УДК 517.926.4+517.928.2

М. В. КАРПУК

О СТАРШЕМ ПОКАЗАТЕЛЕ ЛЯПУНОВА ЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С ПАРАМЕТРОМ-МНОЖИТЕЛЕМ КАК ФУНКЦИИ ПАРАМЕТРА

Институт математики НАН Беларуси

(Поступила в редакцию 19.11.2014)

Введение. Рассмотрим n-мерную ($n \geq 2$) линейную систему дифференциальных уравнений

$$dx / dt = A(t)x, \quad x = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \tag{1}$$

матрица коэффициентов $A(\cdot) : [0, +\infty) \to \mathrm{End}\mathbb{R}^n$ которой кусочно-непрерывна на временнóй полуоси $t \geq 0.$ Класс всех таких систем обозначим через M_n^*. Мы будем отождествлять систему (1) и ее матрицу коэффициентов и, вследствие этого, например, писать $A \in M_n^*$. Наряду с системой (1) рассмотрим порожденное ею однопараметрическое семейство

$$dx / dt = \mu A(t)x, \quad x = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \tag{2}$$

линейных дифференциальных систем со скалярным параметром-множителем $\mu \in \mathbb{R}$. Класс семейств (2), порождаемых системами $A \in M_n^*$, обозначим через K_n^*. Фиксируя в семействе (2) значение параметра μ, получаем линейную дифференциальную систему, которую ниже обозначаем через $\langle \mu \rangle_A$. Через $\lambda_1(\mu A) \leq \ldots \leq \lambda_n(\mu A)$ обозначим показатели Ляпунова [1, с. 34; 2, с. 63] системы $\langle \mu \rangle_A$.

В. И. Зубов в монографии [3, с. 408; проблема 1] поставил задачу выяснить, как изменяются показатели Ляпунова системы (1) после умножения на постоянную величину μ всех ее коэффициентов, т. е. как связаны показатели Ляпунова систем (1) и (2). Подчеркнем, что в [3] в постановке задачи ограниченность матрицы коэффициентов системы (1) не предполагается. Поэтому, вообще говоря, показатель $\lambda_i(\mu A)$, $i = 1, \ldots, n$, может принимать несобственные значения: $-\infty$ или $+\infty$; следовательно, функция $\lambda_i(\mu A)$ переменной $\mu \in \mathbb{R}$, которую назовем i-м показателем Ляпунова семейства (2), – это функция $\mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, где $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Другими словами, задача Зубова может быть равносильным образом сформулирована так: для каждого $i = 1, \ldots, n$ дать полное описание множества $\mathfrak{L}_i^n \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\lambda_i(\mu A) : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}} \mid A \in M_n^*\}$ функций, представляющих собой i-е показатели Ляпунова семейств из K_n^*.

В настоящей работе получено решение задачи Зубова для старшего показателя Ляпунова $\lambda_n(\mu A)$ в предположении, что он не равен тождественно $+\infty$ ни на одной из числовых полуосей.

Отметим, что аналогичная задача для семейств линейных дифференциальных систем

$$dx / dt = A(t, \mu)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \tag{3}$$

матрица $A(t, \mu) : [0; +\infty) \times \mathbb{R} \to \mathrm{End}\mathbb{R}^n$ которых при каждом фиксированном $\mu \in \mathbb{R}$ ограничена на временнóй полуоси $t \geq 0$ и непрерывна по совокупности переменных, решена в [4]: для каждого фиксированного $i = 1, \ldots, n$ функция $\lambda(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ представляет собой i-й показатель Ляпунова некоторого семейства (3), рассматриваемый как функция переменной $\mu \in \mathbb{R}$, если и только если она является функцией класса $(*, G_\delta)$, имеющей полунепрерывную сверху миноранту. В работе [4] доказано, что это утверждение имеет место в существенно более общей ситуации – для показателей Ляпунова семейств морфизмов расслоений Миллионщикова.

Эта общая теорема о показателях Ляпунова семейств (3) к семействам (2) неприменима, если даже ограничиться случаем ограниченных на временнóй полуоси матриц коэффициентов систем (1) – в этом случае она дает только необходимое условие принадлежности функции классу $\mathfrak{L}_i^n$. Тем более она неприменима в ситуации неограниченных коэффициентов систем (1), поскольку в этом случае области значений показателей Ляпунова различны. На первый взгляд представляется правдоподобным, что столь сложная зависимость показателей Ляпунова семейств (3) от параметра, которая представлена в приведенном выше утверждении, является следствием нелинейной зависимости матрицы коэффициентов семейства от параметра и что для семейств (2), зависимость которых от параметра предельно проста, их показатели Ляпунова не должны иметь сложную дескриптивную природу. Тем не менее в настоящей работе показывается, что по меньшей мере для старшего показателя Ляпунова семейств из K_n^* это не так.

1. Предварительные результаты. Чтобы точнее представить содержание работы, докажем вначале две леммы.

Л е м м а 1. *Если при некотором* $\mu_0 \neq 0$ *система* $\langle \mu_0 \rangle_A$ *семейства* (2) *имеет неположительный старший показатель Ляпунова* (*возможно, равный* $-\infty$)*, то при любом* μ, *принадлежащем той полуоси, которая не содержит точки* μ_0, *старший показатель Ляпунова системы* $\langle \mu \rangle_A$ *неотрицателен.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно неравенству Ляпунова [1, с. 37; 2, с. 72], имеем

$$S(\mu_0) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t}\int_0^t \mathrm{Sp}(\mu_0 A(\tau))d\tau \leq \lambda_1(\mu_0 A) + \ldots + \lambda_n(\mu_0 A) \leq n\lambda_n(\mu_0 A).$$

Легко видеть, что неравество $S(\mu_0) \leq n\lambda_n(\mu_0 A)$ верно и в случае несобственных значений показателей. По предположению леммы $\lambda_n(\mu_0 A) \leq 0$, следовательно, и $S(\mu_0) \leq 0$. Поэтому для любого μ такого, что $\mu\mu_0 < 0$, получаем

$$S(\mu) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t}\int_0^t \mathrm{Sp}(\mu A(\tau))d\tau = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\mu}{\mu_0}\frac{1}{t}\int_0^t \mathrm{Sp}(\mu_0 A(\tau))d\tau = \frac{\mu}{\mu_0} \underline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{t}\int_0^t \mathrm{Sp}(\mu_0 A(\tau))d\tau \geq 0.$$

Поэтому для таких μ верно неравенство $n\lambda_n(\mu A) \geq S(\mu) \geq 0$, откуда $\lambda_n(\mu A) \geq 0$. Лемма 1 доказана.

