ФІЗІКА

УДК 530.12,535.13

Е. А. ТОЛКАЧЕВ

РАССЛОЕНИЕ ХОПФА $S^3 \to S^2$: ПРОЕКТИВНЫЕ КООРДИНАТЫ И ВЕКТОР-ПАРАМЕТРЫ Ф. И. ФЕДОРОВА

Институт физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси

(Поступила в редакцию 03.10.2014)

Введение. Как известно [1], расслоение Хопфа $S^3 \to S^2$ [2] эффективно применяется в различных областях физики: от теории магнитного монополя и космологии до сугубо практических задач квантовой механики кубитов и классической электродинамики топологически нетривиальных полевых конфигураций. Поэтому не удивительно, что регулярно появляются работы, посвященные конкретной реализации данного расслоения как в чисто математическом аспекте [3], так и применительно к специфике физических задач [4]. При этом достаточно стандартным приемом является использование алгебры кватернионов для реализации сферы S^3 и преобразований групп $SU(2)$ и $SO(3)$. В то же время использование в качестве координат угловых переменных не позволяет в полной мере реализовать преимущества алгебраического подхода из-за отсутствия в них явного закона композиции конечных преобразований. Этот недостаток легко устраняется при использовании кватернионного варианта векторной параметризации Ф. И. Федорова [5]. Еще в работах [6, 7] в этом последовательно алгебраическом формализме было построено $O(4)$-ковариантное представление преобразования Кустанхеймо – Штифеля $R^4 \to R^3$, топологические свойства которого совпадают с характеристиками расслоения Хопфа. В частности, удалось впервые показать, что в векторной параметризации не только связность, но и сечение расслоения выражаются через монопольный потенциал. Было также продемонстрировано, что известные формулировки преобразования Кустанхеймо – Штифеля различаются лишь выбором кватернионного базиса и параметризаций компонент кватернионов. Оставался неисследованным вопрос о связи универсального кватернионного представления [6] с описанием расслоения Хопфа в проективных координатах $R^3 \cup \infty \to R^2 \cup \infty$, которое широко используется при построении и анализе зацепляющихся и заузленных решений свободных уравнений Максвелла — топологически нетривиальных 0-полей [8, 9].

В настоящей работе описана в кватернионах связь проективных координат с вектор-параметрами, в явном виде выписаны связности и сечения, что не только дает ковариантное представление потенциалов 0-полей, но и дополняет теорию векторной параметризации группы $SU(2)$ [10].

Теоретическая часть. Напомним [5], что любой элемент алгебры кватернионов представим в виде $q = q_m e_m \equiv q_0 + \underline{q}$, где q_m принадлежат полю действительных чисел, а e_m подчиняются закону умножения $e_k e_l = -\delta_{kl} e_0 + \delta_{0l} e_l + \delta_{k0} e_k + \varepsilon_{0klm} e_m$, $j, k, l,\ m = 0,1,2,3$, который легко переписывается с использованием аналогов стандартных операций векторной алгебры

$$qp = q_0 p_0 - (\underline{q}\ \underline{p}) + q_0 \underline{p} + p_0 \underline{q} + [\underline{q}\ \underline{p}], \tag{1}$$

где $(\underline{q}\ \underline{p}) = \delta_{ab} q_a p_b$, $[\underline{q}\ \underline{p}] = \varepsilon_{abc} q_b p_c$, $a, b, c = 1,2,3$. Кватернионное сопряжение $-\overline{q} = q_0 - \underline{q}$ является антиавтоморфизмом алгебры кватернионов $\overline{pq} = \overline{q}\ \overline{p}$. Соответственно $q_0 = \frac{1}{2}(q + \overline{q})$, $\underline{q} = \frac{1}{2}(q - \overline{q})$.

Норма кватерниона – $N(q) = \sqrt{q\overline{q}} = \sqrt{q_0 q_0 + (\underline{q}\ \underline{q})} \equiv \sqrt{q_0^2 + \underline{q}^2}$. Особое место в приложениях занимают кватернионы единичной нормы $N(\hat{q}) = 1$, реализующие представление группы $SU(2)$. Для них существует двузначное представление через вектор-параметр $\underline{c} = \hat{\underline{q}}\hat{q}_0^{-1}$:

$$\hat{q} = \hat{q}_0 + \hat{\underline{q}} \to \hat{q}_{\pm}(\underline{c}) = \pm\frac{1+\underline{c}}{\sqrt{1+\underline{c}^2}},\ \ \underline{c} = \hat{\underline{q}}\hat{q}_0^{-1},\ \pm \leftrightarrow \operatorname{sign}\hat{q}_0, \tag{2}$$

