МАТЭМАТЫКА

УДК 512.817

А. Н. ТАРАКАНОВ

О ДИСКРЕТНЫХ ПОДГРУППАХ ГРУППЫ ЛОРЕНЦА, ГЕНЕРИРУЮЩИХ РЕШЕТКИ В ПРОСТРАНСТВЕ МИНКОВСКОГО

Институт информационных технологий Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники

(Поступила в редакцию 17.10.2014)

С физической точки зрения дискретные подгруппы группы Лоренца возникают при попытке построить теорию квантованного пространства-времени, которое обладало бы некоторой дискретной симметрией, переходящей в лоренцеву симметрию в континуальном пределе (см., напр., [1]). При таком дискретном преобразовании пространство-время, представляемое 1+3-мерной решеткой, должно переходить само в себя. Задача, таким образом, заключается в том, чтобы найти эти дискретные преобразования, которые, очевидно, должны принадлежать дискретным подгруппам группы Лоренца. Несмотря на многочисленные подходы к построению 1+3-мерных решеток, эта проблема до сих пор остается до конца нерешенной, хотя существует некоторое продвижение в этом направлении (см., напр., [2–6]). Отметим также работы [7, 8], в которых строятся некоторые дискретные подгруппы группы Лоренца исходя из гомоморфизма между $SO(1,3)$ и $SL(2,C)$. В частности, идея Дирака заключалась в том, чтобы скомбинировать дискретные подгруппы группы Лоренца с дискретными трансляциями таким образом, чтобы снова получалась исходная решетка. Дирак получил целые преобразования и, по-видимому, не заметил, что его методом можно получить также рациональные преобразования Лоренца, удовлетворяющие указанному условию. Кроме того, трехмерные вращения, порождаемые дискретными преобразованиями Лоренца, не ограничиваются трехмерными поворотами на 120 или 180°, порождаемыми целыми преобразованиями. В качестве физических приложений, неизвестных Дираку, можно указать работу [9], в которой применяется принцип инвариантности относительно таких подгрупп, действующих независимо на состояния частиц с различными импульсами, что позволяет определить все элементы S-матрицы.

Цель данной работы состоит в том, чтобы дать пример построения дискретных подгрупп группы Лоренца, порождающих решетки в пространстве Минковского, на основе выбранной параметризации, в качестве которой используется параметризация Ф. И. Федорова группы Лоренца с помощью комплексного вектор-параметра $\mathbf{q} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$ [10]. Приведем основные сведения.

Как известно, группа Лоренца является группой движений пространства Минковского $\mathbf{E}_{1,3}^{R}$. Дискретная точечная группа симметрии должна удовлетворять двум условиям:

а) существует хотя бы одна точка, называемая особенной, которая инвариантна относительно всех преобразований группы;

б) орбита любой неособенной точки дискретна [6, с. 94].

Если $\mathbf{L} \in SO(1,3)$, $x \in \mathbf{E}_{1,3}^{R}$, то первое условие дискретности подгруппы группы Лоренца означает $\mathbf{L}x = x$, которое для $x \neq 0$ выполняется, только если $\mathbf{L}$ принадлежит малой группе Лоренца. В случае всех преобразований группы это условие выполняется для единственной точки $x = 0$, которая, таким образом, является особенной. Второе условие задает решетку в пространстве Минковского, узлы которой определяются из уравнения $x' = \mathbf{L}x$.

В параметризации Федорова матрица группы Лоренца задается посредством

$$\mathbf{L}(\mathbf{q}) = \frac{1+\alpha}{1-\alpha} = \frac{1+\frac{1}{2}(\mathbf{q}^2+\mathbf{q}^{*2})+2(\beta+\beta^2)}{|1+\mathbf{q}^2|} =$$

$$= \frac{1}{|1+\mathbf{q}^2|}\begin{pmatrix} 1+|\mathbf{q}|^2 & i(\mathbf{q}-\mathbf{q}^*+[\mathbf{q}\mathbf{q}^*]) \\ i(\mathbf{q}-\mathbf{q}^*-[\mathbf{q}\mathbf{q}^*]) & 1-|\mathbf{q}|^2+(\mathbf{q}+\mathbf{q}^*)^\times+\mathbf{q}\circ\mathbf{q}^*+\mathbf{q}^*\circ\mathbf{q} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

