УДК 517.925

В. В. АМЕЛЬКИН, М. Н. ВАСИЛЕВИЧ

ПОСТРОЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ФУКСА С ЧЕТЫРЬМЯ КОНЕЧНЫМИ ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ И ЗАДАННОЙ ПРИВОДИМОЙ ГРУППОЙ МОНОДРОМИИ

Белорусский государственный университет

(Поступила в редакцию 24.10.2014)

Пусть $X = \mathbb{CP}^1$ – комплексная проективная прямая, α_j, $j = \overline{1, n}$, – произвольные точки на прямой X, $\bar{M} = \bigcup_{j=1}^{n} \alpha_j$. На открытом множестве $M = X \setminus \bar{M}$ рассмотрим уравнение Фукса

$$dY = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{U_j}{x - \alpha_j} \right) Y dx, \tag{1}$$

где Y – квадратная матрица порядка m; U_j – $m \times m$-матрицы-вычеты уравнения, удовлетворяющие условию

$$\sum_{j=1}^{n} U_j = 0. \tag{2}$$

Согласно теореме о сумме вычетов, условие (2) означает, что точки $x = \infty$ нет среди особых точек матричного уравнения (1), чего всегда можно добиться конформным преобразованием $\mathbb{CP}^1$.

Пусть x_0 – отмеченная точка открытого множества M. Обозначим через $\Phi_{x0}(x)$ фундаментальную матрицу решений уравнения (1), нормированную в точке x_0, через $[\gamma_j]$ класс гомотопных замкнутых петель γ_j, выходящих из точки x_0 и охватывающих точку α_j, $j = \overline{1, n}$. Классы гомотопных петель порождают фундаментальную группу $\pi_1(M, x_0)$ открытого множества (многообразия) M. Матрица $\Phi^j_{x_0}(x)$, полученная из матрицы $\Phi_{x0}(x)$ аналитическим продолжением вдоль петли γ_j, представляется в виде $\Phi^j_{x_0}(x) = \Phi_{x0}(x) V_j$, где V_j – квадратная постоянная матрица порядка m. Постоянные матрицы V_j, называемые матрицами монодромии, будем задавать так, чтобы выполнялось соотношение

$$\prod_{j=1}^{n} V_j = E, \tag{3}$$

где E – единичная матрица.

При выполнении условия (3) невырожденные матрицы V_j порождают мультипликативную группу, которая является подгруппой общей линейной группы $GL(m; \mathbb{C})$ и называется группой монодромии [1].

С матрицами монодромии $V_j \in GL(m; \mathbb{C})$, $j = \overline{1, n}$, связаны посредством соотношений $V_j = e^{2\pi i W_j}$ квадратные матрицы W_j, которые называют показательными матрицами монодромии и которые играют определяющую роль в решаемой ниже задаче.

Пусть задан гомоморфизм

$$\chi : \pi_1(M, x_0) \to GL(m; \mathbb{C}) \tag{4}$$

фундаментальной группы многообразия M в мультипликативную группу $GL(m; \mathbb{C})$ невырожденных комплекснозначных матриц порядка m.

Гомоморфизм (4) называют монодромией или представлением монодромии уравнения (1).

В работе [1] доказано, что для любого набора точек $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ при $n > 3$ и любого $m \geq 3$ найдется такая монодромия (4), для которой не существует реализующего ее уравнения Фукса. Доказано также, что для любых трех точек $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и любой монодромии (4) размерности $m = 3$ существует уравнение (1), (2), реализующее заданную монодромию.

Обратимся к случаю $n = 4$, $m = 2$, т. е. рассмотрим уравнение

$$dY = \left(\sum_{j=1}^{4} \frac{U_j}{x - \alpha_j} \right) Y dx, \tag{5}$$

где Y – квадратная матрица порядка 2, U_j – постоянные (не зависящие от x) 2×2-матрицы, удовлетворяющие условию (2) при $n = 4$.

В этом случае, как отмечалось в статье [2], из результатов работы [3] вытекает существование уравнения (5), (2) с заданными особыми точками $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, фундаментальная матрица решений которого реализует заданный гомоморфизм (4).