Л е м м а 2. *Если при некотором* $\mu_0 \neq 0$ *старший показатель Ляпунова системы* $\langle \mu_0 \rangle_A$ *семейства* (2) *конечен и равен* $\lambda \in \mathbb{R}$, *то при любом* $\mu \in \mathbb{R}$, *принадлежащем той полуоси, которая не содержит точки* μ_0, *для старшего показателя Ляпунова системы* $\langle \mu \rangle_A$ *верно неравенство* $\lambda_n(\mu A) \geq \lambda\mu / \mu_0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим матрицу $\widetilde{A}(t) = A(t) - \lambda\mu_0^{-1}E_n$, $t \geq 0$, где E_n – единичная матрица размера $n \times n$. Фундаментальные матрицы $X(t)$ системы $\langle \mu \rangle_A$ и $Y(t)$ системы $\langle \mu \rangle_{\widetilde{A}}$ связаны формулой $Y(t) = X(t)\exp(-\lambda\mu / \mu_0)$. Следовательно, при всех $\mu \in \mathbb{R}$ справедливо равенство $\lambda_n(\mu\widetilde{A}) = \lambda_n(\mu A) - \lambda\mu / \mu_0$. Учитывая, что $\lambda_n(\mu_0 A) = \lambda$, получаем равенство $\lambda_n(\mu_0\widetilde{A}) = 0$. Следовательно, к μ_0 и семейству систем $\langle \mu \rangle_{\widetilde{A}}$ применима лемма 1, из которой вытекает, что при любом μ, принадлежащем той полуоси, которая не содержит точки μ_0, верно неравенство

$$\lambda_n(\mu A) = \lambda_n(\mu\widetilde{A}) + \lambda\mu / \mu_0 \geq \lambda\mu / \mu_0.$$

Лемма 2 доказана.

2. Бэровская характеризация показателей Ляпунова. Теорема, доказанная в этом разделе, дает необходимое условие, которому удовлетворяют показатели Ляпунова $\lambda_n(\mu A)$, $A \in M_n^*$.

Следуя [5, с. 221], лебеговские множества $f^{-1}([r,+\infty))$, $f^{-1}((r,+\infty))$ и $f^{-1}((-\infty,r))$ вещественнозначной функции f, т. е. прообразы при отображении f промежутков $[r,+\infty)$, $(r,+\infty)$ и $(-\infty,r)$, будем обозначать через $[f \geq r]$, $[f > r]$ и $[f < r]$ соответственно. Напомним, что вещественнозначная функция f называется [5, с. 223–224] функцией класса $(*, G_\delta)$, если для каждого $r \in \mathbb{R}$ ее лебеговское множество $[f \geq r]$ является G_δ-множеством. Множество в топологическом пространстве называется G_δ-множеством, если оно представимо в виде счетного пересечения открытых в этом пространстве множеств. Функция f называется [5, с. 223–224] функцией класса $(G,*)$, если для каждого $r \in \mathbb{R}$ ее лебеговское множество $[f > r]$ является открытым множеством. Считаем также, что в $\overline{\mathbb{R}}$ задана естественная (порядковая) топология, так что $\overline{\mathbb{R}}$ гомеоморфно отрезку $[-1,1]$. Введем ограничивающее преобразование $\ell : \overline{\mathbb{R}} \to [-1,1]$ стандартным образом:

$$\ell(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|+1} & \text{при } x \in \mathbb{R}, \\ \operatorname{sgn}(x) & \text{при } x = \pm\infty. \end{cases}$$

Поскольку отображение ℓ осуществляет сохраняющий порядок гомеоморфизм между $\overline{\mathbb{R}}$ и отрезком $[-1,1]$, то будем говорить, что функция $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ принадлежит бэровскому классу K, если этому же классу принадлежит и композиция $\ell \circ f$.

Т е о р е м а 1. *Для любой системы* $A \in M_n^*$ *функция* $\lambda_n(\mu A) : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ *аргумента* μ *принадлежит классу* $(*, G_\delta)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отображение ℓ непрерывно, следовательно, оно перестановочно с операциями предельного перехода, а значит, отображение $\ell \circ \lambda_n$ можно преобразовать следующим образом:

$$\ell \circ \lambda_n(\mu A) = \ell(\overline{\lim_{t \to +\infty}}\, t^{-1} \ln \| X_{\mu A}(t) \|) = \ell(\lim_{s \to +\infty} \sup_{t \geq s} t^{-1} \ln \| X_{\mu A}(t) \|) = \lim_{s \to +\infty} \sup_{t \geq s} \ell(t^{-1} \ln \| X_{\mu A}(t) \|). \quad (4)$$

По теореме о непрерывной зависимости решения от параметра функция $t^{-1} \ln \| X_{\mu A}(t) \|$ аргумента μ непрерывна (при любом фиксированном t). Следовательно, функция $\varphi_s(\mu) = \sup_{t \geq s} \ell(t^{-1} \ln \| X_{\mu A}(t) \|)$ – супремум континуального параметризованного числом $t \geq 0$ семейства непрерывных функций, а значит, согласно [5, с. 237], является функцией класса $(G,*)$. Получаем семейство $\{\varphi_s(\mu)\}_{s \in \mathbb{R}}$ функций аргумента μ, параметризованное вещественным параметром $s \in \mathbb{R}$, по которому совершается предельный переход в последнем выражении равенства (4). Заметим, что при любом фиксированном значении μ последовательность значений этих функций является невозрастающей функцией от s. Следовательно, формулу (4) можно переписать в виде

$$\ell \circ \lambda_n(\mu A) = \lim_{s \to +\infty,\, s \in \mathbb{Q}} \varphi_s(\mu),$$

откуда, согласно [5, с. 227], следует, что отображение $\ell \circ \lambda_n(\mu A)$ является функцией класса $(*, G_\delta)$. Теорема 1 доказана.