с законом композиции вектор-параметров

$$\mathbf{q}'' = <\mathbf{q},\mathbf{q}'> \equiv \frac{\mathbf{q}+\mathbf{q}'+[\mathbf{q}\mathbf{q}']}{1-\mathbf{q}\mathbf{q}'}, \tag{2}$$

где 3×3-матрица $\mathbf{q}^\times$ имеет компоненты $(\mathbf{q}^\times)_{ij} = \varepsilon_{ijk}q_k$, знак «$\circ$» означает диадное произведение: $(\mathbf{q}\circ\mathbf{q}^*)_{ij} = q_i q_j^*$, $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ – антиэрмитовы матрицы

$$\boldsymbol{\alpha} = \xi\boldsymbol{\beta}+\zeta\boldsymbol{\beta}^3 = -\boldsymbol{\alpha}^\dagger,\ \ \boldsymbol{\beta} = \frac{1}{2}(\mathbf{q}+\mathbf{q}^*) = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{b} \\ -\mathbf{b} & \mathbf{a}^\times \end{pmatrix} = -\boldsymbol{\beta}^\dagger,$$

$$\xi = 1-\Delta_\beta\frac{\sqrt{(1-\Delta_\beta)^2-4|\boldsymbol{\beta}|}-(1-\Delta_\beta)}{2|\boldsymbol{\beta}|},\ \ \zeta = \frac{\sqrt{(1-\Delta_\beta)^2-4|\boldsymbol{\beta}|}}{2|\boldsymbol{\beta}|},$$

$$\Delta_\beta = \frac{1}{2}\mathrm{Sp}\boldsymbol{\beta}^2 = -\frac{1}{2}(\mathbf{q}^2+\mathbf{q}^{*2}),\ \ |\boldsymbol{\beta}| \doteq \det\boldsymbol{\beta} = \frac{1}{16}(\mathbf{q}^2-\mathbf{q}^{*2})^2.$$

Развернутое действие $\mathbf{L}(\mathbf{q})$ на вектор $\mathrm{x} = (x^0,\mathbf{x})$ имеет вид

$$\begin{cases} 'x^0 = \dfrac{1}{|1+\mathbf{q}^2|}\left\{(1+|\mathbf{q}|^2)x^0+i(\mathbf{q}-\mathbf{q}^*+[\mathbf{q}\mathbf{q}^*])\mathbf{x}\right\}, \\ '\mathbf{x} = \dfrac{1}{|1+\mathbf{q}^2|}\left\{i(\mathbf{q}-\mathbf{q}^*-[\mathbf{q}\mathbf{q}^*])x^0+(1-|\mathbf{q}|^2)\mathbf{x}+[\mathbf{q}+\mathbf{q}^*,\mathbf{x}]+\mathbf{q}(\mathbf{q}^*\mathbf{x})+\mathbf{q}^*(\mathbf{q}\mathbf{x})\right\}. \end{cases} \tag{3}$$

Рассмотрим дискретные преобразования Лоренца. Пусть компоненты вектор-параметра $\mathbf{q} = \mathbf{a}+i\mathbf{b}$ являются рациональными комплексными числами, т. е. такими, у которых вещественные и мнимые части являются числами вида m / n, где m и n целые. Тогда закон композиции (2) двух рациональных вектор-параметров приводит также к рациональному вектор-параметру. Единичному и обратному элементам соответствуют $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ и $\mathbf{q}' = -\mathbf{q}$, которые, очевидно, также рациональны. Матрица $\mathbf{L}(\mathbf{q})$, задаваемая (1), вообще говоря, не является рациональной, так как $|1+\mathbf{q}^2| = \sqrt{(1+\mathbf{q}^2)(1+\mathbf{q}^{*2})}$ в общем случае иррационально. Однако ее компоненты принимают дискретный ряд значений, определяемый дискретностью рациональных значений вектор-параметра $\mathbf{q}$, которые определяют, таким образом, дискретные подгруппы группы Лоренца. Действие преобразований Лоренца на некоторые начальные координаты $\mathrm{x} = (x^0,\mathbf{x})$, не обязательно обладающие свойством рациональности, дает новые координаты $\mathrm{x}' = \mathbf{L}(\mathbf{q})\mathrm{x}$, а перебор всех возможных рациональных значений $\mathbf{q}$ приводит к дискретной совокупности точек, определяющих узлы решетки. Естественно, мы не получим такой совокупности, если $\mathbf{L}(\mathbf{q})$ принадлежит малой группе Лоренца, оставляющей неподвижными точки x. Таким образом, *для того, чтобы дискретная подгруппа группы Лоренца не содержала элементов, оставляющих векторы неподвижными, она не должна содержать дискретных подгрупп малой группы Лоренца*.