Обозначим

$$A = 2\alpha_2\alpha_3 - \alpha_1(\alpha_2 + \alpha_3), \quad B = \alpha_1(\alpha_3 - \alpha_2), \quad C = \alpha_2 + \alpha_3 - 2\alpha_1, \quad D = \alpha_3 - \alpha_2,$$

считая, что $A - \alpha_j C \neq 0$, $j = \overline{1, 4}$.

Т е о р е м а 1. *Уравнение* (5) *с конечными особыми точками* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ *приводится дробно-линейным преобразованием*

$$x = \frac{Az + B}{Cz + D}, \quad AD - BC \neq 0, \tag{6}$$

к уравнению

$$dY = \left(\frac{U_1}{z} + \frac{U_2}{z - 1} + \frac{U_3}{z + 1} + \frac{U_4}{z - \alpha} \right) Y dz \tag{7}$$

с особыми точками $\overline{\alpha}_1 = 0, \overline{\alpha}_2 = 1, \overline{\alpha}_3 = -1, \overline{\alpha}_4 = \alpha$, *где*

$$\alpha = \frac{\alpha_4 D - B}{A - \alpha_4 C}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если в уравнении (5) сделать замену (6), то

$$dY = \left(\sum_{j=1}^{4} \frac{U_j}{z(A - \alpha_j C) + B - \alpha_j D} \right) \frac{AD - BC}{Cz + D} Y dz. \tag{8}$$

Замечая тогда, что

$$\frac{U_j(AD - BC)}{\big(z(A - \alpha_j C) + B - \alpha_j D\big)(Cz + D)} = \frac{(A - \alpha_j C)U_j}{z(A - \alpha_j C) + B - \alpha_j D} - \frac{CU_j}{Cz + D},$$

приходим к выводу, что поскольку должно выполняться равенство (2) ($n = 4$), то уравнение (8) принимает вид

$$dY = \left(\sum_{j=1}^{4} \frac{U_j}{z - \dfrac{\alpha_j D - B}{A - \alpha_j C}} \right) Ydz. \tag{9}$$

Полагая в (9)

$$\overline{\alpha}_j = \frac{\alpha_j D - B}{A - \alpha_j C},$$

получаем $\overline{\alpha}_1 = 0$, $\overline{\alpha}_2 = 1$, $\overline{\alpha}_3 = -1$, $\overline{\alpha}_4 = \alpha$, что и требовалось доказать.

Напомним далее, что набор матриц B_j, $j = \overline{1, n}$, называется приводимым, если все эти матрицы могут быть одновременно приведены к верхнетреугольному виду одним линейным невырожденным преобразованием.

Задача [4; 5, с. 59]. Заданы некоммутативные приводимые показательные матрицы монодромии второго порядка W_j, $j = \overline{1, 4}$, собственные значения которых всегда можно считать равными ξ_j, 0, такие, что $-1 < \xi_j < 0$, $j = \overline{1, 3}$, $\xi_4 = 1$. Требуется построить матричное дифференциальное уравнение (7), фундаментальная матрица решений которого в окрестности особых точек $\overline{\alpha}_j$, $j = \overline{1, 3}$, α имеет соответственно вид

$$\Phi^j(z) = \Phi_j^*(z)(z - \overline{\alpha}_j)^{W_j}, \quad j = \overline{1, 3}, \quad \Phi^4(z) = \Phi_4^*(z)(z - \alpha)^{\Lambda_0}(z - \alpha)^N,$$

где $\Phi_j^*(z)$, $\Phi_4^*(z)$ – голоморфно обратимы в особых точках, Λ_0 – диагональная матрица, а N – нильпотентная матрица. Здесь матрицы U_j надо найти как функции W_j, $j = \overline{1, 4}$, и выявить природу этих функций.

Замечание 1. В сформулированной задаче точка нормирования фундаментальной матрицы решений – это $z_0 = \infty$.