3. Описание показателей на полуоси. Из утверждений теоремы 1 и леммы 1 следует, что каждая функция из $\mathfrak{L}_n^n$, $n \in \mathbb{N}$, принадлежит классу $(*, G_\delta)$ и хотя бы на одной из полуосей неотрицательна. Теорема этого пункта устанавливает, что любая функция $\mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ класса $(*, G_\delta)$, неотрицательная на какой-либо полуоси, может быть реализована как сужение на эту полуось некоторого показателя Ляпунова из $\mathfrak{L}_n^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Т е о р е м а 2. *Для любой функции* $f(\cdot) : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ *класса* $(*, G_\delta)$, *принимающей только неотрицательные значения на некоторой полуоси, существует такая система* $A \in M_n^*$, *что старший показатель Ляпунова системы* $\langle \mu \rangle_A$ *как функция вещественного аргумента* μ *совпадает с* $f(\cdot)$ *на этой полуоси.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Не ограничивая общности, будем считать, что $f(\cdot)$ неотрицательна на интервале $[0,+\infty)$ (случай $(-\infty;0]$ аналогичен). Нам потребуются некоторые дополнительные построения, которые мы будем выписывать как отдельные пункты.

3.1. Для построения нужного семейства (2) воспользуемся конструкцией работ [6, 7]. Эту конструкцию, поскольку она существенно используется в дальнейших построениях, мы сейчас опишем, дополнив необходимыми нам вычислениями. Зафиксируем какие-либо кусочно-непрерывные 2×2-матрицу $B(\cdot)$ и функцию $\omega(\cdot)$ и возьмем матрицу $A(\cdot)$ системы (1), где $n = 2$, в виде:

$$A(t) = U^{-1}(t)B(t)U(t) - U^{-1}(t)dU(t)/dt, \quad t \geq 0, \tag{5}$$

здесь $U(t)$ – матрица поворота на угол $\varphi(t) = \int_0^t \omega(\tau)\mathrm{d}\tau$ по ходу часовой стрелки (не нарушая общности, считаем ортонормальную систему координат Ox_1x_2 правой). Сделав в семействе (2) с матрицей $A(\cdot)$, задаваемой равенством (5), линейную замену переменных $y = U(t)x$, придем, как легко убедиться, к следующему семейству:

$$dy/dt = \mu B(t)y + (1-\mu)\omega(t)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} y \equiv C_{B,\omega}(t,\mu)y, \quad y \in \mathbb{R}^2, \quad t \geq 0. \tag{6}$$

Так как матрица $U(t)$ является при каждом $t \geq 0$ ортогональной, то замена переменных $y = U(t)x$ не изменяет нормы решений, а значит, показатели Ляпунова системы $\langle\mu\rangle_A$ семейства (2) с матрицей (5) и системы $\langle\mu\rangle_C$ семейства (6) равны. Таким образом, построение нужной двумерной системы (1) сводится к построению соответствующих матрицы $B(\cdot)$ и функции $\omega(\cdot)$, что значительно проще.

Матрицу $C_{B,\omega}(\cdot;\mu)$ семейства (6) (т. е. матрицу $B(\cdot)$ и функцию $\omega(\cdot)$) будем строить на временно́й полуоси $t \geq 0$ как кусочно-постоянную, составленную из специально подобранных матриц определяемого ниже трехпараметрического семейства матриц.

Рассмотрим следующее трехпараметрическое семейство 2×2-матриц:

$$D(\mu;p) = \begin{pmatrix} \mu a & \mu(b-c)+c \\ -\mu(b-c)-c & -\mu a \end{pmatrix}, \tag{7}$$

зависящее от трех вещественных параметров a, b, c (составленный из них вектор $(a,b,c)^{\mathrm{T}}$ обозначим через p) и переменной $\mu \in \mathbb{R}$. Характеристический многочлен $P(\cdot\,;\mu,p)$ матрицы $D(\mu;p)$, как легко убедиться, равен $P(\nu;\mu,p) = \nu^2 + ((b-c)^2 - a^2)\mu^2 + 2c(b-c)\mu + c^2$. Поэтому его корни $\nu_{1,2}$ отличаются только знаком и оба в зависимости от $\mu \in \mathbb{R}$ либо чисто мнимые, либо вещественные. Очевидно, что корни $\nu_{1,2}$ будут вещественными, если и только если

$$R(\mu;p) \overset{\mathrm{d}ef}{=} (a^2 - (b-c)^2)\mu^2 - 2c(b-c)\mu - c^2 \geq 0. \tag{8}$$

Для тех μ и p, при которых выполнено неравенство (8), через $\nu_2(\mu;p)$ обозначим не меньший корень характеристического многочлена $P(\cdot\,;\mu,p)$, т. е. $\nu_2(\mu;p) = R^{1/2}(\mu;p)$.

Каковы бы ни были вещественные числа r и s $(r < s)$ одного знака (в частности, ненулевые), в качестве параметров a, b и c, при которых множество вещественных решений μ неравенства (8) совпадает с отрезком $[r,s]$, можно взять следующий набор параметров:

$$a = \eta(s-r), \quad b = \eta(2rs - s - r), \quad c = 2\eta rs, \tag{9}$$

где $\eta \in \mathbb{R}$ – любая ненулевая постоянная (в этом легко убедиться непосредственно, подставляя (9) в (8), раскладывая левую часть на множители и учитывая, что $-4\eta^2 rs < 0$). Ниже всегда при выборе тех параметров a, b, c, при которых множество $\mu \in \mathbb{R}$ решений неравенства (8) – отрезок $[r,s]$, считаем, что эти параметры задаются равенствами (9), выбор постоянной η в которых опишем ниже. Вектор $p = (a,b,c)^{\mathrm{T}}$, в котором параметры a, b, c заданы равенствами (9), обозначим через $p(r,s;\eta)$.

