УДК 537.8

И. Е. АНДРУШКЕВИЧ[1], *Ю. В. ШИЁНОК*[2]

СВЕДЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА К СИСТЕМЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

[1]*Полоцкий государственный университет*
[2]*Витебский государственный университет им. П. М. Машерова*

(Поступила в редакцию 31.10.2014)

Задача разработки методов построения аналитических решений системы уравнений Максвелла по-прежнему актуальна. В настоящей работе нам в определенной степени удалось улучшить алгебраический метод разделения переменных [1], разработанный ранее для релятивистского уравнения Дирака, и обобщить его на случай уравнений Максвелла. В этом смысле данная работа является прямым продолжением исследований, результаты которых представлены в [2].

1. Система уравнений Максвелла и формы ее представления. Наиболее распространенным представлением системы уравнений Максвелла является ее дифференциальная форма записи, предложенная Г. Герцем и О. Хевисайдом [3]:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},\ \operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j},\ \operatorname{div}\mathbf{D} = \rho,\ \operatorname{div}\mathbf{B} = 0. \tag{1}$$

В неоднородных нестационарных анизотропных средах материальные уравнения имеют вид

$$\mathbf{D} = \hat{\varepsilon}\mathbf{E},\ \mathbf{B} = \hat{\varepsilon}\mathbf{H},\ \mathbf{j} = \hat{\sigma}\mathbf{E}, \tag{2}$$

где

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{x,x} & \varepsilon_{x,y} & \varepsilon_{x,z} \\ \varepsilon_{y,x} & \varepsilon_{y,y} & \varepsilon_{y,z} \\ \varepsilon_{z,x} & \varepsilon_{z,y} & \varepsilon_{z,z} \end{pmatrix},\ \hat{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_{x,x} & \mu_{x,y} & \mu_{x,z} \\ \mu_{y,x} & \mu_{y,y} & \mu_{y,z} \\ \mu_{z,x} & \mu_{z,y} & \mu_{z,z} \end{pmatrix},\ \hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{x,x} & \sigma_{x,y} & \sigma_{x,z} \\ \sigma_{y,x} & \sigma_{y,y} & \sigma_{y,z} \\ \sigma_{z,x} & \sigma_{z,y} & \sigma_{z,z} \end{pmatrix}.$$

Запись уравнений Максвелла (1), (2) является компактной, однако при решении прикладных задач электродинамики, как правило, приходится отказываться от такой ее формы и переходить непосредственно к рассмотрению проекций векторов напряженности электрического и магнитного полей на оси выбранной системы координат, что сопряжено с рядом сложностей математического характера. В том числе и по этой причине вполне понятен интерес ряда исследователей к иным формам записи системы (1), в частности аналогичным уравнению Дирака (см., напр., [4–6]).

В работе [2] показано, что в изотропных средах система (1), (2) допускает эквивалентное представление, имеющее вид

$$\left\{\xi^1\partial_x + \xi^2\partial_y + \xi^3\partial_z + \xi^4\mathbf{M}\partial_t + \Theta\right\}\Psi = \mathrm{P}\mathbf{J}, \tag{3}$$

где $\partial_a = \dfrac{\partial}{\partial a}$, $\Psi = \left(0, E_x, E_y, -E_z, -H_z, H_y, H_x, 0\right)^{\mathbf{T}}$, $\mathbf{J} = \left\|1\right\|_{8\times 1}$, $\mathbf{M} = \operatorname{diag}\left(\mu^{-1}, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, \mu, \mu, \mu, \varepsilon^{-1}\right)$, $\mathrm{P} = \operatorname{diag}\left(0,0,0,0,0,0,\rho\varepsilon^{-1},0\right)$, $\Theta = \left\|\theta_{i,j}\right\|_{8\times 8}$, причем $\theta_{i,j} = 0$ за исключением следующих двенадцати:

$$\theta_{1,2}=-\sigma-\partial_t\varepsilon,\ \theta_{2,5}=-\mu^{-1}\partial_z\mu,\ \theta_{2,6}=\mu^{-1}\partial_y\mu,\ \theta_{2,7}=\mu^{-1}\partial_x\mu,\ \theta_{3,4}=-\sigma-\partial_t\varepsilon,\ \theta_{4,3}=\sigma+\partial_t\varepsilon,$$

$$\theta_{5,6}=-\partial_t\mu,\ \theta_{6,5}=\partial_t\mu,\ \theta_{7,2}=\varepsilon^{-1}\partial_x\varepsilon,\ \theta_{7,3}=\varepsilon^{-1}\partial_y\varepsilon,\ \theta_{7,4}=-\varepsilon^{-1}\partial_z\varepsilon,\ \theta_{8,7}=\partial_t\mu;$$

$$\xi^1=\begin{pmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\tilde\sigma_1\\ \mathbf{0}&\mathbf{0}&-\tilde\sigma_1&\mathbf{0}\\ \mathbf{0}&-\tilde\sigma_1&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\ \tilde\sigma_1&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{pmatrix},\ \xi^2=\begin{pmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{0}&-\tilde\sigma_3&\mathbf{0}\\ \mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\tilde\sigma_3\\ -\tilde\sigma_3&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\ \mathbf{0}&\tilde\sigma_3&\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{pmatrix},$$

$$\xi^3=-\begin{pmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{0}&\tilde\sigma_1&\mathbf{0}\\ \mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\tilde\sigma_1\\ \tilde\sigma_1&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\ \mathbf{0}&\tilde\sigma_1&\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{pmatrix},\ \xi^4=-i\begin{pmatrix}\tilde\sigma_2&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\ \mathbf{0}&\tilde\sigma_2&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\ \mathbf{0}&\mathbf{0}&\tilde\sigma_2&\mathbf{0}\\ \mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\tilde\sigma_2\end{pmatrix}; \tag{4}$$

$$\tilde\sigma_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\ \tilde\sigma_2=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\ \tilde\sigma_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}. \tag{5}$$

В данных исследованиях нам удалось усовершенствовать и обобщить форму записи (3) на случай сред с материальными уравнениями вида (2). Действительно, введем в рассмотрение матрицы

$$\mathbf{R}_x=\left\|{}^xR_{i,j}\right\|_{8\times8},\ \mathbf{R}_y=\left\|{}^yR_{i,j}\right\|_{8\times8},\ \mathbf{R}_z=\left\|{}^zR_{i,j}\right\|_{8\times8},\ \mathbf{R}_t=\left\|{}^tR_{i,j}\right\|_{8\times8},\ \mathbf{R}_\sigma=\left\|{}^\sigma R_{i,j}\right\|_{8\times8}, \tag{6}$$

