УДК 511.42

М. В. ЛАМЧАНОВСКАЯ

КОМПЛЕКСНЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ЧИСЛА БОЛЬШОЙ ВЫСОТЫ В КРУГАХ МАЛОГО РАДИУСА

Институт информационных технологий Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники

(Поступила в редакцию 24.10.2014)

Алгебраические числа – корни многочленов с целыми коэффициентами – имеют сложную зависимость от коэффициентов. Задача распределения алгебраических чисел нетривиальна даже для многочленов малых степеней. В данной статье нас будет интересовать распределение действительных алгебраических чисел заданной степени и высоты. Такие задачи возникают в теории трансцендентных чисел [1] и в теории диофантовых приближений [2]. В работе [1] доказано существование алгебраических чисел произвольной степени в интервалах, длины которых уменьшаются с ростом высоты многочленов. В настоящей работе доказано несколько фактов об алгебраических числах на комплексной плоскости в кругах малого радиуса. Мы впервые получаем оценки сверху и снизу для длин интервалов, в которых существуют алгебраические числа.

Пусть $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ – неприводимый многочлен степени *n*. Коэффициенты многочлена – взаимно простые числа $(a_n,a_{n-1},\ldots,a_0)=1$, $a_n>0$. Пусть α – алгебраическое число степени *n*, являющееся корнем этого многочлена. Высотой алгебраического числа α назовем число $H(\alpha)=\max\limits_{0\le i\le n}|a_i|$, равное модулю максимального коэффициента этого многочлена.

Покажем, что существуют такие интервалы, $I, |I|=0{,}5Q^{-1}$, где $Q\in\mathbb{N}$, $Q>1$, в которых нет алгебраических чисел α, $\deg\alpha=n\ge1$ и $H(\alpha)\le Q$ для любого *n*. С другой стороны, если $|I|>Q^{-\mu}$, $\mu<\frac{1}{n}$, то, как мы покажем в теореме 2, в любом таком интервале, при $Q>Q_0(n)$ всегда существуют алгебраические числа произвольной степени.

Вначале рассмотрим задачу о распределении действительных алгебраических чисел.

Т е о р е м а 1. *В интервале* $I=\left(0;0{,}5Q^{-1}\right), |I|=0{,}5Q^{-1}$ *нет алгебраических чисел* α *степени* $\deg\alpha=n\ge1$ *и* $H(\alpha)\le Q$ *для любого* $Q>1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть действительное алгебраическое α – корень неприводимого многочлена $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ с целыми коэффициентами. Если $a_0=0$, то из $P(\alpha)=0$ получаем $a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\ldots+a_1\alpha=0$, $\alpha\left(a_n\alpha^{n-1}+a_{n-1}\alpha^{n-2}+\ldots+a_1\right)=0$.

Следовательно, α – корень многочлена $P_1(x)=a_nx^{n-1}+a_{n-1}x^{n-2}+\ldots+a_1$ степени, не превосходящей $n-1$. Это противоречит условию. Поэтому коэффициент $a_0\ne0$. Значит, $|a_0|\ge1$. Из равенства $P(\alpha)=0$ следует:

$$-a_0=\alpha\left(a_n\alpha^{n-1}+a_{n-1}\alpha^{n-2}+\ldots+a_1\right),$$

$$1\le|-a_0|\le0{,}5Q^{-1}\cdot Q\left(\alpha^{n-1}+\ldots+\alpha+1\right)<0{,}5Q^{-1}Q\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)<1.$$

Получили противоречие. Следовательно, в интервале I нет алгебраических точек никакой степени.

Т е о р е м а 2. *Пусть задано натуральное число* $Q > 1$ *и интервал* $I \subset \mathbb{R}, |I| > Q^{-\mu}$. *Тогда в интервале* I *существует действительное алгебраическое число* $\alpha,\ \deg\alpha = n \geq 1,\ H(\alpha) \leq Q$, *если* $\mu < \frac{1}{n}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим число $\alpha = \sqrt[n]{2}$. Это число – алгебраическое, $\deg\alpha = n$, так как оно является корнем многочлена $P(x) = x^n - 2$, который неприводим по критерию Эйзенштейна [3].

