УДК 519.6

В. Б. МАЛЮТИН

ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ ПО СПИНОВЫМ ПЕРЕМЕННЫМ ОТ ФУНКЦИОНАЛОВ, СОДЕРЖАЩИХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ УДАЛЕННЫХ УЗЛОВ

Институт математики НАН Беларуси

(Поступила в редакцию 06.11.2014)

Введение. Существуют разнообразные типы функциональных интегралов, обусловленные разнообразием пространств, мер и способом их задания [1–4]. В данной работе рассматриваются функциональные интегралы по спиновым переменным. Эти интегралы определяются на функциях, принимающих значения ±1, с помощью равенства

$$\int F(x(\bullet))d\nu(x) = \lim_{\max\limits_j \Delta t_j \to 0} \sum_{x_0=\pm 1} \dots \sum_{x_n=\pm 1} F\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \chi_{]t_{j-1},t_j]}(\cdot) \right) \prod_{j=1}^{n} S(\Delta t_j, x_{j-1}, x_j), \tag{1}$$

если этот предел существует для любого разбиения отрезка $[0, t]$ точками $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$. Здесь $x_j = x(t_j)$; $\Delta t_j = t_j - t_{j-1}$; $\chi_{]t_{j-1},t_j]}(s)$ – характеристическая функция интервала $]t_{j-1},t_j]$; $S(\Delta t_j,x_{j-1},x_j)$ – переходная функция, имеющая вид

$$S(\Delta t_j, x_{j-1}, x_j) = \frac{1}{2}(\exp(A_1 \Delta t_j) + \exp(A_2 \Delta t_j) x_{j-1} x_j), \tag{2}$$

где A_1, A_2 – вещественные параметры.

Функции от спиновых переменных широко используются в решеточных моделях статистической физики [5–8]. Если взять $A_1 = \ln(2\cosh(\beta))$, $A_2 = \ln(2\sinh(\beta))$, $t = n$ и $F(x(\bullet)) \equiv 1$, то интеграл по спиновым переменным можно записать в виде статистической суммы решеточной модели с взаимодействием между ближайшими соседями

$$Z = \sum_{x_0=\pm 1} \dots \sum_{x_n=\pm 1} \exp\left\{ \beta \sum_{j=1}^{n} x_{j-1} x_j \right\}.$$

В данной работе рассматривается приближенное вычисление функциональных интегралов по спиновым переменным от функционалов, содержащих взаимодействия удаленных узлов. Метод вычисления основан на разложении по большому и малому параметрам, содержащимся в функционале и мере. Также рассматриваются особые точки функционального интеграла по спиновым переменным как функции, зависящей от переменной t. Под особой точкой понимается точка, в которой функция не определена или имеет нерегулярное поведение (например, функция стремится к бесконечности, имеет разрыв или недифференцируема).

1. Вычисление функциональных интегралов при малых *b*, больших $A_1 - A_2$.

Рассматриваемый функциональный интеграл имеет вид

$$I(t) = \int \exp\left\{ b \int_0^{t-a} x(\tau) x(\tau + a) d\tau \right\} d\nu(x). \tag{3}$$

Здесь интегрируемый функционал содержит взаимодействие удаленных узлов $x(\tau)$, $x(\tau+a)$. В переходной функции (2), определяющей меру функционального интеграла, содержится взаимодействие ближайших узлов x_{j-1}, x_j.

В работе [9] представлено вычисление интеграла (3) при $a \le t \le 2a$. В данном разделе рассматривается вычисление интеграла (3) при малых b, больших $A_1 - A_2$ и произвольных a, t.

Для вычисления интеграла используем ряд

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{b^j}{j!} \int \left(\int_0^{t-a} x(\tau) x(\tau+a) d\tau \right)^j d\nu(x) \tag{4}$$

и формулы [10]

$$\int \prod_{m=1}^{k} x(\tau_m) d\nu(x) = 0$$

для всех нечетных k,

$$\int \prod_{m=1}^{k} x(\tau_m) d\nu(x) = 2\exp(tA_1)\exp\left((A_1 - A_2) \sum_{m=1}^{k} (-1)^{m+1} \tau_m \right) \tag{5}$$

для всех четных k, где $\tau_1 \le \tau_2 \le \ldots \le \tau_k$, мера ν определяется переходной функцией (2), при $k=0$ предполагается, что $\sum_{m=1}^{k} (-1)^{m+1} \tau_m = 0$.