такие, что

$${}^xR_{1,1}={}^xR_{3,3}={}^xR_{4,4}={}^xR_{5,5}={}^xR_{6,6}={}^xR_{8,8}=1,\ {}^xR_{2,2}=\varepsilon_{x,x},\ {}^xR_{2,3}=\varepsilon_{x,y},\ {}^xR_{2,4}=-\varepsilon_{x,z},$$
$${}^xR_{7,5}=-\mu_{x,z},\ {}^xR_{7,6}=\mu_{x,y},\ {}^xR_{7,7}=\mu_{x,x};\ {}^yR_{1,1}={}^yR_{2,2}={}^yR_{4,4}={}^yR_{5,5}={}^yR_{7,7}={}^yR_{8,8}=1,$$
$${}^yR_{3,2}=\varepsilon_{y,x},\ {}^yR_{3,3}=\varepsilon_{y,y},\ {}^yR_{3,4}=-\varepsilon_{y,z},\ {}^yR_{6,5}=-\mu_{y,z},\ {}^yR_{6,6}=\mu_{y,y},\ {}^yR_{6,7}=\mu_{y,x};$$
$${}^zR_{1,1}={}^zR_{2,2}={}^zR_{3,3}={}^zR_{3,3}={}^zR_{7,7}={}^zR_{8,8}=1,\ {}^zR_{4,2}=-\varepsilon_{z,x},\ {}^zR_{4,3}=-\varepsilon_{z,y},\ {}^zR_{4,4}=\varepsilon_{z,z},\ {}^zR_{5,5}=\mu_{z,z},$$
$${}^zR_{5,6}=-\mu_{z,y},\ {}^zR_{5,7}=-\mu_{z,x};\ {}^tR_{1,1}={}^tR_{8,8}=1,\ {}^tR_{2,2}=\varepsilon_{x,x},\ {}^tR_{2,3}=\varepsilon_{x,y},\ {}^tR_{2,4}=-\varepsilon_{x,z},$$
$${}^tR_{7,5}=-\mu_{x,z},\ {}^tR_{7,6}=\mu_{x,y},\ {}^tR_{7,7}=\mu_{x,x},\ {}^tR_{3,2}=\varepsilon_{y,x},\ {}^tR_{3,3}=\varepsilon_{y,y},\ {}^tR_{3,4}=-\varepsilon_{y,z},\ {}^tR_{6,5}=-\mu_{y,z},$$
$${}^tR_{6,6}=\mu_{y,y},\ {}^tR_{6,7}=\mu_{y,x},\ {}^tR_{4,2}=-\varepsilon_{z,x},\ {}^tR_{4,3}=-\varepsilon_{z,y},\ {}^tR_{4,4}=\varepsilon_{z,z},\ {}^tR_{5,5}=\mu_{z,z},\ {}^tR_{5,6}=-\mu_{z,y},$$
$${}^tR_{5,7}=-\mu_{z,x};\ {}^\sigma R_{2,2}=\sigma_{x,x},\ {}^\sigma R_{2,3}=\sigma_{x,y},\ {}^\sigma R_{2,4}=-\sigma_{x,z},\ {}^\sigma R_{3,2}=\sigma_{y,x},\ {}^\sigma R_{3,3}=\sigma_{y,y},$$
$${}^\sigma R_{3,4}=-\sigma_{y,z},\ {}^\sigma R_{4,2}=-\sigma_{z,x},\ {}^\sigma R_{4,3}=-\sigma_{z,y},\ {}^\sigma R_{4,4}=\sigma_{z,z},$$

а остальные элементы матриц (6) тождественно равны нулю. Пусть далее

$$\mathbf{R}_0=\mathrm{diag}(0,1,1,1,1,1,1,0),\ \mathrm{P}_\rho=\mathrm{diag}(0,0,0,0,0,0,\rho,0),\ \Psi=\left(-\varphi_E,E_x,E_y,-E_z,-H_z,H_y,H_x,-\varphi_H\right)^{\mathbf{T}}, \tag{7}$$

где φ_E,φ_H – произвольные функции переменных (x,y,z,t). Тогда простой проверкой можно убедиться, что система уравнений Максвелла (1), (2) приобретает вид

$$\left(\xi^1\partial_x\mathbf{R}_x+\xi^2\partial_y\mathbf{R}_y+\xi^3\partial_z\mathbf{R}_z+\xi^4\partial_t\mathbf{R}_t+\xi^4\mathbf{R}_\sigma\right)\mathbf{R}_0\Psi=\mathrm{P}_\rho\mathbf{J}. \tag{8}$$

2. Билинейные функциональные, билинейные матрично-функциональные уравнения и система уравнений Максвелла. Из всех возможных методов построения аналитических решений уравнений математической физики, на наш взгляд, наиболее предпочтительным и (по словам Р. Куранта) наиболее важным является метод разделения переменных. Под последним, наряду с классическим методом Фурье, мы понимаем любой метод, позволяющий уравнению (их системе) в частных производных сопоставить эквивалентную на определенном классе функций систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Следует отметить, что без исключения все существующие сегодня методы разделения переменных в той или иной мере являются обобщением и развитием классического. Мы считаем, что одним из наиболее перспективных подходов к обобщению классического метода является подход В. Я. Скоробогатько [7], суть которого заключается в сведении задачи разделения переменных в уравнении в частных производных с «разделяющимся» оператором к задаче поиска решений билинейных уравнений вида

$$\sum_{i=1}^{N} f_i(x) g_i(y) = 0. \tag{9}$$

Проблема «разделимости» [8] оператора дифференциального уравнения в частных производных решается известной теоремой Колмогорова «о представлении функций нескольких переменных в виде суперпозиции произведений функций одного переменного» [9], которая утверждает, что

для каждого $n \subset N$ *существует* $n(2n-1)$ *функций* $h_{i,j}(\varsigma_i)$ ($i = 1,..., n$; $j = 1,…, 2n+1$), *таких, что: а) все функции* $h_{i,j}(\varsigma_i)$ *непрерывны на* $[0,1]$*; б) для любой функции* $F(\varsigma_1, \varsigma_2, ..., \varsigma_n)$*, непрерывной на* $0 < \varsigma_1, \varsigma_2, ..., \varsigma_n \le 1$*, существуют* $2n+1$ *функций* $g_j(u), u = \varsigma_l$, ($l = 1,…, n$; $j = 1,…, 2n+1$), *каждая из которых непрерывна на R, причем*

$$F(\varsigma_1, \varsigma_2, ..., \varsigma_n) = \sum_{j=1}^{2n+1} \left(g_j(u) \sum_{i=1}^{n} \left(h_{i,j}(\varsigma_i) \right) \right). \tag{10}$$

Заметим, что функции $h_{i,j}(\varsigma_i)$ являются универсальными и не зависят от $F(\varsigma_1, \varsigma_2, ..., \varsigma_n)$. Функции $g_j(u)$, напротив, однозначно определяются функцией $F(\varsigma_1, \varsigma_2, ..., \varsigma_n)$. К сожалению, нахождение явного вида функций $h_{i,j}$ в общем случае и g_j конкретно для заданной функции $F(\varsigma_1, \varsigma_2, ..., \varsigma_n)$ представляет собой математическую проблему.

Отметим, что представление (10) функции многих переменных, предложенное А. Н. Колмогоровым, является не единственным. В частности, Д. А. Шпрехер [10] показал, что внешние функции $g_j(u)$ можно заменить одной единственной, а совокупность функций во внутренней сумме представима в виде сжатий и сдвигов одной единственной функции, т. е. (10) можно представить в виде

$$F(\varsigma_1, \varsigma_2, ..., \varsigma_n) = \sum_{j=1}^{2n+1} \left(g(u) \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\lambda^i h(\varsigma_i + \nu_j) \right) + j \right) \right), \tag{11}$$

где λ^i и ν_j – положительные параметры.