В случае времениподобных векторов малой группой Лоренца является группа $SO(3)$, для пространственноподобных векторов – группа $SO(1,2)$, а для изотропных – группа, изоморфная группе движений плоскости $E(2)$, так как вектор-параметр можно представить в виде

$$\mathbf{q} = a_1\mathbf{e}_1 + 2a^*\mathbf{e}^* =< a_1\mathbf{e}_1, \frac{2a^*}{1+ia_1}\mathbf{e}^* >, \tag{4}$$

где

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|},\ \mathbf{e} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_2 + i\mathbf{e}_3),\ \mathbf{e}^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_2 - i\mathbf{e}_3) \tag{5}$$

– векторы базиса, удовлетворяющие соотношениям

$$[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}] = -i\mathbf{e},\ [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}^*] = i\mathbf{e}^*,\ [\mathbf{e}, \mathbf{e}^*] = -i\mathbf{e}_1; \tag{6}$$

$$\mathbf{e}_1^2 = 1,\ \mathbf{e}^2 = (\mathbf{e}^*)^2 = 0,\ \mathbf{e}\mathbf{e}^* = 1,\ \mathbf{e}_1\mathbf{e} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}^* = 0, \tag{7}$$

так что

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a\mathbf{e} + a^*\mathbf{e}^*,\ a_1 = a_1^*, \tag{8}$$

$$\mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e} + b^*\mathbf{e}^*,\ b_1 = 0,\ b = ia. \tag{9}$$

Вектор-параметр $a_1\mathbf{e}_1$ соответствует вращению на угол $\varphi = 2\mathrm{arctg}\, a_1$ вокруг направления $\mathbf{x}$, а вектор-параметр $\frac{2a^*}{1+ia_1}\mathbf{e}^*$ соответствует трансляции в плоскости, ортогональной $\mathbf{x}$.

Таким образом, подгруппы группы Лоренца, не имеющие неподвижных точек, содержатся в бустах вдоль направления вектора $\mathbf{x}$ для времениподобных и пространственноподобных векторов, образующих группы $SO(1,1)$. В случае изотропных векторов такие подгруппы содержатся в группе, порождаемой вектор-параметром

$$\mathbf{q} = ib\mathbf{e}_1 + c\mathbf{e} =< ib\mathbf{e}_1, \frac{c}{1+b}\mathbf{e} >. \tag{10}$$

Вектор-параметр $ib\mathbf{e}_1$ соответствует бустам в направлении $\mathbf{x}$ (гиперповоротам на угол $\psi = 2\mathrm{ar\,th}\, b$), образующим группу $SO(1,1)$, а вектор $\frac{c}{1+b}\mathbf{e}$ приводит одновременно к дилатациям (различным) временно́й координаты и вектора $\mathbf{x}$ и трансляциям в плоскости, ортогональной направлению оси $\mathbf{x}$. Обозначая эту группу через $E(1,1)$, можно сказать, что дискретные подгруппы изотропного вектора являются подгруппами группы $SO(1,1)\times E(1,1)$, где знак «×» означает полупрямое произведение.