Нам понадобятся дополнительные, отличные от [7] оценки корня многочлена $P(\cdot\,;\mu,p)$. Не меньший его действительный корень ν_2 равен

$$\nu_2(\mu;p)=\eta\sqrt{-4rs\mu^2+4(r+s)rs\mu-4r^2s^2}.$$

Максимум этой функции (переменной μ) достигается в середине интервала (r,s) – точке $(r+s)/2$ – и равен $\eta(s-r)\sqrt{rs}$.

Пусть теперь заданы положительные числа q и ε. Выберем η таким, чтобы $q+\varepsilon=\eta(s-r)\sqrt{rs}$, и найдем значение $\delta>0$, при котором $\nu_2(\cdot\,;p)$, где $p=p(r,s;\eta)$, принимает значения из промежутка $[q,q+\varepsilon]$ в точности на отрезке $[2^{-1}(r+s)-\delta,2^{-1}(r+s)+\delta]$. После несложных преобразований получаем

$$\delta=\sqrt{\frac{\varepsilon(2(s-r)\sqrt{rs}-\varepsilon/\eta)}{4rs\eta}}=\frac{(s-r)}{2}\frac{\sqrt{\varepsilon(2q+\varepsilon)}}{q+\varepsilon}.$$

Обозначим множитель $\sqrt{\varepsilon(2q+\varepsilon)}/(q+\varepsilon)$ через $\alpha(q,\varepsilon)$. Легко видеть, что $0\le\alpha(q,\varepsilon)\le 1$.

3.2. Воспользуемся полученным в работе [4] специальным представлением множеств Лебега функций. Функция f, как и любая вещественнозначная функция, однозначно определяется [5, с. 221] своими лебеговскими множествами $[f\ge q_w]$, где $(q_w)_{w\in\mathbb{N}}$ – множество рациональных чисел, занумерованных каким-либо фиксированным образом. Так как f – функция класса $(*,G_\delta)$, то ее лебеговское множество $[f\ge q]$ для любого $q\in\mathbb{R}$ является G_δ-множеством, а значит, представимо в виде счетного пересечения открытых множеств. Пусть для $q=q_w$ это представление имеет вид

$$[f\ge q_w]=\bigcap_{i\in\mathbb{N}}\tilde{\Gamma}_w^i,\ \text{где}\ \tilde{\Gamma}_w^1\supset\tilde{\Gamma}_w^2\supset\ldots\supset\tilde{\Gamma}_w^i\supset\ldots \tag{10}$$

(цепочку включений в (10) считаем выполненной без нарушения общности).

Представления (10) ввиду большого произвола в выборе открытых множеств $\tilde{\Gamma}_w^i$ неудобны для дальнейшего. Поэтому от этого представления, несколько изменив множества $\tilde{\Gamma}_w^i$, перейдем к новому представлению, обладающему важным дополнительным свойством, которое описывает формулируемая ниже лемма 3 из работы [4].

Для каждого $w\in\mathbb{N}$ через $\Theta(w)$ обозначим конечное множество, состоящее из тех натуральных чисел $j<w$, для которых $q_j<q_w$, и определим множество

$$\Gamma_w^i=\Big(\bigcap_{m\in\Theta(w)}\tilde{\Gamma}_m^{i+w}\Big)\bigcap\tilde{\Gamma}_w^i,\quad i\in\mathbb{N},\quad w\in\mathbb{N}. \tag{11}$$

Определенные равенством (11) множества Γ_w^i, очевидно, открыты и, как показывает следующая лемма, обладают как свойством, аналогичным (10), так и еще одним важным дополнительным свойством.

Л е м м а 3 [4]. *При всех $w\in\mathbb{N}$ верно представление*

$$[f\ge q_w]=\bigcap_{i\in\mathbb{N}}\Gamma_w^i,\ \text{где}\ \Gamma_w^1\supset\Gamma_w^2\supset\ldots\supset\Gamma_w^i\supset\ldots$$

Кроме того, каждая точка $b\in B$, не принадлежащая множеству $[f\ge q_w]$, принадлежит не более чем конечному количеству множеств Γ_j^i, где $i\in\mathbb{N}$ и $j\in\mathbb{N}$, такое, что $q_j\ge q_w$.

Поскольку нам важны значения на положительной полуоси, то пересечем все множества в равенстве леммы 3 с открытым множеством $(0,+\infty)$, при этом получим равенство

$$[f\ge q_w]\cap(0,+\infty)=\bigcap_{i\in\mathbb{N}}(\Gamma_w^i\cap(0,+\infty)),\ \text{где}\ \Gamma_w^1\supset\Gamma_w^2\supset\ldots\supset\Gamma_w^i\supset\ldots \tag{12}$$

Обозначим для удобства множества $G_w^i = \Gamma_w^i \cap (0,+\infty)$.

Построим теперь представление самих открытых множеств G_w^i в виде, которым будем пользоваться в дальнейшем. Каждое открытое множество G_w^i вещественной оси является объединением непересекающихся интервалов $G_w^i = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_w^i(k)$.

Определим функцию $\varepsilon(w,i)$ равенством $\varepsilon(w,i) = (w^2+i^2)^{-2}$ (на самом деле нам достаточно, чтобы она стремилась к нулю при стремлении w и i к $+\infty$).