Позднее Р. Досс [11], развивая идеи А. Н. Колмогорова, доказал, что наряду с (11) имеет место и следующее представление:

$$F(\varsigma_1, \varsigma_2, ..., \varsigma_n) = \sum_{j=1}^{2n+1} \left(g(u) \left(\prod_{i=1}^{n} h_{i,j}(\varsigma_i) \right) \right). \tag{12}$$

Применяя соотношения (10)–(12) к матрицам-функциям, фигурирующим в системе уравнений Максвелла (8), можно доказать справедливость утверждений, являющихся прямыми следствиями теоремы Колмогорова:

С л е д с т в и е 1. *Для любой матрицы-функции* $\Psi(x, y, z, t) = \|\psi_i(x, y, z, t)\|_{8\times1}$ *с непрерывными на* $0 < x, y, z, t < 1$ *функциями* $\psi_i(x, y, z, t)$*, справедливо представление*

$$\Psi = (\mathbf{G}_x + \mathbf{G}_y + \mathbf{G}_z + \mathbf{G}_t) \cdot (\mathbf{h}_x + \mathbf{h}_y + \mathbf{h}_z + \mathbf{h}_t),$$

где

$$\mathbf{G}_x(x) = \|\mathbf{g}_{i,x}(x)\|_{8\times1},\ \mathbf{G}_y(y) = \|\mathbf{g}_{i,y}(y)\|_{8\times1},\ \mathbf{G}_z(z) = \|\mathbf{g}_{i,z}(z)\|_{8\times1},\ \mathbf{G}_t(t) = \|\mathbf{g}_{i,t}(t)\|_{8\times1};$$

$$\mathbf{h}_x(x) = \|h_{x,i}(x)\|_{9\times1},\ \mathbf{h}_y(y) = \|h_{y,i}(y)\|_{9\times1},\ \mathbf{h}_z(z) = \|h_{z,i}(z)\|_{9\times1},\ \mathbf{h}_t(t) = \|h_{t,i}(t)\|_{9\times1};$$

$$\mathbf{g}_{i,x}(x)=\left\|\alpha_{i,x,j}\cdot g_{i,j}(x)\right\|_{1\times 9},\ \mathbf{g}_{i,y}\left(y\right)=\left\|\alpha_{i,y,j}\cdot g_{i,j}(y)\right\|_{1\times 9},\ \mathbf{g}_{i,z}(z)=\left\|\alpha_{i,z,j}\cdot g_{i,j}(z)\right\|_{1\times 9},$$
$$\mathbf{g}_{i,t}(t)=\left\|\alpha_{i,t,j}\cdot g_{i,j}(t)\right\|_{1\times 9},\ \alpha_{i,x,j},\alpha_{i,y,j},\alpha_{i,z,j},\ \alpha_{i,t,j}=\overline{0,1};\ \alpha_{i,x,j}+\alpha_{i,y,j}+\alpha_{i,z,j}+\alpha_{i,t,j}=1.$$

С л е д с т в и е 2. *Для любой матрицы-функции* $\Psi\left(x,y,z,t\right)=\left\|\psi_i(x,y,z,t)\right\|_{8\times 1}$ *с непрерывными на* $0<x,y,z,t<1$ *функциями* $\psi_i\left(x,y,z,t\right)$, *справедливо представление*

$$\Psi\left(x,y,z,t\right)=\left(\mathbf{G}_x\mathbf{A}_x+\mathbf{G}_y\mathbf{A}_y+\mathbf{G}_z\mathbf{A}_z+\mathbf{G}_t\mathbf{A}_t\right)\mathbf{h}_x\mathbf{h}_y\mathbf{h}_z\mathbf{h}_t\mathbf{J},$$

где

$$\mathbf{G}_x(x)=\left\|g_i(x)\cdot\delta_{i,j}\right\|_{8\times 8},\ \mathbf{G}_y(y)=\left\|g_i(y)\cdot\delta_{i,j}\right\|_{8\times 8},\ \mathbf{G}_z(z)=\left\|g_i(z)\cdot\delta_{i,j}\right\|_{8\times 8},\ \mathbf{G}_t(t)=\left\|g_i(t)\cdot\delta_{i,j}\right\|_{8\times 8};$$
$$\mathbf{h}_x(x)=\left\|h_{x,i}(x)\cdot\delta_{i,j}\right\|_{9\times 9},\ \mathbf{h}_y(y)=\left\|h_{y,i}(y)\cdot\delta_{i,j}\right\|_{9\times 9},\ \mathbf{h}_z(z)=\left\|h_{z,i}(z)\cdot\delta_{i,j}\right\|_{9\times 9},\ \mathbf{h}_t(t)=\left\|h_{t,i}(t)\cdot\delta_{i,j}\right\|_{9\times 9};$$
$$\mathbf{A}_x=\left\|{}^x\alpha_{i,j}\right\|_{8\times 9},\ \mathbf{A}_y=\left\|{}^y\alpha_{i,j}\right\|_{8\times 9},\ \mathbf{A}_z=\left\|{}^z\alpha_{i,j}\right\|_{8\times 9},\ \mathbf{A}_t=\left\|{}^t\alpha_{i,j}\right\|_{8\times 9};\ \delta_{i,j}=\begin{cases}0, i\neq j;\\ 1,\ i=j;\end{cases}$$
$${}^x\alpha_{i,j},\ {}^y\alpha_{i,j},\ {}^z\alpha_{i,j},\ {}^t\alpha_{i,j}=\overline{0,1};\ {}^x\alpha_{i,j}+{}^y\alpha_{i,j}+{}^z\alpha_{i,j}+{}^t\alpha_{i,j}=1;\ \mathbf{J}=\left\|1\right\|_{9\times 1}.$$

С л е д с т в и е 3. *Для любой матрицы-функции* $\Psi\left(x,y,z,t\right)=\left\|\psi_i(x,y,z,t)\right\|_{8\times 1}$ *с непрерывными на* $0<x,y,z,t<1$ *функциями* $\psi_i\left(x,y,z,t\right)$, *справедливо представление*

$$\Psi\left(x,y,z,t\right)=\sum_{l=1}^{S}\mathbf{X}_l\left(x\right)\mathbf{Y}_l\left(y\right)\mathbf{Z}_l\left(z\right)\mathbf{T}_l\left(t\right)\mathbf{J},$$

где

$$\mathbf{X}_l=\left\|{}^l f_i(x)\cdot\delta_{i,j}\right\|_{8\times 8},\ \mathbf{Y}_l=\left\|{}^l g_i(y)\cdot\delta_{i,j}\right\|_{8\times 8},\ \mathbf{Z}_l=\left\|{}^l \varsigma_i(z)\cdot\delta_{i,j}\right\|_{8\times 8},\ \mathbf{T}_l=\left\|{}^l \tau_i(t)\cdot\delta_{i,j}\right\|_{8\times 8},\ \mathbf{J}=\left\|1\right\|_{8\times 1}.$$

С л е д с т в и е 4.