Рассмотрим бусты $SO(1,1)$ в направлении $\mathbf{x}$, которые применяются ко всем типам векторов, задаваемым вектор-параметром

$$\mathbf{q} = ib\mathbf{e}_1. \tag{11}$$

Закон композиции (2) сводится к композиции параметра b:

$$b'' = \frac{b+b'}{1+bb'}. \tag{12}$$

Здесь можно сразу увидеть по крайней мере два типа дискретных подгрупп.

1. b представляются рациональными числами $b = m/n$. Орбита определяется из соотношений (3)

$$'x^0 = \frac{(n^2+m^2)x^0 - 2mnx}{|n^2-m^2|},\ 'x = \frac{-2mnx^0 + (n^2+m^2)x}{|n^2-m^2|}. \tag{13}$$

2. $b = \mathrm{th}(\psi/2) = \mathrm{th}\mu r$, где $r = m/n$ – целое или рациональное число, закон композиции для которого тривиален: $r'' = r + r'$; $0 < \mu \le 1$ – фиксированное вещественное число, которое задает континуум дискретных подгрупп этого типа. Здесь выделяется подгруппа, когда r – целое число. Орбита задается соотношениями

$$'x^0 = x^0\mathrm{ch}2\mu r - x\mathrm{sh}2\mu r,\ 'x = -x^0\,\mathrm{sh}\,2\mu r + x\,\mathrm{ch}\,2\mu r. \tag{14}$$

Для группы $E(1,1)$, задаваемой вектор-параметром

$$\mathbf{q} = d\mathbf{e} = \frac{c}{1+b}\mathbf{e}, \tag{15}$$

закон композиции (2) сводится к

$$d'' = \frac{d+d'}{1-dd'}, \text{ или } \frac{c''}{1+b''} = \frac{c(1+b')+c'(1+b)}{(1+b)(1+b')-cc'}. \tag{16}$$

Здесь также получаем два типа дискретных подгрупп.

1. d представляются рациональными числами $d = m/n$.

2. $d = \mathrm{tg}\mu r$, где $r = m/n$ – целое или рациональное число, закон композиции для которого тривиален: $r'' = r + r'$; $0 < \mu \le 1$ – фиксированное вещественное число, задающее континуум дискретных подгрупп этого типа. Здесь выделяется подгруппа, когда r – целое число.

Для группы $SO(1,1)\times E(1,1)$, учитывая в (16) закон (12), получаем закон композиции для c:

$$c'' = \frac{c(1+b')+c'(1+b)}{\left[1-\dfrac{cc'}{(1+b)(1+b')}\right](1+bb')}. \tag{17}$$

