_k^{+} + a_k^{+} a_k \right], \tag{50}
$$

где учтено, что $N_k = \dfrac{1}{\sqrt{\omega V}}$, V – нормировочный объем.

Переходя ко вторично квантованному полю, рассматриваем величины ψ, c_{ki}, c_{ki}^{+}, $\tilde{c}_{k3}$, $\tilde{c}_{k3}^{+}$, a_k, a_k^{+} как операторы, удовлетворяющие коммутационным соотношениям Бозе – Эйнштейна. Тогда для оператора энергии квантованного поля получим (с точностью до бесконечной константы, устраняемой обычным способом) выражение

$$
\mathrm{E} = \sum_k \omega \left(\sum_{i=1}^{2} \hat{c}_{ki}^{+} \hat{c}_{ki} + \hat{\tilde{c}}_{k3}^{+} \hat{\tilde{c}}_{k3} + \hat{a}_k^{+} \hat{a}_k \right). \tag{51}
$$

Соотношение (20) применительно к квантовому полю сформулируем в виде условия [7]

$$
\left(\partial_\mu \hat{\psi}_\mu \right)_{+} \Psi_{\text{физ}} = 0, \tag{52}
$$

накладываемого на волновую функцию $\Psi_{\text{физ}}$ в пространстве состояний. Индекс «+» здесь означает, что соответствующий оператор содержит только положительно-частотную часть. Поскольку производные $\partial_1 \hat{\psi}_1$, $\partial_2 \hat{\psi}_2$ равны нулю, условие (52) принимает вид

$$
\left(\partial_3 \hat{\psi}_3 + \partial_4 \hat{\psi}_4 \right)_{+} \Psi_{\text{физ}} = 0. \tag{53}
$$

Отсюда приходим к равенству

$$
\sum_k \omega \hat{\tilde{c}}_{k3} \Psi_{\text{физ}} = 0, \tag{54}
$$

которое означает, что функция $\Psi_{\text{физ}}$ при всех k должна удовлетворять условию

$$
\hat{\tilde{c}}_{k3} \Psi_{\text{физ}} = 0. \tag{55}
$$

Поступая далее в соответствии со стандартной процедурой, используемой для устранения продольных и скалярных колебаний при квантовании электромагнитного поля [8], получаем соотношение

$$
\left(\Psi_{\text{физ}}, \hat{\tilde{c}}_{k3}^{+} \hat{\tilde{c}}_{k3} \Psi_{\text{физ}} \right) = 0, \tag{56}
$$

вследствие которого исчезают средние значения оператора энергии, связанные с параметрами c_{k3}, c_{k3}^{+} в разложениях (36)–(39).

Таким образом, в вышеприведенных формулах слагаемые, содержащие эти параметры, являются нефизическими и их можно обнулить. Формулы (36)–(39), (50) принимают, следовательно, вид

$$
C_{\mu k} = \sum_{i=1}^{2} c_{ki} e_\mu^{(i)}, \quad C_{\mu k}^{+} = \sum_{i=1}^{2} c_{ki}^{+} e_\mu^{(i)}, \tag{57}
$$

$$C_{[\mu\nu]k} = a_k \left(e_\mu^{(1)} e_\nu^{(2)} - e_\nu^{(1)} e_\mu^{(2)} \right) + \sum_{i=1}^{2} c_{k\,i} \left(e_\mu^{(i)} n_\nu - e_\nu^{(i)} n_\mu \right), \tag{58}$$

$$C_{[\mu\nu]k}^{+} = a_k^{+} \left(e_\mu^{(1)} e_\nu^{(2)} - e_\nu^{(1)} e_\mu^{(2)} - \sum_{i=1}^{2} c_{k\,i}^{+} \left(e_\mu^{(i)} n_\nu - e_\nu^{(i)} n_\mu \right) \right); \tag{59}$$

$$\mathrm{E} = \sum_k \omega \left(\sum_{i=1}^{2} \hat{c}_{k\,i}^{+} \hat{c}_{k\,i} + \hat{a}_k^{+} \hat{a}_k \right). \tag{60}$$

Выражения (57)–(60) указывают на три физические степени свободы поля. Две из них ассоциируются с поперечными составляющими векторного поля ψ_μ (параметры c_{k1}, c_{k2}), третья относится к тензорной составляющей $\psi_{[12]}$ со спиральностью 0. Следует, однако, подчеркнуть, что это сопоставление носит достаточно условный характер, поскольку наличие второго слагаемого в разложениях (58), (59) означает, что все три указанные составляющие связаны между собой. Другими словами, речь идет о едином физическом объекте – безмассовом поле со спиральностями 0, ± 1, переносящем во взаимодействиях спин 1.