сохраняющее свою структуру при умножении $\hat{q}_3 = \hat{q}_1\hat{q}_2$, в силу закона композиции Ф. И. Федорова [10]:

$$\underline{c}_3 = \frac{\underline{c}_1 + \underline{c}_2 + [\underline{c}_1\underline{c}_2]}{1 - (\underline{c}_1\underline{c}_2)}. \tag{3}$$

Двузначность представления (2) необходимо учитывать при его сопоставлении с традиционным экспоненциальным представлением группы $SU(2)$ – $\hat{q} = \exp(\underline{n}\vartheta)$. Рассмотрим, например, произведение $\hat{q}_1\hat{q}_2 = \exp(\underline{n}\vartheta_1)\exp(\underline{n}\vartheta_2) = \exp(\underline{n}(\vartheta_1 + \vartheta_2)) = \hat{q}_3$. Если $(\hat{q}_1)_0$, $(\hat{q}_2)_0 > 0$, то каждый из $\hat{q}_1$, $\hat{q}_2$ представляется в форме (2) со знаком плюс. Однако представление их произведения в виде (2) зависит от знака $(\hat{q}_1)_0(\hat{q}_2)_0 - (\hat{\underline{q}}_1\hat{\underline{q}}_2)$. Таким образом, даже в случае подгруппы $U(1)$ произведения $\hat{q}_1\hat{q}_2$ и $\hat{q}_{1\pm}\hat{q}_{2\pm}$, вообще говоря, не совпадают.

Проблемы со знаками исчезают, если используются только билинейные комбинации кватернионов вида (2), как это имеет место при кватернионной формулировке [6] расслоения Хопфа $S^3 \to S^2$:

$$u\underline{n}_3\overline{u} = \hat{\underline{r}},\ \ u\overline{u} = 1,\ \underline{n}_3^2 = 1 \to \hat{\underline{r}}^2 = 1. \tag{4}$$

Очевидное соотношение эквивалентности $u \sim u\exp\underline{n}_3\tau$ показывает, что это главное расслоение со структурной группой $SO(2) \approx SU(1) \approx S^1$ – малой группой единичного векторного кватерниона $\underline{n}_3$, который, не теряя общности, можно отождествить с единицей базиса кватернионов. Параметр $0 \le \tau \le 2\pi$ – координата в слое. В нетривиальности рассматриваемого расслоения – $S^3 \ne S^2 \otimes S^1$ легко убедиться, если трактовать (4) как совокупность поворотов из группы $SO(3) = SU(2)/\pm 1$, связывающих $\underline{n}_3$ с пробегающим единичную сферу S^2 векторным кватернионом $\hat{\underline{r}} = \sin\vartheta(\cos\varphi\underline{n}_1 + \sin\varphi\underline{n}_2) + \cos\vartheta\underline{n}_3$, которую невозможно задать одной формулой для всех $\hat{\underline{r}}$. Действительно, кватернион, представляющий собой композицию плоских поворотов и преобразований в слое

$$\begin{aligned} u_N &= \Big(\cos\frac{\vartheta}{2} + \frac{[\underline{n}_3\hat{\underline{r}}]}{\big|[\underline{n}_3\hat{\underline{r}}]\big|}\sin\frac{\vartheta}{2}\Big)e^{-\underline{n}_3\tau} = \cos\frac{\vartheta}{2}\cos\tau - \underline{n}_1\sin\frac{\vartheta}{2}\sin(\tau+\varphi) + \\ &+ \underline{n}_2\sin\frac{\vartheta}{2}\cos(\tau+\varphi) - \underline{n}_3\cos\frac{\vartheta}{2}\sin\tau = \frac{1 + \dfrac{[\underline{n}_3\hat{\underline{r}}]}{1+(\underline{n}_3\hat{\underline{r}})}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{[\underline{n}_3\hat{\underline{r}}]}{1+(\underline{n}_3\hat{\underline{r}})}\right)^2}} \cdot \frac{1 - \underline{n}_3 tg\tau}{\sqrt{1+tg^2\tau}} = \frac{1+\underline{c}_N}{\sqrt{1+\underline{c}_N^2}}, \end{aligned} \tag{5}$$