Считая теперь, что матрицы W_j, $j = \overline{1, 3}$, уже приведены к верхнетреугольному виду, их можно для определенности рассматривать в виде

$$W_j = \begin{pmatrix} \xi_j & \mu_j \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1, 3}. \tag{10}$$

А тогда

$$V_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & \nu_j \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1, 3}, \quad V_4 = \begin{pmatrix} 1 & \nu_4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{11}$$

где

$$\lambda_j = e^{2\pi i \xi_j}, \quad \nu_j = \frac{\mu_j}{\xi_j}(\lambda_j - 1), \quad j = \overline{1, 3}, \quad \nu_4 = -\left(\frac{\nu_1}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} + \frac{\nu_2}{\lambda_2 \lambda_3} + \frac{\nu_3}{\lambda_3} \right).$$

Далее, поскольку собственные значения матриц W_j и матриц-вычетов уравнения (7) совпадают [6, с. 159], то матрицы U_j, $j = \overline{1, 3}$, в уравнении (7) представимы [4] в виде

$$U_j = \begin{pmatrix} \xi_j & \theta_j \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1, 3}. \tag{12}$$

Что же касается матрицы U_4, то ее всегда можно привести к виду

$$U_4 = \begin{pmatrix} \xi_4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{13}$$

что мы и будем считать выполненным.

А в таком случае из условия (2) при $n = 4$ следует, что

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + 1 = 0, \quad \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 0. \tag{14}$$

Т е о р е м а 2. *Если в матрицах* (12) *соответственно* $\theta_1 = 2c\alpha,\ \theta_2 = -c(\alpha - 1),\ \theta_3 = -c(\alpha + 1)$, *где c – произвольная вещественная или комплексная постоянная, то уравнение* (7) *вполне интегрируемо.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнение (7) вполне интегрируемо тогда и только тогда, когда [7, с. 41] дифференциальная 1-форма

$$\omega = \left(\frac{U_1}{z} + \frac{U_2}{z-1} + \frac{U_3}{z+1} + \frac{U_4}{z-\alpha} \right) dz$$

удовлетворяет условию

$$d\omega = \omega \wedge \omega, \tag{15}$$

где $\wedge$ – оператор внешнего дифференцирования.

Из соотношения (15) для матриц-вычетов уравнения (7) получаем тогда равенства

$$\begin{aligned} dU_1 &= [U_2, U_1]\, d\ln(0-1) + [U_3, U_1]\, d\ln(0+1) + [U_4, U_1]\, d\ln(0-\alpha), \\ dU_2 &= [U_1, U_2]\, d\ln(1-0) + [U_3, U_2]\, d\ln(1+1) + [U_4, U_2]\, d\ln(1-\alpha), \\ dU_3 &= [U_1, U_3]\, d\ln(-1-0) + [U_2, U_3]\, d\ln(-1-1) + [U_4, U_3]\, d\ln(-1-\alpha), \\ dU_4 &= [U_1, U_4]\, d\ln(\alpha-0) + [U_2, U_4]\, d\ln(\alpha-1) + [U_3, U_4]\, d\ln(\alpha+1), \end{aligned}$$

где $[U_j, U_k]$ – матричный коммутатор, которые можно переписать в виде

$$\begin{gathered} dU_1 = [U_4, U_1]\frac{d\alpha}{\alpha}, \quad dU_2 = [U_4, U_2]\frac{d\alpha}{\alpha-1}, \quad dU_3 = [U_4, U_3]\frac{d\alpha}{\alpha+1}, \\ dU_4 = [U_1, U_4]\frac{d\alpha}{\alpha} + [U_2, U_4]\frac{d\alpha}{\alpha-1} + [U_3, U_4]\frac{d\alpha}{\alpha+1}. \end{gathered} \tag{16}$$

Учитывая представление матриц (12), (13), из матричных уравнений (16) получим скалярные уравнения

$$d\theta_1 = \theta_1 \frac{d\alpha}{\alpha}, \quad d\theta_2 = \theta_2 \frac{d\alpha}{\alpha-1}, \quad d\theta_3 = \theta_3 \frac{d\alpha}{\alpha+1}, \quad \frac{\theta_1}{\alpha} + \frac{\theta_2}{\alpha-1} + \frac{\theta_3}{\alpha+1} = 0. \tag{17}$$

Последнее соотношение в (17) и второе равенство в (14) означают, что

$$\theta_2 = -\frac{\alpha-1}{2\alpha}\theta_1, \quad \theta_3 = -\frac{\alpha+1}{2\alpha}\theta_1, \tag{18}$$

а интегрирование первых трех уравнений в (17) приводит к равенствам

$$\theta_1 = c_1\alpha, \quad \theta_2 = c_2(\alpha-1), \quad \theta_3 = c_3(\alpha+1), \tag{19}$$

где $c_1,\ c_2,\ c_3$ – произвольные постоянные.