Представим систему (9)–(11) в стандартной для теории релятивистских волновых уравнений матричной форме

$$\left(\Gamma_\mu \partial_\mu + \Gamma_0 \right) \psi(x) = 0, \tag{61}$$

переписав ее предварительно следующим образом:

$$\partial_\nu \psi_{[\mu\nu]} + \psi_\mu = 0, \tag{62}$$

$$\frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\nu \psi_{[\alpha\beta]} + \tilde{\psi}_\mu = 0, \tag{63}$$

$$-\partial_\mu \psi_\nu + \partial_\nu \psi_\mu + \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\alpha \tilde{\psi}_\beta = 0. \tag{64}$$

Здесь

$$\tilde{\psi}_\mu = \frac{1}{3!} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \psi_{[\nu\alpha\beta]} \tag{65}$$

– аксиальный вектор, дуальный тензору $\psi_{[\nu\alpha\beta]}$; $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ – тензор Леви-Чивита $\left(\varepsilon_{1234} = -i \right)$.

В тензорном базисе

$$\psi = \left(\psi_\mu ,\ \tilde{\psi}_\mu ,\ \psi_{[\mu\nu]} \right) \tag{66}$$

матрицы Γ_μ, Γ_0 системы (62)–(64), записанной в форме (61), имеют вид

$$\Gamma_\mu = e^{\nu[\nu\mu]} + e^{[\nu\mu]\nu} + \frac{i}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \left(e^{\tilde{\nu}[\alpha\beta]} + e^{[\alpha\beta]\tilde{\nu}} \right), \tag{67}$$

$$\Gamma_0 = e^{\nu\nu} + e^{\tilde{\nu}\tilde{\nu}}. \tag{68}$$

Схема зацеплений неприводимых представлений группы Лоренца РВУ (61) с волновой функцией (66) и матрицами Γ_μ (67), Γ_0 (68) такова:

$$\begin{array}{ccccc} & & \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) & & \\ & \diagup & & \diagdown & \\ (0,1) & & & & (1,0) \\ & \diagdown & & \diagup & \\ & & \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)' & & \end{array}. \tag{69}$$

Представления $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)'$, $\left[(0,1) \oplus (1,0)\right]$ сопоставляются вектору ψ_μ, псевдовектору $\tilde{\psi}_\mu$ и антисимметричному тензору $\psi_{[\mu\nu]}$ соответственно.

Для установления спиновых характеристик микрообъекта, описываемого РВУ (61) со схемой зацеплений (69), удобно перейти в так называемый базис Гельфанда – Яглома (канонический по терминологии работы [6]). В этом базисе матрица Γ_4, играющая основную роль для РВУ (61), будет иметь вид

$$\Gamma_4 = C^0 \oplus \left(C^1 \otimes I_3\right), \tag{70}$$

где C^0, C^1 – спиновые блоки, отвечающие спинам 0 и 1 в том смысле, что если собственные значения блока C^s отличны от нуля, то частица обладает спином s.

Если ввести нумерацию неприводимых представлений, входящих в схему (69)

$$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \sim 1,\quad \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)' \sim 2,\quad (0,1) \sim 3,\quad (1,0) \sim 4,$$

для спиновых блоков C^0, C^1 получаются выражения

$$C^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\qquad C^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c^1_{13} & c^1_{14} \\ 0 & 0 & c^1_{23} & c^1_{24} \\ c^1_{31} & c^1_{32} & 0 & 0 \\ c^1_{41} & c^1_{42} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{71}$$

в которых ненулевые элементы c^s_{ij} соответствуют зацепляющимся представлениям τ_i, τ_j (см. (69)).

Налагая на элементы c^1_{ij} ограничения, вытекающие из требований инвариантности уравнения (61) относительно преобразований полной группы Лоренца и возможности его лагранжевой формулировки, придем к блоку C^1:

$$C^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{72}$$

Из вида спиновых блоков C^0, C^1 (71), (72) следует, что рассматриваемое РВУ описывает безмассовый микрообъект, переносящий во взаимодействиях спин 1. Однако, в отличие от фотона, возможные значения его проекции спина (спиральности) равны $0, \pm 1$. При этом ненулевое собственное значение $\lambda = \pm 1$ блока C^1 является двукратно вырожденным. Роль проективной матрицы Γ_0 сводится к исключению «лишних» степеней свободы, связанных с этим вырождением. В конечном счете остаются три степени свободы, соответствующие состояниям со спиральностями $0, \pm 1$. В десятимерной же формулировке уравнений Максвелла матрица Γ_0 «вырезает» состояние со спиральностью 0.

Еще раз подчеркнем, что РВУ (61), (69) с матрицами (67), (68) не распадается в смысле полной группы Лоренца и, следовательно, описывает единый физический объект.