где

$$\underline{c}_N = \frac{[\underline{n}_3\hat{\underline{r}}] - (\underline{n}_3 + \hat{\underline{r}})tg\tau}{1 + (\underline{n}_3\hat{\underline{r}})},\ \ 1+\underline{c}_N^2 = \frac{2}{[1+(\underline{n}_3\hat{\underline{r}})]\cos^2\tau}, \tag{5а}$$

определен всюду, кроме «южного полюса» S^2 – $\vartheta = \pi$, $[1 + (\underline{n}_3\hat{\underline{r}})] = 0$. Существует бесконечное множество осей, плоским поворотом вокруг которых можно изменить направление вектора $\underline{n}_3$ на обратное. Поэтому локальная тривиализация расслоения достигается введением на базе S^2 двух карт – «северной» – M_N и «южной» – M_S:

$$M_N : 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2} + \varepsilon \ \text{ и } \ M_S : \frac{\pi}{2} - \varepsilon \le \vartheta \le \pi,$$

где $0 < 2\varepsilon < \pi$. При этом расслоение Хопфа задается формулами

$$\begin{aligned} u_N \underline{n}_3 \overline{u}_N &= \underline{\hat{r}} \quad \in M_N, \\ u_S(-\underline{n}_3)\overline{u}_S &= \underline{\hat{r}} \quad \in M_S, \end{aligned} \tag{6}$$

где неопределенность кватерниона $u_S = (\cos\frac{(\pi - \vartheta)}{2} - \underline{n}_2 e^{-\underline{n}_3\varphi} \sin\frac{(\pi-\vartheta)}{2}) e^{-\underline{n}_3\tau}$ при $\vartheta = 0$ лежит вне области его задания. Если устранить знак минус в нижней из формул (6) – $\underline{\hat{r}} = u_S(-\underline{n}_3)\overline{u}_S = u_S \underline{n}_2 \underline{n}_3 \overline{u_S \underline{n}_2} = u'_S \underline{n}_3 \overline{u}'_S$, то нетрудно видеть, что в области перекрытия карт сечения связаны между собой сдвигом вдоль слоя $u'_S(\tau = 0)\underline{n}_2 = u_N(\tau = 0)e^{\underline{n}_3\varphi}$. Результирующий вектор-параметр в M_S есть $\underline{c}_S = \frac{(\underline{\hat{r}} - \underline{n}_3)\,\mathrm{tg}\,\tau - [\underline{n}_3 \underline{\hat{r}}]}{1 - (\underline{n}_3 \underline{\hat{r}})}$.

Над каждой из карт расслоение $S^3 \to S^2$ имеет структуру прямого произведения, т. е. тривиализируется. При изменении параметра τ от 0 до 2π и фиксированных ϑ, φ конец единичного радиус-вектора в R^4 описывает окружность S^1 на сфере $S^3 \approx SU(2)$. Метрика в каждой из карт определяется выражениями

$$du_N \overline{du_N} = (d\vartheta, d\varphi, d\tau) \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \sin^2\frac{\vartheta}{2} & \sin^2\frac{\vartheta}{2} \\ 0 & \sin^2\frac{\vartheta}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\vartheta \\ d\varphi \\ d\tau \end{pmatrix}, \tag{7}$$

$$du_S \overline{du_S} = (d\vartheta, d\varphi, d\tau) \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2\frac{\vartheta}{2} & -\cos^2\frac{\vartheta}{2} \\ 0 & -\cos^2\frac{\vartheta}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\vartheta \\ d\varphi \\ d\tau \end{pmatrix}, \tag{8}$$

которые можно использовать для построения связности. В сферических координатах произвольная линейная дифференциальная 1-форма имеет вид

$$\omega = \omega_\vartheta(\vartheta,\varphi,\tau)d\vartheta + \omega_\varphi(\vartheta,\varphi,\tau)d\varphi + \omega_\tau(\vartheta,\varphi,\tau)d\tau.$$