Пусть $q \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{Z}$. Покажем, что число $\alpha_1 = \alpha + \frac{p}{q}$ является алгебраическим и при $q > Q^{\mu}$ принадлежит I. Рассмотрим многочлен $P_1(x) = P\left(x - \frac{p}{q}\right) = \left(\left(x - \frac{p}{q}\right)^n - 2\right)$. Умножим его на q^n и получим многочлен $P_2(x) = q^n P_1(x) = q^n\left(\left(x - \frac{p}{q}\right)^n - 2\right)$ с целыми коэффициентами. Число $\alpha_1 = \alpha + \frac{p}{q}$ является корнем многочлена

$$P_2(x) = q^n P_1(x) = q^n\left(\left(x - \frac{p}{q}\right)^n - 2\right) = q^n\left(x^n - nx^{n-1}\frac{p}{q} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\left(\frac{p}{q}\right)^2 + \ldots + \left(-\frac{p}{q}\right)^n - 2\right) =$$

$$= q^n\left(\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C_n^k x^{n-k}\left(\frac{p}{q}\right)^k + \left(-\frac{p}{q}\right)^n - 2\right).$$

Оценим высоту этого многочлена: $H(P_2) = \max\limits_{1\leq k\leq n}|a_k| = \max\limits_{1\leq k\leq n}\left|C_n^k p^k q^{n-k}\right|$.

Рассмотрим промежуток $I = [0,1]$. Пусть число $\alpha_1 = \alpha + \frac{p}{q}$ принадлежит этому промежутку, тогда

$$0 \leq \sqrt[n]{2} + \frac{p}{q} \leq 1,\ 0 \leq \sqrt[n]{2}q + p \leq q,\ -\sqrt[n]{2}q \leq p \leq q - \sqrt[n]{2}q,\ -\frac{3}{2}q < p < 0,\ |p| < \frac{3}{2}q.$$

При такой зависимости между p и q оценка для высоты многочлена имеет вид

$$H(P_2) = \max_k|a_k| = \max_k C_n^k q^k p^{n-k} \leq 2^n q^k\left(\frac{3}{2}\right)^{n-k} q^{n-k} = q^n \cdot 2^{2n}.$$

По условию теоремы $H(\alpha) \leq Q$. Поэтому $2^{2n}q^n < Q,\ q < \frac{1}{4}Q^{\frac{1}{n}}$ и $\mu < \frac{1}{n}$.

Подобным образом можно показать, что интервалу I принадлежит и число $\alpha_2 = \sqrt[n]{2}\cdot\frac{p}{q}$. Оно алгебраическое, так как является корнем многочлена $P_3(x) = q^n x^n - 2p^n$.

Сейчас рассмотрим задачу о распределении комплексных алгебраических чисел, т. е. алгебраических чисел β с условием $\operatorname{Im}\beta \neq 0$. Далее через $c_1(n), c_2(n), \ldots$ будем обозначать величины, зависящие только от n и не зависящие от высоты многочлена.

Л е м м а [4]. *Пусть* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – *корни многочлена* $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $\deg P = n$. *Тогда для любого набора различных корней* $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_k},\ 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n,\ k \leq n$, *справедливо неравенство* $\left|\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\ldots\alpha_{i_n}\right| < c_1(n)\frac{H(P)}{|a_n|}$.

Заметим, что лемма точная, так как в работе [4] доказано, что всегда существует набор корней $\alpha_{i_1},...,\alpha_{i_l}$, $l \le n$, таких, что $\left|\alpha_{i_1}\cdot...\cdot\alpha_{i_l}\right| > c_2(n)\dfrac{H}{|a_n|}$.