Отметим, что ряд (4) сходится и справедлива оценка

$$\left| \sum_{j=0}^{\infty} \frac{b^j}{j!} \int \left(\int_0^{t-a} x(\tau) x(\tau+a) d\tau \right)^j d\nu(x) \right| \le 2\exp(tA_1)\exp(b(t-a)).$$

Из формулы (5) следует, что нулевое слагаемое ряда (4) равно

$$I_0(t) = 2\exp(tA_1).$$

С помощью равенства (5) получаем, что первое слагаемое ряда (4) при $a \le t$ равно

$$I_1(t) = b \int_0^{t-a} 2\exp(tA_1)\exp(-(A_1 - A_2)a) d\tau = 2b\exp(tA_1)\exp(-(A_1 - A_2)a)(t-a).$$

Рассмотрим теперь вычисление слагаемого с номером $j=2$, $a \le t \le 2a$:

$$I_2(t) = \frac{b^2}{2} \int_0^{t-a} \int_0^{t-a} \int x(\tau_1) x(\tau_1+a) x(\tau_2) x(\tau_2+a) d\nu(x) d\tau_2 d\tau_1.$$

Так как функция под знаком определенного интеграла симметрична относительно переменных τ_1, τ_2, то это выражение можно записать в виде

$$I_2(t) = b^2 \int_0^{t-a} \int_0^{\tau_1} \int x(\tau_1) x(\tau_1+a) x(\tau_2) x(\tau_2+a) d\nu(x) d\tau_2 d\tau_1.$$

Вычисляя функциональный интеграл с помощью (5), получаем, что

$$I_2(t) = b^2 \int_0^{t-a} \int_0^{\tau_1} 2\exp(tA_1)\exp(2(A_1 - A_2)(\tau_2 - \tau_1)) d\tau_2 d\tau_1.$$

После вычисления определенных интегралов получаем, что при $a \le t \le 2a$

$$I_2(t) = b^2 \exp(tA_1)\left(\frac{t-a}{A_1 - A_2} - \frac{1}{2(A_1 - A_2)^2} + \frac{\exp(2(A_1 - A_2)(a-t))}{2(A_1 - A_2)^2}\right). \quad (6)$$

Рассмотрим вычисление $I_2(t)$ при $2a \le t$:

$$I_2(t) = b^2 \int_0^{t-a}\int_0^{\tau_1}\int x(\tau_1)x(\tau_1 + a)x(\tau_2)x(\tau_2 + a)d\nu(x)d\tau_2 d\tau_1.$$

Отрезок интегрирования $[0, t-a]$ разобьем на два отрезка $[0, a]$ и $[a, t-a]$. Отрезок интегрирования $[0, \tau_1]$ при $a \le \tau_1 \le t-a$ разобьем на два отрезка $[0, \tau_1 - a]$ и $[\tau_1 - a, \tau_1]$. Получим

$$I_2(t) = b^2 \int_0^{a}\int_0^{\tau_1}\int x(\tau_1)x(\tau_1 + a)x(\tau_2)x(\tau_2 + a)d\nu(x)d\tau_2 d\tau_1 +$$
$$+b^2 \int_a^{t-a}\int_0^{\tau_1 - a}\int x(\tau_1)x(\tau_1 + a)x(\tau_2)x(\tau_2 + a)d\nu(x)d\tau_2 d\tau_1 +$$
$$+b^2 \int_a^{t-a}\int_{\tau_1 - a}^{\tau_1}\int x(\tau_1)x(\tau_1 + a)x(\tau_2)x(\tau_2 + a)d\nu(x)d\tau_2 d\tau_1.$$