$$\mathbf{R}_x=\sum_{i=1}^{S_1}\mathbf{X}_{1,i}\left(x\right)\mathbf{Y}_{1,i}\left(y\right)\mathbf{Z}_{1,i}\left(z\right)\mathbf{T}_{1,i}\left(t\right),\ \mathbf{R}_y=\sum_{i=1}^{S_2}\mathbf{X}_{2,i}\left(x\right)\mathbf{Y}_{2,i}\left(y\right)\mathbf{Z}_{2,i}\left(z\right)\mathbf{T}_{2,i}\left(t\right),$$
$$\mathbf{R}_z=\sum_{i=1}^{S_3}\mathbf{X}_{3,i}\left(x\right)\mathbf{Y}_{3,i}\left(y\right)\mathbf{Z}_{3,i}\left(z\right)\mathbf{T}_{3,i}\left(t\right),\ \mathbf{R}_\sigma=\sum_{i=1}^{S_5}\mathbf{X}_{5,i}\left(x\right)\mathbf{Y}_{5,i}\left(y\right)\mathbf{Z}_{5,i}\left(z\right)\mathbf{T}_{5,i}\left(t\right),$$
$$\mathbf{P}_\rho=\sum_{i=1}^{S_6}\mathbf{X}_{6,i}\left(x\right)\mathbf{Y}_{6,i}\left(y\right)\mathbf{Z}_{6,i}\left(z\right)\mathbf{T}_{6,i}\left(t\right),\ \mathbf{R}_t=\sum_{i=1}^{S_4}\mathbf{X}_{4,i}\left(x\right)\mathbf{Y}_{4,i}\left(y\right)\mathbf{Z}_{4,i}\left(z\right)\mathbf{T}_{4,i}\left(t\right),$$

где S_i *– натуральные числа, зависящие от электродинамических параметров среды.*

Применяя следствия из теоремы Колмогорова к уравнению (8), в конечном итоге получаем, что проблема разделения переменных в нем может быть сведена к нахождению решений уравнения вида

$$\sum_{l=1}^{N}\tilde{\mathbf{X}}_l\left(x\right)\tilde{\mathbf{Y}}_l\left(y\right)\tilde{\mathbf{Z}}_l\left(z\right)\tilde{\mathbf{T}}_l\left(t\right)\mathbf{J}=0, \tag{13}$$

где

$$\tilde{\mathbf{X}}_l\left(x\right)=\left\|{}^l X_{i,j}(x)\right\|_{8\times 8},\ \tilde{\mathbf{Y}}_l\left(y\right)=\left\|{}^l Y_{i,j}(y)\right\|_{8\times 8},\ \tilde{\mathbf{Z}}_l\left(z\right)=\left\|{}^l Z_{i,j}(z)\right\|_{8\times 8},\ \tilde{\mathbf{T}}_l\left(t\right)=\left\|{}^l T_{i,j}(t)\right\|_{8\times 8},\ \mathbf{J}=\left\|1\right\|_{8\times 1}.$$

По внешнему виду уравнение (13) напоминает билинейное функциональное (9). Принципиальное его отличие от последнего состоит в том, что в нем вместо функций фигурируют матрицы-функции, поэтому по аналогии с билинейным функциональным, уравнение вида (13) будем называть билинейным матрично-функциональным уравнением.

3. Разделение переменных в системе уравнений Максвелла. Воспользуемся приведенными выше результатами и установим закономерности разделения переменных в системе уравнений Максвелла (8). В целях сокращения предстоящих вычислений конкретизируем вид материальных уравнений, а именно, будем рассматривать электромагнитные поля в отсутствие зарядов и токов в материальных средах, компоненты тензоров которых имеют вид

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_z(z)\varepsilon_t(t) & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_z(z)\varepsilon_t(t) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z(z)\varepsilon_t(t) \end{pmatrix}, \ \hat{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_z(z)\mu_t(t) & 0 & 0 \\ 0 & \mu_z(z)\mu_t(t) & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z(z)\mu_t(t) \end{pmatrix}, \ \hat{\sigma} = \|0\|_{3\times 3}. \quad (14)$$

В этом случае для матриц (6) и системы (8) соответственно получаем:

$$\mathbf{R}_x = \mathbf{R}_{z,x}\mathbf{R}_{t,x}, \mathbf{R}_{z,x} = \mathrm{diag}\left(1,\varepsilon_z,1,1,1,1,\mu_z,1\right),\ \mathbf{R}_{t,x} = \mathrm{diag}\left(1,\varepsilon_t,1,1,1,1,\mu_t,1\right),$$
$$\mathbf{R}_y = \mathbf{R}_{z,y}\mathbf{R}_{t,y}, \mathbf{R}_{z,y} = \mathrm{diag}\left(1,1,\varepsilon_z,1,1,\mu_z,1,1\right),\ \mathbf{R}_{t,y} = \mathrm{diag}\left(1,1,\varepsilon_t,1,1,\mu_t,1,1\right),$$
$$\mathbf{R}_z = \mathbf{R}_{z,z}\mathbf{R}_{t,z}, \mathbf{R}_{z,z} = \mathrm{diag}\left(1,1,1,\varepsilon_z,\mu_z,1,1,1\right),\ \mathbf{R}_{t,z} = \mathrm{diag}\left(1,1,1,\varepsilon_t,\mu_t,1,1,1\right),$$
$$\mathbf{R}_t = \mathbf{R}_{z,t}\mathbf{R}_{t,t}, \mathbf{R}_{z,t} = \mathrm{diag}\left(1,\varepsilon_z,\varepsilon_z,\varepsilon_z,\mu_z,\mu_z,\mu_z,1\right),\ \mathbf{R}_{t,t} = \mathrm{diag}\left(1,\varepsilon_t,\varepsilon_t,\varepsilon_t,\mu_t,\mu_t,\mu_t,1\right);$$
$$\left(\xi^1\partial_x\mathbf{R}_{z,x}\mathbf{R}_{t,x} + \xi^2\partial_y\mathbf{R}_{z,y}\mathbf{R}_{t,y} + \xi^3\partial_z\mathbf{R}_{z,z}\mathbf{R}_{t,z} + \xi^4\partial_t\mathbf{R}_{z,t}\mathbf{R}_{t,t}\right)\mathbf{R}_0\Psi = 0. \quad (15)$$

Воспользовавшись следствиями из теоремы Колмогорова, решение уравнения (15) ищем в виде

$$\Psi = \mathbf{X}(x)\mathbf{Y}(y)\mathbf{Z}(z)\mathbf{T}(t)\mathbf{J},\ \mathbf{X} = \mathrm{diag}\left(f_1,f_2,f_3,f_4,f_5,f_6,f_7,f_8\right),\ f_i = f_i(x);$$
$$\mathbf{Y} = \mathrm{diag}\left(g_1,g_2,g_3,g_4,g_5,g_6,g_7,g_8\right),\ g_i = g_i(y);\ \mathbf{T}(t) = \mathrm{diag}\left(\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4,\tau_5,\tau_6,\tau_7,\tau_8\right),\ \tau_i = \tau_i(t); \quad (16)$$
$$\mathbf{Z} = \mathrm{diag}\left(\kappa_1\varsigma_1,\kappa_2\varsigma_2,\kappa_2\varsigma_3,\kappa_2\varsigma_4,\kappa_7\varsigma_5,\kappa_7\varsigma_6,\kappa_7\varsigma_7,\kappa_8\varsigma_8\right),\ \varsigma_i = \varsigma_i(z),$$

где κ_i – коэффициенты физической размерности компонент векторов электромагнитного поля. Подставляя (16) в (15), получаем конкретный вид билинейного матрично-функционального уравнения (13).