Принимая во внимание, что фундаментальное вертикальное векторное поле, генерирующее сдвиги вдоль слоя, есть $V = \frac{\partial}{\partial\tau}$, выбираем на нем значение 1-формы $\omega(V) = \omega_\tau = 1$, задавая тем самым нормировку формы связности. Для того чтобы горизонтальное векторное поле было инвариантным относительно преобразований структурной группы, потребуем, чтобы функции ω_ϑ и ω_φ не зависели от координаты слоя, т. е. $\omega = A_\vartheta(\vartheta,\varphi)d\vartheta + A_\varphi(\vartheta,\varphi)d\varphi + d\tau$, где $A_\vartheta(\vartheta,\varphi)$ и $A_\varphi(\vartheta,\varphi)$ – произвольные функции координат базы. Поскольку в каждой из карт известна метрика, то для нахождения горизонтального векторного поля достаточно использовать его ортогональность фундаментальному полю. Поэтому выберем горизонтальные базисные векторы в виде $e_{\vartheta,\varphi} = \partial_{\vartheta,\varphi} - A_{\vartheta,\varphi}\partial_\tau$ и потребуем $(e_{\vartheta,\varphi}V) = 0$. Используя найденные метрики (7, 8), получаем $\sin^2\frac{\vartheta}{2} - A_\varphi^N = 0$ в «северной» карте и $\cos^2\frac{\vartheta}{2} + A_\varphi^S = 0$ – в «южной». Нетрудно видеть, что коэффициентам связности соответствуют потенциалы монополя Ву – Янга на сфере единичного радиуса с магнитным зарядом $g = \frac{1}{2}$:

$$\underline{A}^N = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}\underline{\hat{\varphi}}, \quad \underline{A}^S = -\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\vartheta}{2}\underline{\hat{\varphi}}. \tag{9}$$

Магнитное поле потенциала монополя Ву – Янга на единичной сфере S^2 глобально и постоянно по модулю $H = \left|[\nabla \underline{A}^{N,S}]\right| = \frac{1}{2}$. С геометрической точки зрения оно определяет кривизну расслоения Хопфа, определяемую внешним дифференциалом формы связности

$$d\omega = \begin{matrix} ([\nabla \underline{A}^N] d\underline{S}) \\ ([\nabla \underline{A}^S] d\underline{S}) \end{matrix} = \frac{1}{2}\sin\vartheta d\vartheta d\varphi. \tag{10}$$

В ряде работ (см., напр., [11]) множитель $\frac{1}{2}$ убирается путем «нормировки» на единичный магнитный заряд. На самом деле для этого надо перейти от расслоения Хопфа к линзовому расслоению $S^3 / Z_{m=2g} \to S^2$ по циклической подгруппе структурной группы $U(1) - Z_m = \left\{\exp\left(\underline{n}_3 2\pi \frac{k}{m}\right)\right\}$, где $k, m \in \mathbf{Z}$.

Часто вместо R^4 единичную сферу S^3 задают в двумерном комплексном пространстве с координатами z_1 и z_2 – $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$, а инвариантную относительно действия структурной группы $U(1)$ – $(z_1, z_2) \to (z_1 e^{i\alpha}, z_2 e^{i\alpha})$ проекцию на плоскость Аргана – Бесселя – Гаусса – $CP^1 \sim C \cup \infty$ определяют с помощью отношения

$$\zeta = \frac{\hat{x} + i\hat{y}}{1 - \hat{z}} = e^{i\varphi}\operatorname{ctg}\frac{\vartheta}{2} = \frac{\cos\frac{\vartheta}{2} e^{-i\tau}}{\sin\frac{\vartheta}{2} e^{-i(\varphi+\tau)}} = \frac{u_0 + iu_3}{u_2 + iu_1} \equiv \frac{z_1}{z_2}. \tag{11}$$

При этом 2-форма (10), которая, как правило, записывается в виде

$$d\omega = i\frac{d\zeta \wedge d\zeta^*}{(1 + |\zeta|^2)^2} = i\frac{(z_2 dz_1 - z_1 dz_2) \wedge (z_2 dz_1 - z_1 dz_2)^*}{(|z_1|^2 + |z_2|^2)^2} = i(z_2 dz_1 - z_1 dz_2) \wedge (z_2 dz_1 - z_1 dz_2)^*, \tag{12}$$

инвариантна относительно конформной инверсии $\zeta \to \zeta^{-1}$, что обеспечивает ее глобальность в отсутствие глобальной связности. Хотя при добавлении бесконечной точки замена координат (11) выглядит корректной на всей S^2, это не означает наличия единой формулы, устанавливающей связь между z_1, z_2 и $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$, либо ϑ, φ во всей области задания последних. В кватернионном подходе удобно заменить в (11) $i \to \underline{n}_3$, поскольку $u = (u_0 + \underline{n}_3 u_3) + \underline{n}_2(u_2 + \underline{n}_3 u_1)$. Такая замена восстанавливает ковариантность описания, поскольку кватернион $\underline{n}_3$, вообще говоря, произволен и имеет четкий геометрический смысл в пространствах R^3 и R^4, где задаются сферы S^2 и S^3. Подстановка в (12) $\zeta = \frac{u_0 + \underline{n}_3 u_3}{u_2 + \underline{n}_3 u_1}$ с учетом $(\bar{u}du)_0 = 0$ дает