Вычисляя функциональные интегралы с помощью (5), получаем, что

$$I_2(t) = b^2 \int_0^{a}\int_0^{\tau_1} 2\exp(tA_1)\exp(2(A_1 - A_2)(\tau_2 - \tau_1))d\tau_2 d\tau_1 +$$
$$+b^2 \int_a^{t-a}\int_0^{\tau_1 - a} 2\exp(tA_1)\exp(2(A_1 - A_2)(-a))d\tau_2 d\tau_1 + b^2 \int_a^{t-a}\int_{\tau_1 - a}^{\tau_1} 2\exp(tA_1)\exp(2(A_1 - A_2)(\tau_2 - \tau_1))d\tau_2 d\tau_1.$$

После вычисления определенных интегралов получаем, что при $2a \le t$

$$I_2(t) = b^2 \exp(tA_1)\left[\frac{t-a}{A_1 - A_2} - \frac{1}{2(A_1 - A_2)^2} + \exp(-2(A_1 - A_2)a) \times \right.$$
$$\left. \times \left(\frac{1}{2(A_1 - A_2)^2} - \frac{t-2a}{A_1 - A_2} - 2a(t-2a) + (t-a)^2 - a^2\right)\right]. \quad (7)$$

Из (6), (7) видно, что функция $\dfrac{d^3 I_2(t)}{dt^3}$ не является непрерывной в точке $t = 2a$. Следовательно, функции $I_2(t)$ и $I(t)$ имеют особую точку $t = 2a$. Вычисляя слагаемые более высокой степени, можно убедиться, что функция $I(t)$ имеет особые точки $t = ja$, $j = 2, 3, \ldots$.

Отметим, что $I_1(T)$ имеет коэффициент b, $I_2(T)$ имеет коэффициент $\dfrac{b^2}{A_1 - A_2}$. То есть при малых b и больших $A_1 - A_2$ с помощью начальных членов разложения (4) можно получить хорошее приближение функционального интеграла.

2. Вычисление функциональных интегралов при больших b, малых $A_1 - A_2$.

В данном разделе рассматривается приближенное вычисление функционального интеграла (3) в случае больших b, малых $A_1 - A_2$. Для вычисления функционального интеграла используем разложение [9]:

$$I(t) = \sum_{x_{t_1, t_2, \ldots, t_n}(0) = \pm 1} \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(\frac{1}{2}(A_1 + A_2)t\right)\left(\frac{1}{2}(A_1 - A_2)\right)^n \times$$
$$\times \int_0^t (n) \int_0^{t_2} \exp\left(b \int_0^{t-a} x_{t_1, t_2, \ldots, t_n}(\tau) x_{t_1, t_2, \ldots, t_n}(\tau + a) d\tau\right) dt_1 \ldots dt_n, \quad (8)$$

где $x_{t_1,t_2,...,t_n}(\tau)$ – траектория, имеющая разрывы в точках $0<t_1<t_2<...<t_n<t$.
Отметим, что ряд (8) сходится и справедлива оценка

$$|I(t)|\le 2\sum_{n=0}^{\infty}\exp\left(\frac{1}{2}(A_1+A_2)t\right)\left(\frac{1}{2}(A_1-A_2)\right)^n\int_0^t(n)\int_0^{t_2}\exp(b(t-a))dt_1...dt_n\le$$
$$\le 2\exp(A_1t)\exp(b(t-a)).$$

Нулевое слагаемое ряда (8) равно

$$I_0(t)=2\exp\left(\frac{t}{2}(A_1+A_2)\right).$$

Рассмотрим теперь вычисление слагаемого с номером $j=1$, $a\le t\le 2a$:

$$I_1(t)=\exp\left(\frac{t}{2}(A_1+A_2)\right)\frac{1}{2}(A_1-A_2)\sum_{x_{t_1}(0)=\pm 1}\int_0^t\exp\left(b\int_0^{t-a}x_{t_1}(\tau)x_{t_1}(\tau+a)d\tau\right)dt_1.$$