В настоящее время, к сожалению, не существует общих методов построения решений такого рода уравнений. Однако в нашем случае нам удается эту задачу решить, при этом мы в полной мере используем идеи, реализованные в алгебраическом и обобщенном методах разделения переменных, а также свойства матриц $\xi^i, \mathbf{R}_x, \mathbf{R}_y, \mathbf{R}_z, \mathbf{R}_t$.

3.1. Отделение пространственной переменной *x* от переменных (*y, z, t*). Воспользовавшись свойствами матриц $\xi^i, \mathbf{R}_l, l = 0,x,y,z,t$, уравнение (15) преобразуем к виду

$$\left\{\tilde{\mathbf{R}}_{z,x}\tilde{\mathbf{R}}_{t,x}\left(\xi^1\partial_x\mathbf{X}\right) + \left(\mathbf{X}_y\xi^2\partial_y\mathbf{R}_{z,y}\mathbf{R}_{t,y} + \mathbf{X}_z\xi^3\partial_z\mathbf{R}_{z,z}\mathbf{R}_{t,z} + \mathbf{X}_t\xi^4\partial_t\mathbf{R}_{z,t}\mathbf{R}_{t,t}\right)\right\}\mathbf{ZYTR}_0\mathbf{J} = 0. \quad (17)$$

Здесь

$$\mathbf{X}_y = \mathrm{diag}\left(f_5,f_6,f_7,f_8,f_1,f_2,f_3,f_4\right),\ \mathbf{X}_z = \mathrm{diag}\left(f_6,f_5,f_8,f_7,f_2,f_1,f_4,f_3\right),$$
$$\mathbf{X}_t = \mathrm{diag}\left(f_2,f_1,f_4,f_3,f_6,f_5,f_8,f_7\right),\ \tilde{\mathbf{R}}_{z,x} = \mathrm{diag}\left(1,\mu_z,1,1,1,1,\varepsilon_z,1\right),\ \tilde{\mathbf{R}}_{t,x} = \mathrm{diag}\left(1,\mu_t,1,1,1,1,\varepsilon_t,1\right). \quad (18)$$

Предположим, что существует матрица $\mathbf{S}_x = \|s_{i,j}(x)\|_{8\times 8}$, такая, что выполняются тождества

$$\mathbf{X}_y = \mathbf{S}_x\Lambda_{x,y},\ \mathbf{X}_z = \mathbf{S}_x\Lambda_{x,z},\ \mathbf{X}_t = \mathbf{S}_x\Lambda_{x,t}, \quad (19)$$

где $\Lambda_{x,y}$, $\Lambda_{x,z}$, $\Lambda_{x,t}$ – матрицы числовых коэффициентов.

Для выполнения соотношений (19) необходимо принять

$$f_8 = f_7 = f_3 = f_4,\ f_1 = f_5 = f_6 = f_2;\ \mathbf{X} = \mathrm{diag}\left(f_2,f_2,f_4,f_4,f_2,f_2,f_4,f_4\right),$$
$$\Lambda_{x,y} = \Lambda_{x,z} = \Lambda_{x,t} = \|\delta_{i,j}\|_{8\times 8},\ \mathbf{S}_x = \mathrm{diag}\left(f_2,f_2,f_4,f_4,f_2,f_2,f_4,f_4\right). \quad (20)$$

В этом случае уравнение (17) преобразуется к виду:

$$\left(\mathbf{S}_x^{-1}\left(\xi^1\partial_x\mathbf{X}\right) + \left(\tilde{\mathbf{R}}_{z,x}\tilde{\mathbf{R}}_{t,x}\right)^{-1}\left(\xi^2\partial_y\mathbf{R}_{z,y}\mathbf{R}_{t,y} + \xi^3\partial_z\mathbf{R}_{z,z}\mathbf{R}_{t,z} + \xi^4\partial_t\mathbf{R}_{z,t}\mathbf{R}_{t,t}\right)\right)\mathbf{ZYTR}_0\mathbf{J} = 0. \quad (21)$$

Замечая тот факт, что в (21) только одна матрица-функция $\left(\mathbf{S}_x{}^{-1}\xi^1\partial_x\mathbf{X}\right)$ зависит от переменной x, приходим к заключению, что уравнение (21) обращается в тождество тогда и только тогда, когда выполняется соотношение

$$\mathbf{S}_x{}^{-1}\xi^1\frac{d}{dx}\mathbf{X}=\xi^1\Lambda_x,\ \Lambda_x=\operatorname{diag}\left(\lambda_{x,1},\lambda_{x,2},\lambda_{x,3},\lambda_{x,4},\lambda_{x,5},\lambda_{x,6},\lambda_{x,7},\lambda_{x,8}\right). \tag{22}$$

В (22) $\lambda_{x,i}$ – произвольные постоянные с физической размерностью (постоянные разделения переменных).

Таким образом, в уравнении (21) переменная x отделена, и соответствующая зависимость решения системы уравнений Максвелла определяется системой обыкновенных дифференциальных уравнений (22); по переменным (y, z, t) после отделения x будет иметь место следующая система уравнений в частных производных:

$$\left(\xi^1\Lambda_x\mathbf{R}_{z,x}\mathbf{R}_{t,x}+\xi^2\partial_y\mathbf{R}_{z,y}\mathbf{R}_{t,y}+\xi^3\partial_z\mathbf{R}_{z,z}\mathbf{R}_{t,z}+\xi^4\partial_t\mathbf{R}_{z,t}\mathbf{R}_{t,t}\right)\mathbf{ZYTR}_0\mathbf{J}=0. \tag{23}$$

3.2. Разделение *y, z,* и *t*. Повторяя рассуждения п. 3.1 применительно к уравнению (23), для определения явного вида матриц-функций $\mathbf{Y},\mathbf{T},\mathbf{Z}$ получаем следующие системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered}g_1=g_7=g_5=g_3, g_8=g_4=g_6=g_2;\ \mathbf{Y}=\operatorname{diag}\left(g_3,g_2,g_3,g_2,g_3,g_2,g_3,g_2\right),\\ \mathbf{S}_y=\operatorname{diag}\left(g_2,g_3,g_2,g_3,g_2,g_3,g_2,g_3\right),\ \Lambda_y=\operatorname{diag}\left(\lambda_{y,1},\lambda_{y,2},\lambda_{y,3},\lambda_{y,4},\lambda_{y,5},\lambda_{y,6},\lambda_{y,7},\lambda_{y,8}\right),\\ \mathbf{S}_y{}^{-1}\xi^2\frac{d}{dy}\mathbf{Y}=\xi^2\Lambda_y;\end{gathered} \tag{24}$$