$$d\omega = 2(du_3 \wedge du_0 + du_1 \wedge du_2), \tag{13}$$

что, естественно, совпадает с дифференциалом формы связности в кватернионах [6]

$$\omega = (\underline{n}_3 \bar{u} du)_0 = u_3 du_0 - u_0 du_3 + u_1 du_2 - u_2 du_1. \tag{14}$$

При подстановке в (14) явных выражений u_N и u_S имеем

$$\omega = (n_3 \bar{u} du)_0 = \begin{matrix} \sin^2\frac{\vartheta}{2} d\varphi + d\tau = (\underline{A}^N d\hat{\underline{r}}) + d\tau & M_N \\ -\cos^2\frac{\vartheta}{2} d\varphi + d\tau = (\underline{A}^S d\hat{\underline{r}}) + d\tau & M_S \end{matrix}. \tag{15}$$

Если теперь с помощью (11) выразить (13) и (14) через комплексные координаты, то получаются весьма простые формулы

$$d\omega = i(dz_1^* \wedge dz_1 + dz_2^* \wedge dz_2), \tag{16}$$

$$\omega = \mathrm{Im}(z_1 dz_1^* + z_2 dz_2^*). \tag{17}$$

Выражение (16) для 2-формы кривизны, вернее ее поднятия (pullback) в пространство расслоения S^3, можно было получить и непосредственно из (12) с учетом $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$. Определенная на S^3 1-форма (17) легко приводится к виду (15), с потенциалом монополя в координатах базы CP^1 – $\zeta = |\zeta| \exp(i\,\mathrm{Arg}\,\zeta) = |\zeta| \exp[i\,\mathrm{Arg}(z_1 - z_2)]$. Действительно,

$$\omega = \mathrm{Im}(z_1 dz_1^* + z_2 dz_2^*) = -|z_1|^2 d\,\mathrm{Arg}\,z_1 - |z_2|^2 d\,\mathrm{Arg}\,z_2 =$$

$$= |z_2|^2 d(\mathrm{Arg}\,z_1 - \mathrm{Arg}\,z_2) - d\,\mathrm{Arg}\,z_1 = (1 + |\zeta|^2)^{-1} d\,\mathrm{Arg}\,\zeta - d\,\mathrm{Arg}\,z_1 .$$

Последний член представляет собой точную 1-форму и поэтому может быть опущен, поскольку не сказывается на кривизне

$$d\omega = i\frac{d\zeta \wedge d\zeta^*}{(1+|\zeta|^2)^2} = d(1+|\zeta|^2)^{-1} \wedge d\,\mathrm{Arg}\,\zeta = d\left\{(1+|\zeta|^2)^{-1} d\,\mathrm{Arg}\,\zeta\right\}. \tag{18}$$

Именно с помощью этого выражения были построены первые статические решения уравнений Максвелла, реализующие зацепляющиеся фарадеевские силовые линии электрического и магнитного полей, ортогональных в каждой точке пространства $R^3 \cup \infty$ и равных по величине [8]. При этом использовалось выражение ζ через проективные координаты, возникающие при отображении сферы S^3 на пространство $R^3 \cup \infty$ – $\underline{R} = \dfrac{\underline{u}}{1 - u_0}$. Обратное преобразование $u = \dfrac{R^2 - 1 + 2\underline{R}}{R^2 + 1}$ дает координаты базы

$$\zeta = \frac{z_1}{z_2} = \frac{R^2 - 1 + 2\underline{n}_3 Z}{2(Y + \underline{n}_3 X)} = \frac{[Y(R^2-1) + 2XZ] - \underline{n}_3[X(R^2-1) - 2YZ]}{2(X^2+Y^2)}, \tag{19}$$

поднятую в расслоение 1-форму связности

$$\omega = (\underline{n}_3 \overline{u} du)_0 = 4(R^2+1)^{-2}\left(\left\{(\underline{n}_3\underline{R})\underline{R} - \frac{1}{2}(R^2-1)\underline{n}_3 + [\underline{n}_3\underline{R}]\right\} d\underline{R}\right), \tag{20}$$