Т е о р е м а 3. *Для любого $Q>1$ существуют круги $K(z_0,r)$ радиуса $r < c_3(n)^{-\frac{1}{2}}Q^{-1}$, в которых при достаточно малой величине $c_3(n)$ нет алгебраических α степени $\deg\alpha = n$ и высоты $H(\alpha)<Q$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим многочлен $P_1(x)=x^2+x+1$, корнями которого являются числа $\beta_{1,2}=-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, и многочлен $P_2(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$, $n\ge3$, с корнями $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ степени $H(\alpha_i)<Q$. Пусть многочлены $P_1(x)$ и $P_2(x)$ не имеют общих корней. Это будет всегда, если $P_2(x)$ – неприводим и $n\ge3$. Предположим, что в круге радиуса $r=c_3(n)^{-\frac{1}{2}}Q^{-1}$ существуют корни $P_2(x)$. Рассмотрим результант многочленов $P_1(x)$ и $P_2(x)$. По определению [3]

$$R(P_1,P_2)=a_n^2\prod_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le 2}}\left|\alpha_i-\beta_j\right|. \tag{1}$$

Из (1) и леммы имеем

$$1\le\left|R(P_1,P_2)\right|=1^n a_n^2\prod_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le 2}}\left|\alpha_i-\beta_j\right|\le 1^n a_n^2 r^2 c(n)\frac{H^2}{a_n^2}<c(n)Q^2r^2. \tag{2}$$

Если $r<c_3(n)^{-\frac{1}{2}}Q^{-1}$, то неравенство (2) противоречиво. Следовательно, в круге $K(z_0,r)$ нет алгебраических чисел.

Т е о р е м а 4. *Пусть задано натуральное число $Q>1$ и круг $K(z_0,r)$ радиуса $r=Q^{-\mu}$. В круге $K(z_0,r)$ существует комплексное алгебраическое число α, $\operatorname{Im}\alpha\ne0$, $\deg\alpha=n\ge2$, $H(\alpha)\le Q$, если $\mu<\dfrac{1}{2n}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим неприводимый многочлен $P_1(z)=z^n-2$. Его корни $z_k=\sqrt[n]{2}\left(\cos\dfrac{2\pi k}{n}+i\sin\dfrac{2\pi k}{n}\right)$, $i=0,1,...,n-1$, – алгебраические числа. Выберем k с условием $\sin\dfrac{2\pi k}{n}>0$.

Рассмотрим множество комплексных чисел

$$S(x,y)=\left\{z\in\mathbb{C}: I_1=\left|x-\operatorname{Re}z_0\right|<\frac{\sqrt{2}}{2}Q^{-\mu},\ I_2=\left|y-\operatorname{Im}z_0\right|<\frac{\sqrt{2}}{2}Q^{-\mu}\right\}.$$

Покажем, что существует число вида $\dfrac{p_1}{q_1}\sqrt[n]{2}\sin\dfrac{2\pi k}{n}$, принадлежащее промежутку I_2. Зафиксируем k так, чтобы число $\dfrac{2\pi k}{n}$ незначительно отличалось от $\dfrac{\pi}{4}$. Если $n\ge9$, то возьмем $k=\left[\dfrac{n}{8}\right]$. Если $n=5,6,7,8$, то $k=1$. Если $n=4$, то из корней многочлена $P_1(z)=z^4-2$ выберем корень $z_1=\sqrt[n]{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$. Если $n=3$, то из корней многочлена $P_1(z)=z^3-2$ выберем корень $z_1=\sqrt[n]{2}\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

Будем для определенности считать, что все координаты точек круга $K(z_0,r)$ находятся правее фиксированной точки z_k. Совершим переход от числа $S_0=\frac{p_1}{q_1}\sqrt[n]{2}\sin\frac{2\pi k}{n}$ к числу $S_1=\frac{p_1+1}{q_1}\sqrt[n]{2}\sin\frac{2\pi k}{n}$. Шаг перехода от числа S_0 к числу S_1 равен $St(q_1)=\frac{1}{q_1}\sqrt[n]{2}\sin\frac{2\pi k}{n}\le\frac{3}{2q_1}$. От числа S_1 перейдем к числу $S_2=\frac{p_1+2}{q_1}\sqrt[n]{2}\sin\frac{2\pi k}{n}$ и т. д. до тех пор, пока мнимая часть числа z_k не станет принадлежать промежутку I_2. Таким образом, мы продвигаемся к $\operatorname{Im} z_0$ с шагом, не большим $\frac{3}{2q_1}$. Если $\frac{3}{2q_1}<\sqrt{2}Q^{-\mu}$, то $q_1>\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}Q^{\mu}=\frac{\sqrt{2}}{3}Q^{\mu}$. Ясно, что найдется такое число l, что $S_l=\frac{p_1+l}{q_1}\sqrt[n]{2}\sin\frac{2\pi k}{n}\in I_2$.