$$\begin{gathered}\tau_8=\tau_7=\tau_6=\tau_5,\ \tau_1=\tau_3=\tau_4=\tau_2;\ \mathbf{T}=\operatorname{diag}\left(\tau_2,\tau_2,\tau_2,\tau_2,\tau_5,\tau_5,\tau_5,\tau_5\right);\ \tilde{\mathbf{R}}_{t,r}=\operatorname{diag}\left(1,\mu_t,1,1,1,1,\varepsilon_t,1\right);\\ \mathbf{S}_t=\operatorname{diag}\left(\tau_5,\tau_5,\tau_5,\tau_5,\tau_2,\tau_2,\tau_2,\tau_2\right),\ \Lambda_t=\operatorname{diag}\left(\lambda_{t,1},\lambda_{t,2},\lambda_{t,3},\lambda_{t,4},\lambda_{t,5},\lambda_{t,6},\lambda_{t,7},\lambda_{t,8}\right);\\ \left(\tilde{\mathbf{R}}_{t,r}\mathbf{S}_t\right)^{-1}\left(\xi^4\frac{d}{dt}\mathbf{R}_{t,t}\right)\mathbf{T}=-\xi^4\Lambda_t;\end{gathered} \tag{25}$$

$$\left\{\xi^1\Lambda_x\mathbf{R}_{z,x}+\xi^2\Lambda_y\mathbf{R}_{z,y}+\xi^3\frac{d}{dz}\mathbf{R}_{z,x}-\xi^4\Lambda_t\mathbf{R}_{z,t}\right\}\mathbf{ZR}_0\mathbf{J}=0, \tag{26}$$

где $\lambda_{y,i}$, $\lambda_{t,i}$ – постоянные разделения переменных.

4. Решение системы уравнений Максвелла. В результате разделения переменных в системе уравнений Максвелла в материальных средах вида (14) мы получили четыре системы обыкновенных дифференциальных уравнений (22), (24)–(26). Займемся их исследованием на предмет получения решений.

Переходя к явному виду матриц, фигурирующих в (22), и требуя совместимости последней, приходим к необходимости выполнения соотношений $\lambda_{x,6}=\lambda_{x,5}=\lambda_{x,1}=\lambda_{x,2};\ \lambda_{x,8}=\lambda_{x,7}=\lambda_{x,3}=\lambda_{x,4}$. В итоге система (22) приобретает вид:

$$\frac{df_2(x)}{dx}=f_4(x)\lambda_{x,2},\ \frac{df_4(x)}{dx}=f_2(x)\lambda_{x,4}, \tag{27}$$

и для общего решения получаем

$$\begin{gathered}f_2(x)=c_1\exp\left(\sqrt{\delta_x}x\right)+c_2\exp\left(-\sqrt{\delta_x}x\right);\ f_4(x)=\sqrt{\lambda_{x,4}/\lambda_{x,2}}\left(c_1\exp\left(\sqrt{\delta_x}x\right)-c_2\exp\left(-\sqrt{\delta_x}x\right)\right);\\ c_1,c_2=\text{const};\ \delta_x=\lambda_{x,2}\lambda_{x,4}.\end{gathered} \tag{28}$$

Аналогичным образом для системы (24) можно получить

$$\begin{gathered}\lambda_{y,8}=\lambda_{y,6}=\lambda_{y,4}=\lambda_{y,2},\ \lambda_{y,7}=\lambda_{y,5}=\lambda_{y,1}=\lambda_{y,3};\\ \frac{dg_2}{dy}=\lambda_{y,2}g_3,\ \frac{dg_3}{dy}=\lambda_{y,3}g_2;\\ g_2(y)=c_3\exp\left(\sqrt{\delta_y}y\right)+c_4\exp\left(-\sqrt{\delta_y}y\right);\ g_3(y)=\sqrt{\lambda_{y,3}/\lambda_{y,2}}\left(c_3\exp\left(\sqrt{\delta_y}y\right)-c_4\exp\left(-\sqrt{\delta_y}y\right)\right);\\ c_3,c_4=\mathrm{const};\ \delta_y=\lambda_{y,2}\lambda_{y,3}.\end{gathered} \quad (29)$$

Требуя разрешимости системы (25), приходим к необходимости выполнения тождеств $\lambda_{t,8}=\lambda_{t,7}=\lambda_{t,6}=\lambda_{t,5}$, $\lambda_{t,1}=\lambda_{t,3}=\lambda_{t,4}=\lambda_{t,2}$ и окончательно получаем

$$\delta_t=\lambda_{t,2}\lambda_{t,5};\ \frac{d\left(\varepsilon_t(t)\tau_2(t)\right)}{dt}=\tau_5(t)\lambda_{t,2},\ \frac{d\left(\mu_t(t)\tau_5(t)\right)}{dt}=\tau_2(t)\lambda_{t,5}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\varepsilon_t\mu_t\dfrac{d^2\tau_5(t)}{dt^2}+\left\{2\varepsilon_t\dfrac{d\mu_t}{dt}+\dfrac{d\varepsilon_t}{dt}\mu_t\right\}\dfrac{d\tau_5(t)}{dt}+\left(\varepsilon_t\dfrac{d^2\mu_t}{dt^2}+\dfrac{d\varepsilon_t}{dt}\dfrac{d\mu_t}{dt}-\delta_t\right)\tau_5(t)=0;\\ \varepsilon_t\mu_t\dfrac{d^2\tau_2(t)}{dt^2}+\left\{2\dfrac{d\varepsilon_t}{dt}\mu_t+\varepsilon_t\dfrac{d\mu_t}{dt}\right\}\dfrac{d\tau_2(t)}{dt}+\left(\dfrac{d^2\varepsilon_t}{dt^2}\mu_t+\dfrac{d\varepsilon_t}{dt}\dfrac{d\mu_t}{dt}-\delta_t\right)\tau_2(t)=0.\end{cases} \quad (30)$$

Уравнения (30) относятся к классу линейных однородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, исследованию которых посвящена обширная библиография (см., напр., [12]). Тем не менее, к сожалению, в общем виде получить их решения не удается, а характер функций $\tau_2(t)$, $\tau_5(t)$ будет определяться конкретным видом функций $\varepsilon_t(t)$, $\mu_t(t)$.

Обратимся теперь к системе (26). Используя явный вид матриц, получаем:

$$\kappa_7\lambda_{y,3}\varsigma_5(z)+\kappa_7\frac{d\varsigma_6(z)}{dz}+\kappa_2\lambda_{t,2}\varepsilon_z\varsigma_2(z)=0, \quad (31)$$

$$\kappa_7\lambda_{x,4}\mu_z\varsigma_7(z)+\kappa_7\lambda_{y,2}\mu_z\varsigma_6(z)-\kappa_7\frac{d\mu_z\varsigma_5(z)}{dz}=0, \quad (32)$$

$$-\kappa_7\lambda_{x,2}\varsigma_6(z)+\kappa_7\lambda_{y,3}\varsigma_7(z)-\kappa_2\lambda_{t,2}\varepsilon_z\varsigma_4(z)=0, \quad (33)$$

$$-\kappa_7\lambda_{x,2}\varsigma_5(z)-\kappa_7\frac{d\varsigma_7(z)}{dz}+\kappa_2\lambda_{t,2}\varepsilon_z\varsigma_3(z)=0, \quad (34)$$

$$\kappa_2\lambda_{x,4}\varsigma_4(z)+\kappa_2\frac{d\varsigma_2(z)}{dz}+\kappa_7\lambda_{t,5}\mu_z\varsigma_6(z)=0, \quad (35)$$

$$-\kappa_2\lambda_{x,4}\varsigma_3(z)+\kappa_2\lambda_{y,2}\varsigma_2(z)+\kappa_7\lambda_{t,5}\mu_z\varsigma_5(z)=0, \quad (36)$$

$$\kappa_2\lambda_{x,2}\varepsilon_z\varsigma_2+\kappa_2\lambda_{y,3}\varepsilon_z\varsigma_3(z)-\kappa_2\frac{d\varepsilon_z\varsigma_4(z)}{dz}=0, \quad (37)$$

$$-\kappa_2\lambda_{y,2}\varsigma_4(z)-\kappa_2\frac{d\varsigma_3(z)}{dz}+\kappa_7\lambda_{t,5}\mu_z\varsigma_7(z)=0. \quad (38)$$