По заданному значению $\varepsilon(w,i)$ интервал $I_w^i(k)$ представим в виде объединения специально подобранных конечных интервалов $I_w^i(k) = \bigcup_{l\in\mathbb{Z}} \Delta_w^i(k,l)$, причем случаи конечных и бесконечных интервалов $I_w^i(k)$ рассмотрим отдельно, для краткости обозначив $\alpha(q_w, \varepsilon(w,i)) = \alpha$.

Случай 1. Интервал $I_w^i(k)$ конечен и равен (r,s). Тогда пусть $\Delta_w^i(k,0) = (r,s)$. При $l\in\mathbb{N}$ будем строить интервалы последовательно так, что левый конец интервала $\Delta_w^i(k,l)$ совпадает с точкой r, а длина $|\Delta_w^i(k,l)|$ равна $|\Delta_w^i(k,l-1)|\cdot(1-\alpha)/(1+\alpha)$. При $-l\in\mathbb{N}$ будем строить интервалы последовательно так, что правый конец интервала $\Delta_w^i(k,l)$ совпадает с точкой s, а длина $|\Delta_w^i(k,l)|$ равна $|\Delta_w^i(k,l+1)|\cdot(1-\alpha)/(1+\alpha)$.

Случай 2. Интервал $I_w^i(k)$ бесконечен и равен $(r,+\infty)$. Тогда пусть $\Delta_w^i(k,0) = (r, r+1)$. При $l\in\mathbb{N}$, как и в случае 1, будем строить интервалы последовательно так, чтобы левый конец $\Delta_w^i(k,l)$ совпадал с r, а длина $|\Delta_w^i(k,l)|$ равнялась $|\Delta_w^i(k,l-1)|\cdot(1-\alpha)/(1+\alpha)$. При $-l\in\mathbb{N}$ положим $\Delta_w^i(k,l) = (r-l\alpha; r+1-l\alpha)$.

Присоединяя к интервалу $\Delta_w^i(k,l)$ его концы, получаем отрезок, который будем обозначать $\overline{\Delta_w^i}(k,l)$.

Зафиксируем какую-нибудь биекцию $o:\mathbb{N}\to U$, где множество $U\subset \mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{Z}$ – множество всевозможных четверок (w,i,k,l) индексов, при которых определены интервалы $\Delta_w^i(k,l)$. Каждое натуральное число m однозначно задает четверку индексов $(w,i,k,l) = o(m)$, для упрощения записи будем писать $q(m)$, $\varepsilon(m)$, $\Delta(m)$ вместо q_w, $\varepsilon(w,i)$, $\Delta_w^i(k,l)$. По заданным $q(m), \varepsilon(m)$ и отрезку $[r,s] = \overline{\Delta}(m)$, согласно п. 3.1, однозначно определяется значение η, которое задает вектор $p(m) = p(r,s;\eta)$. Пусть $\nu_2(\mu;m)$ обозначает функцию аргумента μ, равную $\nu_2(\mu; p(m))$ на отрезке $\overline{\Delta}(m)$, которую доопределим как тождественно нулевую на $\mathbb{R}\setminus\overline{\Delta}(m)$, причем коэффициенты a, b, c вектора $p(m)$ в этом случае тоже для удобства будем обозначать $a(m)$, $b(m)$, $c(m)$.

Основное для нас свойство построенных интервалов $\Delta_w^i(k,l)$ состоит в том, что при фиксированных w,i,k каждая точка множества $I_w^i(k)$ принадлежит конечному числу из них, и, кроме того, при подстановке в функции $\nu_2(\cdot\,,p)$, соответствующие интервалам $\Delta_w^i(k,l)$ при всевозможных целых l, принимает значения из отрезка $[q_w, q_w+\varepsilon(w,i)]$ не более двух раз.

3.3. Построение требуемой системы. Построим вначале двумерную систему $A\in M_2^*$, такую, что старший коэффициент Ляпунова системы $\langle\mu\rangle_A$, как функция вещественного аргумента μ, совпадает с $f(\cdot)$ при всех $\mu\in[0,+\infty)$. Чтобы не загромождать построения, эту систему строим вначале кусочно-непрерывной, затем подправим ее до бесконечно дифференцируемой системы с тем же старшим показателем. Построение системы A, согласно разд. 1 работы, сводим к построению соответствующих 2×2-матрицы $B(\cdot)$ и функции $\omega(\cdot)$ семейства (5), т. е. матрицы $C_{B,\omega}(\cdot,\mu)$. Построение пары $(B(\cdot),\omega(\cdot))$ будем вести индукцией по шагам. На k-м шаге ($k\in\mathbb{N}$) эта пара будет строиться на некотором полуинтервале $(T_k, T_{k+1}]$, и на следующих шагах их значения на этом полуинтервале уже изменяться не будут. Сама последовательность $(T_k)_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ будет выбрана в следующем пункте, пока же предполагаем только, что $(T_k)_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \nearrow +\infty$. Чтобы иметь базу индукции, сделаем нулевой шаг, на котором положим $T_0 = 0$, $T_1 = 1$, а $B(t)\equiv O_2$ и $\omega(t)\equiv 0$ при $t\in[0,1]$. Пусть сделано $k-1$ шагов, т. е. матрица $B(t)$ и функция $\omega(t)$ определены при всех $t\in[0,T_k]$. Сделаем k-й шаг.