Рассмотрим многочлен $P_2(z)=\left(\frac{q_1}{p_1}z\right)^n-2$. Обозначим $u=\frac{q_1}{p_1}z$. Корни многочлена $P_2(z)$ равны

$$u_k=\sqrt[n]{2}\left(\cos\frac{2\pi k}{n}+i\sin\frac{2\pi k}{n}\right),\ k=0,1,\ldots,n-1,$$
$$z_k=\frac{p_1}{q_1}u_k=\sqrt[n]{2}\frac{p_1}{q_1}\cos\frac{2\pi k}{n}+i\sqrt[n]{2}\frac{p_1}{q_1}\sin\frac{2\pi k}{n},$$

где $\operatorname{Im} z_k\in I_2$.

Перейдем к многочлену $P_3(z)=\left(\frac{q_1}{p_1}\left(z-\frac{p_2}{q_2}\right)\right)^n-2$. Найдем корни этого многочлена:

$$\left(\frac{q_1}{p_1}\left(z-\frac{p_2}{q_2}\right)\right)^n-2=0,\ \left(z-\frac{p_2}{q_2}\right)^n=2\frac{p_1^n}{q_1^n},\ z-\frac{p_2}{q_2}=\sqrt[n]{2}\frac{p_1}{q_1}\left(\cos\frac{2\pi k}{n}+i\sin\frac{2\pi k}{n}\right).$$

Получим, что $z_k=\sqrt[n]{2}\frac{p_1}{q_1}\cos\frac{2\pi k}{n}+\frac{p_2}{q_2}+i\sqrt[n]{2}\frac{p_1}{q_1}\sin\frac{2\pi k}{n}$.

Выберем число $\frac{p_2}{q_2}$ так, чтобы действительная часть числа z_k принадлежала промежутку I_1, т. е. $\sqrt[n]{2}\frac{p_1}{q_1}\cos\frac{2\pi k}{n}+\frac{p_2}{q_2}\in I_1$. Для этого будем переходить от числа $\frac{p_2}{q_2}$ к числу $\frac{p_2+1}{q_2}$ с шагом $\frac{1}{q_2}<\sqrt{2}Q^{-\mu}$. Тогда $q_2>\sqrt{2}Q^{\mu}$, $q_2>\frac{3}{2}Q^{\mu}$.

Умножим многочлен $P_3(z)$ на $p_1^n q_2^n$ и получим многочлен $P_4(z)=p_1^n q_2^n P_3(z)$ с целыми коэффициентами.

Оценим высоту этого многочлена.

$$H(P_4)=c_4(n)p_1^n q_2^n,$$

где $q_1>\frac{3}{2}Q^{\mu}$, $q_2>\frac{3}{2}Q^{\mu}$.

Поэтому $H(P_4)=c_4(n)p_1^n q_2^n\ge Q^{2\mu n}$. С другой стороны, по условию теоремы $H(\alpha)<Q$, т. е. $Q^{2\mu n}\le H(P_4)\le Q$. Откуда и следует утверждение теоремы: $\mu<\frac{1}{2n}$.

Литература

1. *Schmidt W. M.* T-numbers do exist // Symposia Math. IV. Inst. Naz. di Alta Math. Rome, 1968. London, 1970. P. 3–26.
2. *Спринджук В. Г.* Проблема Малера в метрической теории чисел. Минск, 1967.
3. *Варден Б. Л. ван дер.* Алгебра. М., 1979.
4. *Фельдман Н. И.* // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1951. Т. 15 (1). С. 53–74.

M. V. LAMCHANOVSKAYA

COMPLEX ALGEBRAIC NUMBERS OF LARGE HEIGHT IN THE CIRCLES OF SMALL RADIUS

Summary

It is shown that on the real line and in the complex plane there are intervals *I* of short length and circles *K* of small radius within which there are no algebraic numbers of small height. If the length of the intervals and the radius of the circles increase, then it is already possible to obtain nontrivial estimates for the number of algebraic numbers in *I* and in *K*.