Полагая $c_1 = 2c$, из (18) и (19) находим, что $c_2 = c_3 = -c$, а это и доказывает теорему 2.

Обозначим

$$U = \frac{U_1}{z} + \frac{U_2}{z-1} + \frac{U_3}{z+1} + \frac{U_4}{z-\alpha},$$

где матрицы U_j, $j = \overline{1,4}$, имеют соответственно вид (12), (13).

Очевидно, что матрицу U можно представить и так:

$$U = \begin{pmatrix} u_1(z) & u_2(z) \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$u_1(z) = \frac{\xi_1}{z} + \frac{\xi_2}{z-1} + \frac{\xi_3}{z+1} + \frac{1}{z-\alpha}, \qquad u_2(z) = \frac{\theta_1}{z} + \frac{\theta_2}{z-1} + \frac{\theta_3}{z+1}.$$

Пусть

$$h(z) = z^{\xi_1}(z-1)^{\xi_2}(z+1)^{\xi_3}(z-\alpha).$$

Рассмотрим матрицу

$$Y(z) = \begin{pmatrix} y_1(z) & y_2(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{20}$$

где

$$y_1(z) = h(z), \qquad y_2(z) = h(z)\int \frac{u_2(z)}{h(z)}dz.$$

Л е м м а. *Матрица* (20) *является фундаментальной матрицей уравнения* (7).

Д о к а з а т е л ь с т в о. С учетом обозначений

$$y_1'(z) = u_1(z)y_1(z), \qquad y_2'(z) = u_1(z)y_2(z) + u_2(z).$$

А в таком случае

$$Y'(z) = \begin{pmatrix} y_1'(z) & y_2'(z) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1(z)y_1(z) & u_1(z)y_2(z) + u_2(z) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} u_1(z) & u_2(z) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1(z) & y_2(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = UY,$$

что и доказывает лемму.

Т е о р е м а 3. *Если выполняется первое равенство в* (14), *то фундаментальная матрица* (20) *уравнения* (7) *имеет заданные матрицы монодромии в представлении* (4) *при* $m = 2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как матрицы монодромии (11) задаются в виде $V_j = e^{2\pi i W_j}$, $j = \overline{1,4}$, то при найденной фундаментальной матрице (20) уравнения (7), которая в нерезонансном случае представляется в окрестности особых точек $\overline{\alpha}_j$, $j = \overline{1,3}$, в виде

$$\Phi^j(z) = \Phi_j^*(z)(z-\overline{\alpha}_j)^{W_j}, \quad j = \overline{1,3},$$

где $\Phi_j^*(z)$ – голоморфная в окрестности особой точки $z = \overline{\alpha}_j$ матрица, матрицы W_j – это матрицы (10), а в резонансном случае – это матрица

$$\Phi^4(z) = \Phi_4^*(z)(z-\alpha)^{\Lambda_0}(z-\alpha)^N,$$

где $\Phi_4^*(z)$ – голоморфная в окрестности особой точки $z=\alpha$ матрица, матрицы Λ_0 и N имеют соответственно вид

$$\Lambda_0=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad N=\begin{pmatrix}0 & \dfrac{\nu_4}{2\pi i}\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

то в нерезонансном случае при обходе переменной z вокруг особых точек $\overline{\alpha}_k$, $k=\overline{1,3}$, фундаментальная матрица умножается [4] справа на матрицу $V_k=e^{2\pi i W_k}$. В резонансном случае при обходе переменной z вокруг особой точки α получаем матрицу

$$\widetilde{\Phi}^4(z)=\Phi_4^*(z)\left(\rho e^{(i\varphi+2\pi i)}\right)^{\Lambda_0}\left(\rho e^{(i\varphi+2\pi i)}\right)^{N}=\Phi_4^*(z)\left(\rho e^{i\varphi}\right)^{\Lambda_0}e^{2\pi i\Lambda_0}\left(\rho e^{i\varphi}\right)^{N}e^{2\pi i N}=$$