Разбивая отрезок интегрирования $[0,t]$ на три отрезка $[0,t-a]$, $[t-a,a]$ и $[a,t]$, получим, что

$$\int_0^t\exp\left(b\int_0^{t-a}x_{t_1}(\tau)x_{t_1}(\tau+a)d\tau\right)dt_1=\int_0^{t-a}\exp(bx_{t_1}(0)(-2t_1+t-a))dt_1+\int_{t-a}^{a}\exp(-bx_{t_1}(0)(t-a))dt_1+$$
$$+\int_a^t\exp(bx_{t_1}(0)(2(t_1-a)-(t-a)))dt_1=\frac{4}{b}\sinh(b(t-a))+2(2a-t)\cosh(b(t-a)).$$

Таким образом, при $a\le t\le 2a$

$$I_1(t)=\exp\left(\frac{t}{2}(A_1+A_2)\right)\frac{1}{2}(A_1-A_2)\left[\frac{4}{b}\sinh(b(t-a))+2(2a-t)\cosh(b(t-a))\right].\qquad(9)$$

При $2a\le t\le 3a$, разбивая отрезок интегрирования $[0,t]$ на три отрезка $[0,a]$, $[a,t-a]$ и $[t-a,t]$, получим, что

$$\int_0^t\exp\left(b\int_0^{t-a}x_{t_1}(\tau)x_{t_1}(\tau+a)d\tau\right)dt_1=\int_0^a\exp(bx_{t_1}(0)(-2t_1+t-a))dt_1+$$
$$+\int_a^{t-a}\exp(bx_{t_1}(0)(2(t_1-a)-2t_1+t-a))dt_1+\int_{t-a}^{t}\exp(bx_{t_1}(0)(2(t_1-a)-(t-a)))dt_1=$$
$$=\frac{4}{b}\cosh(b(t-2a))\sinh(ba)+2(t-2a)\cosh(b(t-3a)).$$

Таким образом, при $2a\le t\le 3a$

$$I_1(t)=\exp\left(\frac{t}{2}(A_1+A_2)\right)\frac{1}{2}(A_1-A_2)\left[\frac{4}{b}\cosh(b(t-2a))\sinh(ba)+2(t-2a)\cosh(b(t-3a))\right].\qquad(10)$$

Из (9), (10) следует, что функция $I_1(t)$ имеет особую точку $t=2a$, так как функция $\frac{d^3I_1(t)}{dt^3}$ не является непрерывной в точке $t=2a$.

Из (9), (10) видно, что $I_1(T)$ содержит b в знаменателе и A_1-A_2 в числителе. То есть при малых A_1-A_2 и больших b с помощью начальных членов разложения (8) можно получить хорошее приближение функционального интеграла.

Литература

1. *Егоров А. Д., Соболевский П. И., Янович Л. А.* Приближенные методы вычисления континуальных интегралов. Минск, 1985.
2. *Егоров А. Д., Жидков Е. П., Лобанов Ю. Ю.* Введение в теорию и приложения функционального интегрирования. М., 2006.
3. *Egorov A. D., Sobolevsky P. I., Yanovich L. A.* Functional integrals: Approximate evaluation and applications. Kluwer Acad. Publ., 1993.
4. *Kleinert H.* Path integrals in quantum mechanics, statistics, polymer physics and financial markets. World Scientific. Singapore, 2004.
5. *Попов В. Н.* Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике. М., 1976.
6. *Джимбо М., Мива Т.* Алгебраический анализ точно решаемых решеточных моделей. Ижевск, 2000.
7. *Бэкстер Р.* Точно решаемые модели в статистической механике. М., 1985.
8. *Хуанг К.* Статистическая механика. М., 1966.
9. *Малютин В. Б.* // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2012. № 3. С. 18–25.
10. *Малютин В. Б.* // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2009. № 4. С. 11–14.

V. B. MALYUTIN

EVALUATION OF INTEGRALS WITH RESPECT TO THE SPIN VARIABLES OF THE FUNCTIONALS CONTAINING INTERACTION OF REMOTE NODES

Summary

The method of approximate evaluation of functional integrals with respect to the spin variables of the functionals containing interaction of remote nodes is proposed. This method is based on expansion in large and small parameters which are contained in the functional and the measure.