Пусть далее $\delta_r=\delta_x+\delta_y\neq 0$. Тогда из (32), (33) следует:

$$\varsigma_6(z)=\frac{-\kappa_2\lambda_{x,4}\lambda_{t,2}\varepsilon_z\mu_z\varsigma_4(z)+\kappa_7\lambda_{y,3}\dfrac{d\mu_z\varsigma_5(z)}{dz}}{\kappa_7\mu_z\delta_r},\ \varsigma_7(z)=\frac{\kappa_2\lambda_{y,2}\lambda_{t,2}\varepsilon_z\mu_z\varsigma_4(z)+\kappa_7\lambda_{x,2}\dfrac{d\mu_z\varsigma_5(z)}{dz}}{\kappa_7\mu_z\delta_r}. \quad (39)$$

Аналогично из (36), (37) имеем

$$\varsigma_2(z)=\frac{-\kappa_7\lambda_{y,3}\lambda_{t,5}\varepsilon_z\mu_z\varsigma_5(z)+\kappa_2\lambda_{x,4}\dfrac{d\varepsilon_z\varsigma_4(z)}{dz}}{\kappa_2\varepsilon_z\delta_r},\ \varsigma_3(z)=\frac{\kappa_7\lambda_{x,2}\lambda_{t,5}\varepsilon_z\mu_z\varsigma_5(z)+\kappa_2\lambda_{y,2}\dfrac{d\varepsilon_z\varsigma_4(z)}{dz}}{\kappa_2\varepsilon_z\delta_r}. \quad (40)$$

Подставляя выражения (39), (40) в оставшиеся уравнения рассматриваемой системы, получаем обыкновенные дифференциальные уравнения:

$$\varepsilon_z{}^2\frac{d^2\varsigma_4(z)}{dz^2}+\varepsilon_z\frac{d\varepsilon_z}{dz}\frac{d\varsigma_4(z)}{dz}+\left\{\varepsilon_z\frac{d^2\varepsilon_z}{dz^2}-\left(\frac{d\varepsilon_z}{dz}\right)^2-\varepsilon_z{}^3\mu_z\delta_t+\varepsilon_z{}^2\delta_r\right\}\varsigma_4(z)=0, \tag{41}$$

$$\mu_z{}^2\frac{d^2\varsigma_5(z)}{dz^2}+\mu_z\frac{d\mu_z}{dz}\frac{d\varsigma_5(z)}{dz}+\left\{\mu_z\frac{d^2\mu_z}{dz^2}-\left(\frac{d\mu_z}{dz}\right)^2-\varepsilon_z\mu_z{}^3\delta_t+\mu_z{}^2\delta_r\right\}\varsigma_5(z)=0. \tag{42}$$

Очевидно, что уравнения (41), (42) относятся к тому же виду, что и уравнения (30), т. е. являются линейными однородными обыкновенными дифференциальными уравнениями второго порядка, и характер функций $\varsigma_4(z)$, $\varsigma_5(z)$ будет определяться конкретным видом функций $\varepsilon_z(z)$, $\mu_z(z)$.

Таким образом, в случае, когда $\delta_r \neq 0$, построив решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений (22), (24)–(26), находим все компоненты электромагнитного поля:

$$E_x=\left(c_1e^{\sqrt{\delta_x}x}+c_2e^{-\sqrt{\delta_x}x}\right)\left(c_3e^{\sqrt{\delta_y}y}+c_4e^{-\sqrt{\delta_y}y}\right)\frac{-\kappa_7\lambda_{y,3}\lambda_{t,5}\varepsilon_z\mu_z\varsigma_5(z)+\kappa_2\lambda_{x,4}\dfrac{d\varepsilon_z\varsigma_4(z)}{dz}}{\varepsilon_z\delta_r}\tau_2(t),$$

$$E_y=\sqrt{\lambda_{x,4}/\lambda_{x,2}}\sqrt{\lambda_{y,3}/\lambda_{y,2}}\left(c_1e^{\sqrt{\delta_x}x}-c_2e^{-\sqrt{\delta_x}x}\right)\left(c_3e^{\sqrt{\delta_y}y}-c_4e^{-\sqrt{\delta_y}y}\right)\times$$

$$\times\frac{\kappa_7\lambda_{x,2}\lambda_{t,5}\varepsilon_z\mu_z\varsigma_5(z)+\kappa_2\lambda_{y,2}\dfrac{d\varepsilon_z\varsigma_4(z)}{dz}}{\varepsilon_z\delta_r}\tau_2(t),$$

$$E_z=-\kappa_2\sqrt{\lambda_{x,4}/\lambda_{x,2}}\left(c_1e^{\sqrt{\delta_x}x}-c_2e^{-\sqrt{\delta_x}x}\right)\left(c_3e^{\sqrt{\delta_y}y}+c_4e^{-\sqrt{\delta_y}y}\right)\varsigma_4(z)\tau_2(t),$$

$$H_z=-\kappa_7\sqrt{\lambda_{y,3}/\lambda_{y,2}}\left(c_1e^{\sqrt{\delta_x}x}+c_2e^{-\sqrt{\delta_x}x}\right)\left(c_3e^{\sqrt{\delta_y}y}-c_4e^{-\sqrt{\delta_y}y}\right)\varsigma_5(z)\tau_5(t),$$

$$H_y=\left(c_1e^{\sqrt{\delta_x}x}+c_2e^{-\sqrt{\delta_x}x}\right)\left(c_3e^{\sqrt{\delta_y}y}+c_4e^{-\sqrt{\delta_y}y}\right)\frac{-\kappa_2\lambda_{x,4}\lambda_{t,2}\varepsilon_z\mu_z\varsigma_4(z)+\kappa_7\lambda_{y,3}\dfrac{d\mu_z\varsigma_5(z)}{dz}}{\mu_z\delta_r}\tau_5(t),$$

$$H_x=\sqrt{\lambda_{x,4}/\lambda_{x,2}}\sqrt{\lambda_{y,3}/\lambda_{y,2}}\left(c_1e^{\sqrt{\delta_x}x}-c_2e^{-\sqrt{\delta_x}x}\right)\left(c_3e^{\sqrt{\delta_y}y}-c_4e^{-\sqrt{\delta_y}y}\right)\times$$

$$\times\frac{\kappa_2\lambda_{y,2}\lambda_{t,2}\varepsilon_z\mu_z\varsigma_4(z)+\kappa_7\lambda_{x,2}\dfrac{d\mu_z\varsigma_5(z)}{dz}}{\mu_z\delta_r}\tau_5(t).$$

Рассмотрим ситуацию, когда $\delta_r=\delta_x+\delta_y=0$. В этом случае система обыкновенных дифференциальных уравнений (31)–(38) становится переопределенной.