Введем обозначение $T_k' = (T_k + T_{k+1})/2$ для всех $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Пару $(B(\cdot), \omega(\cdot))$ зададим на полуинтервале $(T_k, T_{k+1}]$ равенствами:

$$B(t) = \begin{pmatrix} a(k) & b(k) \\ -b(k) & -a(k) \end{pmatrix} \text{ при } t < T_k' \text{ и } B(t) = \begin{pmatrix} -a(k) & -b(k) \\ b(k) & a(k) \end{pmatrix} \text{ при } t \geq T_k',$$

$$\omega(t) = c(k) \text{ при } t < T_k' \text{ и } \omega(t) = -c(k) \text{ при } t \geq T_k'. \qquad (13)$$

Эти построения задают матрицу $B(\cdot)$ и функцию $\omega(\cdot)$ при всех $t \geq 0$. Матрицу $C_{B,\omega}(t,\mu)$ семейства (6) с построенными матрицей $B(t)$ и функцией $\omega(t)$ обозначим через $C(t,\mu)$, через $\langle \mu \rangle_C$ – систему $\langle \mu \rangle$ этого семейства, а через $X_\mu(\cdot\,,\,\cdot)$ – матрицу Коши системы $\langle \mu \rangle_C$. Согласно равенствам (6), (7) и (13), матрица $C(\cdot\,,\,\cdot)$ кусочно-постоянна на временно́й полуоси и при всех $k \in \mathbb{N}$ справедливы равенства

$$C(t,\mu) = D(\mu; p(k)), \text{ если } t \in [T_k, T_k'),$$

$$C(t,\mu) = -D(\mu; p(k)), \text{ если } t \in [T_k', T_{k+1}). \qquad (14)$$

До конца доказательства $A(\cdot)$ обозначает матрицу, связанную с построенными матрицей $B(\cdot)$ и функцией $\omega(\cdot)$ равенством (5).

3.4. Вычисление старшего показателя. Покажем, что можно так задать последовательность $(T_k)_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$, чтобы старший показатель Ляпунова построенного семейства совпадал с функцией $f(\cdot)$ на всей положительной полуоси.

Докажем, что для всех $\mu \in (0, +\infty)$ справедливо равенство

$$\overline{\lim_{k \to +\infty}}\, \nu_2(\mu, k) = f(\mu). \qquad (15)$$

Выберем возрастающую последовательность рациональных чисел $(q_{w_i})_{i \in \mathbb{N}} \nearrow f(\mu)$. Тогда, по определению функций ν_2, найдется последовательность натуральных чисел $(m_i)_{i \in \mathbb{N}}$, для которой $\nu_2(\mu, m_i) \in [q_{w_i}, q_{w_i} + \varepsilon(w_i)]$ хотя бы один раз при каждом $i \in \mathbb{N}$. Это означает, что справедливо неравенство $\overline{\lim_{k \to +\infty}}\, \nu_2(\mu, k) \geq f(\mu)$.

Для завершения доказательства осталось показать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует не более, чем конечное количество индексов m таких, что

$$\nu_2(\mu, m) \geq f(\mu) + \varepsilon. \qquad (16)$$

Оценим сверху количество таких m. Выберем номер $w \in \mathbb{N}$, для которого выполнено двойное неравенство $f(\mu) \leq q_w < f(\mu) + \varepsilon$. Тогда $\mu \notin [f \geq q_w]$, а значит, по лемме 3 точка μ может принадлежать лишь конечному количеству множеств G_i^m, где $m \in \mathbb{N}$, а $q_i > q_w$. Но каждая точка множества G_i^m принадлежит не более, чем конечному количеству интервалов $\Delta_i^m(k,l)$ по построению этих интервалов. Следовательно, при всех $i \in \mathbb{N}$, при которых $q_i > q_w$ неравенство (16) выполняется не более, чем конечное количество раз.

Остались еще номера $i \in \mathbb{N}$, для которых $q_i \leq q_w$. Начиная с некоторого номера J, все члены последовательности $(\varepsilon(j))_{j \in \mathbb{N}}$ будут меньше, чем положительное число $f(\mu) + \varepsilon - q_w$, а значит, и максимум функции $\nu_2(\mu; m)$ будет не больше, чем q_w при всех $m \in \mathbb{N}$, таких, что $o(m) = (i, \ldots)$, $m \geq J$, $q_i \leq q_w$. И в этом случае получили, что неравенство (16) выполняется не более, чем конечное количество раз. Равенство (15) доказано.

По построению системы показатель $\lambda_2(\mu A)$ будет вычисляться как верхний предел величин $\nu_2(\mu; k)(t - T_k)/t$, где $t \in [T_k, T_k']$, $k \in \mathbb{N}$. Понятно, что максимум этих величин достигается в середине отрезков $[T_k, T_{k+1}]$, откуда получается формула $\lambda_2(\mu A) = \overline{\lim_{k \to +\infty}}\, \nu_2(\mu; k) T_k' / (T_k + T_k')$. Потребуем теперь, чтобы $T_k'/T_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$, тогда $\lim_{k \to +\infty} T_k'/(T_k + T_k') = 1$, и, следовательно, верно равенство

$$f(\mu)=\overline{\lim_{k\to+\infty}}\,\nu_2(\mu;k)=\overline{\lim_{k\to+\infty}}\,\nu_2(\mu;k)T_k'/(T_k+T_k')=\lambda_2(\mu A). \qquad (17)$$

3.5. Построение бесконечно дифференцируемой системы. Для завершения доказательства подправим систему, построенную в п. 3.1–3.4, до бесконечно дифференцируемой с тем же показателем $\lambda_2(\mu A)$. Для этого подправим кусочно-постоянные функции $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ до бесконечно дифференцируемых так, чтобы при всех вещественных μ старший показатель Ляпунова системы $\langle\mu\rangle_C$ не изменился.