$$=\Phi_4^*(z)(z-\alpha)^{\Lambda_0}e^{2\pi i\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}}(z-\alpha)^{N}e^{2\pi i\cdot\begin{pmatrix}0 & \frac{\nu_4}{2\pi i}\\ 0 & 0\end{pmatrix}}=$$

$$=\Phi_4^*(z)(z-\alpha)^{\Lambda_0}\begin{pmatrix}e^{2\pi i} & 0\\ 0 & e^{0}\end{pmatrix}(z-\alpha)^{N}\left(E+2\pi i\begin{pmatrix}0 & \dfrac{\nu_4}{2\pi i}\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)=$$

$$=\Phi_4^*(z)(z-\alpha)^{\Lambda_0}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}(z-\alpha)^{N}\begin{pmatrix}1 & \nu_4\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\Phi_4^*(z)(z-\alpha)^{\Lambda_0}(z-\alpha)^{N}V_4.$$

Заканчивает доказательство теоремы 3 ссылка на то, что матрицу V_4 можно записать в виде

$$V_4=e^{2\pi i W_4},\ \text{где}\ W_4=\begin{pmatrix}1 & \dfrac{\nu_4}{2\pi i}\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

З а м е ч а н и е 2. Можно показать (на чем мы не будем останавливаться из-за ограниченного объема статьи), что голоморфные матрицы $\Phi_j^*(z)$ представимы в виде

$$\Phi_j^*(z)=\begin{pmatrix}y_{1j}(z) & y_{2j}(z)\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad j=\overline{1,3},$$

где

$$y_{11}(z)=\xi_1(z-1)^{\xi_2}(z+1)^{\xi_3}(z-\alpha),\quad y_{12}(z)=\xi_2 z^{\xi_1}(z+1)^{\xi_3}(z-\alpha),\quad y_{13}(z)=\xi_3 z^{\xi_1}(z-1)^{\xi_2}(z-\alpha);$$

$$y_{21}(z)=\frac{1}{\xi_1}(\varphi_{21}+\mu_1 y_{11}),\quad y_{22}(z)=\frac{1}{\xi_2}(\varphi_{22}+\mu_2 y_{12}),\quad y_{23}(z)=\frac{1}{\xi_3}(\varphi_{23}+\mu_3 y_{13}),$$

а

$$\varphi_{2j}=\xi_j h(z)\int\frac{u_2(z)}{h(z)}dz,$$

и, в соответствии с теоремой 2, $u_2=\dfrac{2c(z-\alpha)}{z(z^2-1)}$.

Что же касается голоморфной матрицы $\Phi_4^*(z)$, то

$$\Phi_4^*(z)=\Phi^4(z)(z-\alpha)^{-N}(z-\alpha)^{-\Lambda_0},$$

где матрица $\Phi^4(z)$ – это матрица (20).

Литература

1. *Болибрух А. А.* // Успехи мат. наук. 1990. Т. 45, вып. 2. С. 3–47.
2. *Болибрух А. А.* // Современные проблемы математики. 2003. № 1. С. 29–82.
3. *Dekkers W.* // Lecture Notes in Math. 1979. Vol. 712. P. 33–43.
4. *Еругин Н. П.* // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 5. С. 779–799.
5. *Итс А. Р., Капаев А. А., Новокшенов В. Ю., Фокас А. С.* Трансценденты Пенлеве. Метод задачи Римана. М.; Ижевск, 2005.
6. *Лаппо-Данилевский И. А.* Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. М., 1957.
7. *Амелькин В. В.* Автономные и линейные многомерные дифференциальные уравнения. М., 2010.

V. V. AMEL'KIN, M. N. VASILEVICH

CONSTRUCTION OF THE FUCHS EQUATION WITH FOUR FINITE CRITICAL POINTS AND A GIVEN REDUCIBLE GROUP OF MONODROMY

Summary

One inverse problem of the analytic theory of linear differential equations is considered. Namely, the Fuchs equation with four critical points and a given reducible monodromy group of dimensionality 2 is constructed.