Действительно, из (32), (33), (36), (37) соответственно следуют уравнения:

$$\frac{d\mu_z\varsigma_5(z)}{dz}=\frac{\lambda_{x,4}}{\lambda_{y,3}}\frac{\kappa_2}{\kappa_7}\lambda_{t,2}\varepsilon_z\mu_z\varsigma_4(z),\quad \frac{d\varepsilon_z\varsigma_4(z)}{dz}=\frac{\lambda_{y,3}}{\lambda_{x,4}}\frac{\kappa_7}{\kappa_2}\lambda_{t,5}\varepsilon_z\mu_z\varsigma_5(z)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{d^2\varsigma_4}{dz^2}+\frac{\varepsilon'_z}{\varepsilon_z}\frac{d\varsigma_4}{dz}+\left(\frac{\varepsilon''_z}{\varepsilon_z}-\frac{(\varepsilon'_z)^2}{\varepsilon_z{}^2}-\varepsilon_z\mu_z\delta_t\right)\varsigma_4=0;\ \frac{d^2\varsigma_5}{dz^2}+\frac{\mu'_z}{\mu_z}\frac{d\varsigma_5}{dz}+\left(\frac{\mu''_z}{\mu_z}-\frac{(\mu'_z)^2}{\mu_z{}^2}-\varepsilon_z\mu_z\delta_t\right)\varsigma_5=0. \tag{43}$$

Из уравнений (31), (35), (38), (34) получаем неоднородные обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка:

$$\frac{d^2\varsigma_2}{dz^2}-\frac{\mu'_z}{\mu_z}\frac{d\varsigma_2}{dz}-\delta_t\varepsilon_z\mu_z\varsigma_2=\frac{\kappa_7}{\kappa_2}\lambda_{y,3}\lambda_{t,5}\mu_z\varsigma_5+\lambda_{x,4}\left(\varsigma'_4-\frac{\mu'_z}{\mu_z}\varsigma_4\right), \tag{44}$$

$$\frac{d^2\varsigma_6}{dz^2}-\frac{\varepsilon'_z}{\varepsilon_z}\frac{d\varsigma_6}{dz}-\delta_t\varepsilon_z\mu_z\varsigma_6=\frac{\kappa_2}{\kappa_7}\lambda_{x,4}\lambda_{t,2}\varepsilon_z\varsigma_4-\lambda_{y,3}\left(\varsigma'_5-\frac{\varepsilon'_z}{\varepsilon_z}\varsigma_5\right), \tag{45}$$

$$\frac{d^2\varsigma_3}{dz^2}-\frac{\mu'_z}{\mu_z}\frac{d\varsigma_3}{dz}-\delta_t\varepsilon_z\mu_z\varsigma_3=-\frac{\kappa_7}{\kappa_2}\lambda_{x,2}\lambda_{t,5}\mu_z\varsigma_5-\lambda_{y,2}\left(\varsigma'_4-\frac{\mu'_z}{\mu_z}\varsigma_4\right), \tag{46}$$

$$\frac{d^2\varsigma_7}{dz^2}-\frac{\varepsilon'_z}{\varepsilon_z}\frac{d\varsigma_7}{dz}-\delta_t\varepsilon_z\mu_z\varsigma_7=-\frac{\kappa_2}{\kappa_7}\lambda_{y,2}\lambda_{t,2}\varepsilon_z\varsigma_4-\lambda_{x,2}\left(\varsigma'_5-\frac{\varepsilon'_z}{\varepsilon_z}\varsigma_5\right). \tag{47}$$

Помимо уравнений (43)–(47), искомые функции $\varsigma_i(z)$ должны удовлетворять тождествам:

$$-\kappa_7\lambda_{x,2}\varsigma_6+\kappa_7\lambda_{y,3}\varsigma_7=\kappa_2\lambda_{t,2}\varepsilon_z\varsigma_4;\ -\kappa_2\lambda_{x,4}\varsigma_3+\kappa_2\lambda_{y,2}\varsigma_2=-\kappa_7\lambda_{t,5}\mu_z(z)\varsigma_5. \tag{48}$$

Вопрос о том, в каких случаях переопределенная система (43)–(48) будет иметь решения, а также какова их физическая интерпретация, остается открытым и является предметом дальнейших исследований.

Заключение. В настоящей работе нам удалось показать, что задача разделения переменных в уравнениях Максвелла может быть сведена к задаче поиска решений билинейных матрично-функциональных уравнений. Данный факт позволил улучшить алгебраический метод разделения переменных и обобщить его на случай исследования уравнений Максвелла как системы дифференциальных уравнений в частных производных. В порядке иллюстрации возможностей предлагаемого метода осуществлено полное разделение переменных в уравнениях Максвелла для одного случая неоднородных нестационарных сред. Полученные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, следующие из уравнений Максвелла, позволяют осуществлять расчет электромагнитного поля как в пространственно-частотном, так и в пространственно-временном представлении.

Литература

1. *Андрушкевич И. Е., Шишкин Г. В.* // Теорет. и мат. физика. 1987. № 2. С. 289–302.
2. *Андрушкевич И. Е.* // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 2008. № 1. С. 60–66.
3. *Шапиро И. С.* // Успехи физ. наук. 1972. Т. 108, № 2. С. 319–333.
4. *Боргардт А. А.* // Докл. АН СССР. 1951. Т. 78, № 6. С. 1113–1114.
5. *Федоров Ф. И.* // Докл. АН СССР. 1952. Т. 82, № 1. С. 37–40.
6. *Фущич В. И., Никитин А. Г.* // Scientific Works. 2000. Vol. 2. P. 237–278.
7. *Скоробогатько В. Я.* Исследования по качественной теории дифференциальных уравнений с частными производными. Киев, 1980.
8. *Андрушкевич И. Е.* Методы разделения переменных в волновых уравнениях. Новополоцк, 2010.
9. *Колмогоров А. Н.* // Докл. АН СССР. 1957. Т. 114, № 5. С. 953–956.
10. *Sprecher D. A.* // J. Approxim. Theory. 1972. Vol. 6, N 2. P. 123–134.
11. *Doss R.* // Amer. J. Math. 1976. Vol. 98, N. P. 375–383.
12. *Зайцев В. Ф., Полянин А. Д.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 2001.

I. E. ANDRUSHKEVICH, Yu. V. SHIENOK

REDUCTION OF THE SYSTEM OF MAXWELL EQUATIONS TO THE SYSTEM OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

Summary

The algebraic variables separation method, developed prior to Dirack's relative equation, has been improved and generalized to the system of Maxwell equations in order to construct its accurate solutions.