Докажем вначале одно вспомогательное утверждение. Пусть имеется некоторая система $C\in M_n^*$. Покажем, что если существует такая $n\times n$-матрица $Q(t)$, $t\ge 0$, что $\sup\limits_{0\le\tau\le t}\|C(\tau)\|=h(t)$, $\sup\limits_{0\le\tau\le t}\|C(\tau)+Q(\tau)\|=h(t)$ и сходится несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\|Q(\tau)\|\exp\left(2\int\limits_0^{\tau}h(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau$ (обозначим его I), то для любых фундаментальных матриц $Y(\cdot)$ системы $\langle\mu\rangle_C$ и $Z(\cdot)$ системы

$$\dot z=(C(t)+Q(t))z,\ z\in\mathbb{R}^n,\quad t\ge 0 \qquad (18)$$

найдутся положительные постоянные c_0 и c_1, для которых $c_0\|Y(t)\|\le\|Z(t)\|\le c_1\|Y(t)\|$ при всех $t\ge 0$. Действительно, так как $Z(t)=Y(t)(Y^{-1}(0)Z(0)+\int\limits_0^t Y^{-1}(\tau)Q(\tau)Z(\tau)\mathrm{d}\tau)$, $t\ge 0$, а $\|Y^{-1}(t)\|\le c\exp(h(t))$ и $\|Z(t)\|\le c\exp(h(t))$ при всех $t\ge 0$, где c – некоторая постоянная, то $\|Z(t)\|\le\|Y(t)\|(\|Y^{-1}(0)Z(0)\|+c^2I)$, что и доказывает правое из нужных неравенств. Поменяв в этих рассуждениях системы $\langle\mu\rangle_C$ и (18) местами, получим левое неравенство. Следовательно, у систем C и $C+Q$ совпадают старшие показатели Ляпунова.

Пусть $\langle\mu\rangle_C$ – система, построенная в п. 3.1–3.4 доказательства. По построению матрица $C(t,\mu)$ системы является кусочно-постоянной, значит, она ограничена на каждом числовом промежутке $[0,t]$ и корректно определена функция $h(t,\mu)=\sup\limits_{0\le\tau\le t}\|C(\tau,\mu)\|$. При фиксированном $t>0$ множество коэффициентов a,b,c матрицы $C(\tau,\mu)$, $0\le\tau\le t$, – конечный набор троек, для которых обозначим $g(t)=\max(|a|,|b-c|,|c|)$, где максимум берется по всем этим тройкам. По определению $h(t,\mu)$ получаем неравенство $h(t,\mu)\le g(t)(|\mu|+1)$.

Рассмотрим последовательность точек $(\tau_k)_{k\in\mathbb{N}}$ такую, что $\tau_{2k-1}=T_k$, $\tau_{2k}=T_k'$ при всех натуральных k (подчеркнем, что эта последовательность не зависит от μ). Тогда матрица $B(\cdot)$ и функция $\omega(\cdot)$ могут иметь точки разрыва только среди $(\tau_k)_{k\in\mathbb{N}}$, следовательно, и множество точек разрыва матрицы $C(t,\mu)$ содержится среди $(\tau_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Для каждой точки τ_k возьмем на временно́й полуоси отрезок $d_k=[\tau_k,\tau_k']$ с началом в этой точке и длины $\|d_k\|=\tau_k'-\tau_k=k^{-2}g(\tau_{k+1})^{-1}\exp(-k\tau_k g(\tau_{k+1}))$, $k\in\mathbb{N}$ (если найдутся пересекающиеся отрезки или отрезки длиннее 1, то их длину просто уменьшим произвольным образом так, чтобы новые отрезки не пересекались). Для кусочно-постоянной функции $a(t)$ определим измененную функцию стандартным образом:

$$\tilde a(t)=\begin{cases} a(t), & \text{если}\ \ t\in[0,+\infty)\setminus\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}}d_k,\\ \psi((t-\tau_k)/|d_k|)a(\tau_k)+\psi((\tau_k'-t)/|d_k|)a(\tau_k'), & \text{если}\ \ t\in d_k,\quad k\in\mathbb{N},\end{cases} \qquad (19)$$

где $k\in\mathbb{N}$, а $\psi(\cdot):\mathbb{R}\to[0,1]$ – какая-либо бесконечно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям $\psi(0)=1$, $\psi(1)=0$ и $\psi^{(m)}(0)=\psi^{(m)}(1)=0$ при всех $m\in\mathbb{N}$. Очевидно, что у функции $\tilde a(\cdot)$ существуют все частные производные любого порядка. Определим аналогичным образом функции $\tilde b(t)$ и $\tilde c(t)$.

Заменим теперь в системе $\langle\mu\rangle_A$ коэффициенты $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ коэффициентами $\tilde a(t)$, $\tilde b(t)$, $\tilde c(t)$ и полученную систему обозначим через $\langle\mu\rangle_{\tilde A}$. Покажем, что утверждение, сформулированное в начале этого пункта, можно применить к соответствующим системам $C(t,\mu)$ и $\widetilde C(t,\mu)$. Заметим, что при всех $\mu\in\mathbb{R}$ по определению $\widetilde{C}(t,\mu)$ верно равенство $\sup\limits_{0\le\tau\le t}\|C(\tau,\mu)\|=\sup\limits_{0\le\tau\le t}\|\widetilde{C}(\tau,\mu)\|=h(t,\mu).$ Остается доказать сходимость интеграла $\int\limits_0^{+\infty}\|Q(\tau,\mu)\|\exp\left(2\int\limits_0^{\tau}a(s,\mu)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau,$ где $Q(\tau,\mu)=\widetilde{C}(\tau,\mu)-C(\tau,\mu).$ Из определения функций $\tilde{a}(t),\ \tilde{b}(t),\ \tilde{c}(t)$ и линейности коэффициентов матрицы $Q(\tau,\mu)$ по μ следует неравенство $\|Q(\tau,\mu)\|\le 2h(\tau,\mu)\le 2g(t)(|\mu|+1).$

Теперь сходимость интеграла $\int\limits_0^{+\infty}\|Q(\tau,\mu)\|\exp\left(2\int\limits_0^{\tau}h(s,\mu)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau$ следует из сходимости ряда

$$2\sum_{k=1}^{+\infty}\int\limits_{\tau_k}^{\tau_k'}g(\tau_k')(|\mu|+1)\exp\left(2\int\limits_0^{\tau}h(s,\mu)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau. \qquad (20)$$

Оценим каждое слагаемое сверху:

$$\int\limits_{\tau_k}^{\tau_k'}\exp\left(2\int\limits_0^{\tau}h(s,\mu)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}\tau\le k^{-2}g(\tau_{k+1})^{-1}\exp\big(2(\tau_k'g(\tau_k')(|\mu|+1)-\tau_k g(\tau_{k+1})k)\big),$$