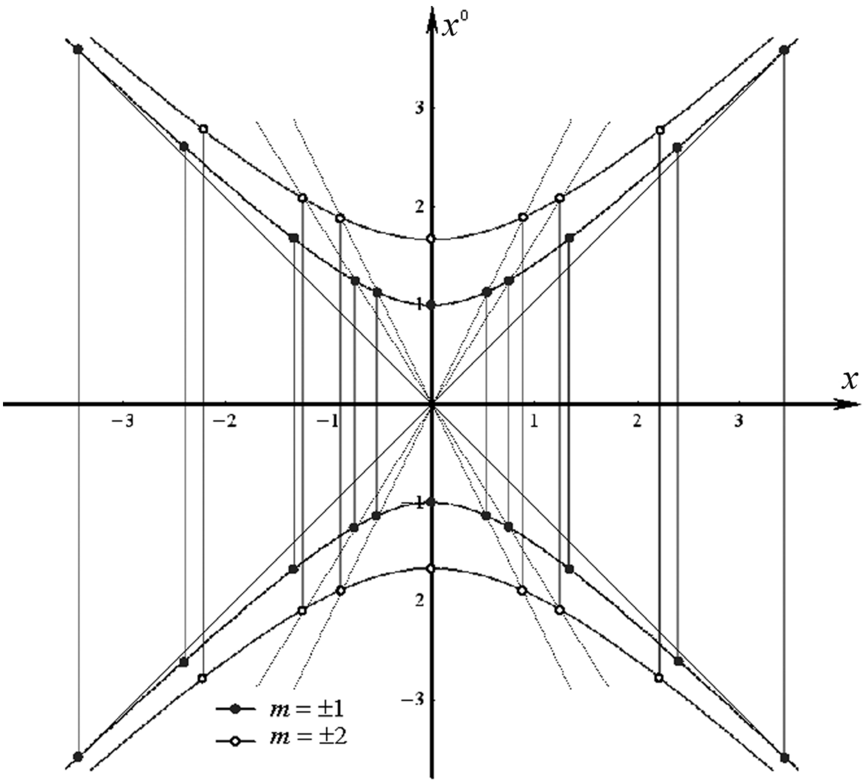
Отсюда следует, что,

1) если $b = m/n$, то c также рационально: $c = p/q$, причем $d = \dfrac{k}{l} = \dfrac{pn}{q(m+n)}$ и

$$\frac{p''}{q''} = \frac{[pq'(n'+m')+p'q(n+m)](n+m)(n'+m')}{\left[qq'(n+m)(n'+m')-nn'pp'\right](nn'+mm')}; \tag{18}$$

2) если $b = \mathrm{th}(\mu m/n)$, $d = \mathrm{th}(\nu k/l)$, то $c = \mathrm{th}(\nu k/l)[1+\mathrm{th}(\mu m/n)]$.

Ниже на диаграмме Минковского построены узлы «времениподобной» решетки, задаваемые формулами (13), для значений $m = \pm 1$, ± 2 и $-5 \le n \le 5$ (рисунок). Положительный знак m соответ-



ствует верхней поле двухполостного гиперболоида, отрицательный – нижней поле. «Пространственноподобная» решётка выглядит аналогичным образом, если график повернуть на 90°. Тогда гиперболы будут представлять сечение однополостного гиперболоида. Решетки, задаваемые формулами (14), выглядят аналогично, но координаты узлов имеют другие значения, определяемые из (14).

В заключение отметим, что хотя параметризация Ф. И. Федорова оказалась удобным инструментом для определения дискретных подгрупп, остается открытым вопрос о том, исчерпываются ли дискретные подгруппы, порождающие 1+3-мерные решетки, найденными случаями. Кроме того, возникает проблема классификации таких решеток.

Автор признателен профессору Е. А. Толкачеву за замечания и полезное обсуждение работы, что позволило улучшить ее содержание.

Литература

1. *Potter F.* // Progr. in Phys. 2006. Vol. 1. P. 3–9.

2. *Макаров В. С.* Геометрические методы построения дискретных групп движений пространства Лобачевского // Проблемы геометрии. Итоги науки и техники. 1983. Т. 15. С. 3–59.

3. *Апанасов Б. Н.* Дискретные группы преобразований и структуры многообразий. Новосибирск, 1983.

4. *Апанасов Б. Н.* Геометрия дискретных групп и многообразий. М., 1991.

5. *Бердон А.* Геометрия дискретных групп. М., 1986.

6. *Балтаг И. А.* Методы построения дискретных групп преобразований симметрии пространства Минковского. Кишинев, 1987.

7. *Dirac P. A. M.* Discrete subgroups of the Poincaré group // Проблемы теоретической физики. Памяти И. Е. Тамма. М., 1972. С. 45–51.

8. *Schwarz F.* // Lett. Nuovo Cim. 1976. Vol. 15. P. 7–14.

9. *Белавин А. А.* // Функцион. анализ и его прил. 1980. Т. 14, вып. 4. С. 18–26.

10. *Федоров Ф. И.* Группа Лоренца. М., 1979.

A. N. TARAKANOV

DISCRETE SUBGROUPS OF THE LORENTZ GROUP GENERATING LATTICES IN THE MINKOWSKI SPACE

Summary

Some discrete subgroups of the Lorentz group are found using Fedorov's parametrization by means of complex vector-parameter. It is shown that the discrete subgroups of the Lorentz group, which have no fixed points, are contained in boosts along a spatial direction for time-like and space-like vectors and represent discrete subgroups of group $SO(1,1)$, whereas discrete subgroups of an isotropic vector are subgroups of $SO(1,1)\times E(1,1)$. An example of construction of nodes of 'time-like' lattice is given.