Обсудим вопрос о возможных применениях безмассового поля Максвелла – Кальба – Рамонда. Как известно, в теории струн рассматриваются два типа струн – открытые и замкнутые. Взаимодействие замкнутых струн может осуществляться посредством безмассового поля с тензор-потенциалом $\psi_{[\mu\nu]}$ [4]. Концы открытых струн являются точечными электрическими зарядами и взаимодействуют посредством электромагнитного поля с вектор-потенциалом ψ_μ. Следовательно, переносчиком взаимодействия открытых струн в пространстве размерности $d = 4$ должно быть некоторое объединенное поле с потенциалами ψ_μ и $\psi_{[\mu\nu]}$.

Претендентом на роль такого поля может служить объединенное поле Максвелла – Кальба – Рамонда, т. е. система (9)–(11), в которую надо ввести источники. В случае открытых струн имеется два типа источников: векторный j_μ и тензорный $j_{[\mu\nu]}$ токи, создаваемые соответственно полюсами и телом струны (body string). Между ними имеет место очевидная связь

$$j_\nu \sim \partial_\mu j_{[\mu\nu]}. \tag{73}$$

Ток $j_{[\mu\nu]}$ вводится в уравнение движения (11); векторный ток в системе (9)–(11) явно не фигурирует. В результате получаем систему, в которой первые два уравнения совпадают с (9), (10), а уравнение движения имеет вид

$$-\partial_\mu \psi_\nu + \partial_\nu \psi_\mu + \partial_\alpha \psi_{[\mu\nu\alpha]} = j_{[\mu\nu]}. \tag{74}$$

Описание замкнутой струны содержится в системе (9), (10), (74), если положить $\psi_\mu = 0$. Тогда приходим к системе

$$\partial_\mu \psi_{[\nu\alpha]} + \partial_\alpha \psi_{[\mu\nu]} + \partial_\nu \psi_{[\alpha\mu]} + \psi_{[\mu\nu\alpha]} = 0, \tag{75}$$

$$\partial_\alpha \psi_{[\mu\nu\alpha]} = j_{[\mu\nu]}. \tag{76}$$

Уравнения, описывающие взаимодействие полюсов струн, получаются так же, как и в свободном случае, если выбрать $\psi_{[\mu\nu]} = 0$. При этом будем иметь

$$\partial_\nu F_{[\mu\nu]} = j_\mu ,$$

$$-\partial_\mu \psi_\nu + \partial_\nu \psi_\mu + F_{[\mu\nu]} = 0.$$

Уравнения второго порядка, эквивалентные системе (9), (10), (74), принимают вид

$$\Box \psi_\mu = -j_\mu,$$

$$\Box \psi_{[\mu\nu]} = -j_{[\mu\nu]}.$$

Есть основания полагать, что объединенное поле Максвелла – Кальба – Рамонда (фотона и нотофа) может найти применение и в иных теоретико-полевых моделях фундаментальных частиц и их взаимодействий.

Список использованной литературы

1. *Kähler, E.* Der innere differentialkalkul / E. Kähler // Rendiconti di Mat. (Roma). Ser. V. – 1962. – Vol. 21, N 3/4. – P. 425–523.
2. *Стражев, В. И.* Уравнение Дирака – Кэлера. Классическое поле / В. И. Стражев, И. А. Сатиков, Д. А. Ционенко. – Минск: БГУ, 2007.
3. *Плетюхов, В. А.* Безмассовые поля в теории Дирака – Кэлера / В. А. Плетюхов, В. И. Стражев, А. К. Момлик // Весн. Брэсц. ун-та. Сер. прыродазнаўчых навук. – 2009. – № 1. – С. 74–84.
4. *Kalb, M.* Classical direct interstring action / M. Kalb, P. Ramond // Phys. Rev. – 1974. – Vol. D9, N 8. – P. 2273–2284.
5. *Огиевецкий, В. И.* Нотоф и его возможные взаимодействия / В. И. Огиевецкий, И. И. Полубаринов // Ядерная физика. – 1966. – Т. 4, вып. 1. – С. 216–223.
6. *Гельфанд, И. М.* Общие релятивистски-инвариантные уравнения и бесконечномерные представления группы Лоренца / И. М. Гельфанд, А. М. Яглом // Журн. эксперим. и теорет. физики. – 1948. – Т. 18, вып. 8. – С. 703–733.
7. *Прохоров, Л. В.* Квантование электромагнитного поля / Л. В. Прохоров // Успехи физ. наук. – 1988. – Т. 154, вып. 2. – С. 299–320.
8. *Ахиезер, А. И.* Квантовая электродинамика / А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий. – М.: Наука, 1969.

Поступила в редакцию 08.07.2015