учитывая, что из определения τ_k' вытекает неравенство $g(\tau_k')\le g(\tau_{k+1}),$ получаем, что при всех k, начиная с некоторого номера, выполняется неравенство $\tau_k'g(\tau_k')(|\mu|+1)-\tau_k g(\tau_{k+1})k\le$ $\le\tau_k'(|\mu|+1)-\tau_k k<0$, т. е., начиная с некоторого номера, ряд (20) будет мажорироваться сходящимся рядом $2(|\mu|+1)\sum\limits_{k=1}^{+\infty}k^{-2}$. Следовательно, утверждение из начала пункта применимо к системам $C(t,\mu)$ и $\widetilde{C}(t,\mu)$, т. е. мы построили бесконечно дифференцируемую систему с той же зависимостью старшего показателя от параметра-множителя. Для построения n-мерной системы ($n\ge 3$), удовлетворяющей условиям теоремы 2, достаточно дополнить построенную 2×2-матрицу $A(\cdot)$ нулями. Теорема 2 доказана.

Отметим, что из конструкции следует, что стрcheck старший показатель Ляпунова построенной системы на полуоси $(-\infty,0]$ всегда равен нулю.

4. Описание показателя. Теоремы этого раздела дают полное описание старшего показателя Ляпунова системы (2) как функции параметра-множителя при дополнительном предположении о конечности этого показателя в точке на полуоси.

Т е о р е м а 3. *Для любой системы $A\in M_n^*$ функция $\lambda_n(\mu A):\mathbb{R}\to\overline{\mathbb{R}}$ аргумента μ принадлежит классу $(*,G_\delta)$, обращается в нуле в нуль, принимает на одной из числовых полуосей только неотрицательные значения. Кроме того, если среди этих неотрицательных значений есть хотя бы одно конечное, то найдется такое вещественное число $b\in\mathbb{R}$, что при всех $\mu\in\mathbb{R}$ верно неравенство $\lambda_n(\mu A)\ge b\mu$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение о принадлежности старшего показателя классу $(*,G_\delta)$ установлено в теореме 1. Утверждение о том, что $\lambda_n(0\cdot A)=0$ очевидно, так как в этом случае матрица $\langle\mu\rangle_A$, тождественно равна нулевой. Неотрицательность старшего показателя на одной из числовых полуосей (обозначим ее L) доказана в лемме 1. Из предположения теоремы следует, что существует вещественное число $b=\inf\limits_{\mu\in L}\lambda_n(\mu A)/|\mu|$. Если $L=(-\infty,0]$, то возьмем число b с противоположным знаком. Теперь последнее утверждение теоремы следует из леммы 2 и выбора числа b. Теорема 3 доказана.

Утверждение теоремы 3 обратимо, как показывает следующая

Т е о р е м а 4. *Для любой функции $f(\cdot):\mathbb{R}\to\overline{\mathbb{R}}$ класса $(*,G_\delta)$, обращающейся в нуле в нуль, принимающей только неотрицательные значения на некоторой полуоси и при всех $\mu\in\mathbb{R}$ удовлетворяющей неравенству $f(\mu)\ge b\mu$ для некоторого числа $b\in\mathbb{R}$, существует такая система $A\in M_n^*$, что старший показатель Ляпунова системы $\langle\mu\rangle_A$, как функция вещественного аргумента μ совпадает с $f(\cdot)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим функцию $\widetilde{f}(\mu) = f(\mu) - b\mu$, так как вычитание непрерывной функции $b\mu$ сохранит принадлежность классу $(*, G_\delta)$, то из неравенства $f(\mu) \geq b\mu$ следует, что к функции $\widetilde{f}(\cdot)$ применима конструкция теоремы 2. Применим к $\widetilde{f}(\cdot)$ конструкцию теоремы 2, несколько изменив ее. А именно, в равенстве (12) будем пересекать множества не с открытым интервалом $(0, +\infty)$, а с открытым множеством $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (в п. 3.2 существенно лишь то, что концы отрезков $[r, s]$ одного знака, а случай 2 этого пункта для интервалов вида $(-\infty, r)$ рассматривается аналогично). Таким образом, найдется система $\widetilde{A} \in M_n^*$, что старший показатель Ляпунова системы $\langle\mu\rangle_{\widetilde{A}}$, как функция вещественного аргумента μ совпадает с $\widetilde{f}(\cdot)$. Осталось заметить, что из доказательства леммы 2 следует, что, если обозначить $A = \widetilde{A} + bE_n$, старший показатель Ляпунова системы $\langle\mu\rangle_A$, как функция вещественного аргумента μ совпадает с $f(\cdot)$.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю Е. А. Барабанову за постановку задачи и внимание, проявленное к работе.

Литература

1. *Ляпунов А. М.* Собр. соч: в 6 т. М.; Л., 1956. Т. 2.

2. *Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М., 1966.

3. *Зубов В. И.* Колебания и волны. Л., 1989.

4. *Карпук М. В.* // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50, № 10. С. 1332–1338.

5. *Хаусдорф Ф.* Теория множеств. М.; Л., 1937.

6. *Барабанов Е. А.* // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45, № 8. С. 1067–1084.

7. *Барабанов Е. А.* // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46, № 5. С. 611–625.

M. V. KARPUK

LARGEST LYAPUNOV EXPONENT OF THE LINEAR DIFFERENTIAL SYSTEM WITH A PARAMETER-MULTIPLIER AS A FUNCTION OF PARAMETER

Summary

The largest Lyapunov exponents of linear differential systems $dx/dt = \mu A(t)x$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$, with a real parameter-multiplier as a function of the parameter are considered. It is proved that the largest Lyapunov exponent is a function of a Baire class $(*, G_\delta)$, which vanishes at zero and satisfies one of the two cases: 1) it exceeds the linear function; 2) it is equal to the plus infinity on some real semi-axis. In the first case, the sufficiency of the given necessary conditions is proved.