и метрику, отличающуюся от евклидовой лишь стандартным конформным множителем

$$du(\underline{R})d\overline{u}(\underline{R}) = 4(R^2+1)^{-2}(d\underline{R}d\underline{R}).$$

Связность (20) с точностью до существенного коэффициента $4(R^2+1)^{-2}$ и замены $\underline{n}_3 \leftrightarrow \underline{n}_1$ совпадает с результатом работы [3]. Кроме того, в ковариантном подходе становится очевидным разбиение (20) на несущественную точную 1-форму и собственно связность

$$\omega = (\underline{n}_3 \overline{u} du)_0 = 4(R^2+1)^{-2}\left(\left\{\left[(\underline{n}_3\underline{R})\underline{R} - \frac{1}{2}(R^2+1)\underline{n}_3\right] + \{\underline{n}_3 + [\underline{n}_3\underline{R}]\}\right\} d\underline{R}\right) \equiv \tilde{\omega} + \omega',$$

где $d\tilde{\omega} = 0$, а

$$d\left[\omega' = 4(R^2+1)^{-2}\left(\{\underline{n}_3 + [\underline{n}_3\underline{R}]\} d\underline{R}\right) \equiv \left(\underline{A}^{W-Y}(\underline{n}_3, \underline{R}) d\underline{R}\right)\right] = d\omega =$$
$$= \frac{16}{(R^2+1)^3}\left[\frac{1}{2}(Z^2 - X^2 - Y^2 + 1)dX \wedge dY + 2(XZ - Y)dY \wedge dZ + 2(YZ + X)dZ \wedge dX\right]. \tag{21}$$

Потенциал типа $\underline{A}^{W-Y}(\underline{n}_3, \underline{R})$ впервые использовался в [8] без какого-либо упоминания о его связи с монопольной связностью.

Из (19) следует, что проекция на базу не определена при $X = Y = 0$, т. е. на всей оси OZ в $R^3\cup\infty$, являющейся образом слоя над точкой сферы S^2 с координатами $1-\hat{z} = 1-(\underline{n}_3\hat{\underline{r}}) = 0$. Для того чтобы полностью определить проекцию, следует накрыть S^2 двумя картами, в одной из которых ζ^S задается формулой (11), в другой – $\zeta^N = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overset{*}{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{\hat{x}+i\hat{y}}{1+\hat{z}} = e^{i\varphi}\,\mathrm{tg}\frac{\vartheta}{2}$.

Покажем теперь, что замена четырех параметров Кэли – Клейна u, ограниченных условием $u\overline{u} = 1$, на три проективные координаты $\underline{R}$ легко может быть связана с векторной параметризацией Ф. И. Федорова

$$u = \frac{R^2 - 1 + 2\underline{R}}{R^2+1} = \frac{1+\dfrac{2\underline{R}}{R^2-1}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{2\underline{R}}{R^2-1}\right)^2}} \equiv \frac{1+\underline{c}}{\sqrt{1+\underline{c}\overline{\underline{c}}}}, \tag{22}$$

где $\underline{c} = 2\underline{R}(R^2-1)^{-1}$ – векторный кватернион-параметр. Обратное преобразование, как и следовало ожидать, двузначно:

$$\underline{R}_{\pm} = c^{-2}(1 \pm \sqrt{1+c^2})\underline{c},$$

поскольку группа $SU(2) \sim S^3$, параметризуемая векторным кватернионом $\underline{R}$, является двулистной накрывающей группы $SO(3)$ с вектор-параметром $\underline{c}$.

Удивительно, но связь между проективными координатами на S^3 и вектор-параметрами до сих пор оставалась не отмеченной в публикациях, трактующих расслоение Хопфа $S^3 \to S^2$, и каким-то образом прошла мимо внимания самого Ф. И. Федорова (см. § 5 его фундаментальной монографии, где активно используются проективные координаты, но только для S^2 [10]).

В векторной параметризации с учетом $\overline{u}(\underline{c})du(\underline{c}) = \frac{1-\underline{c}}{\sqrt{1+c^2}}\, d\left(\frac{1+\underline{c}}{\sqrt{1+c^2}}\right) = \frac{d\underline{c}-[\underline{c}d\underline{c}]}{1+c^2}$ 1-форма (20) записывается в ковариантном виде

$$\omega = \left(\frac{[\underline{n}_3\underline{c}] - \underline{n}_3}{1+c^2} d\underline{c}\right), \tag{23}$$

а метрика сферы S^3 задается выражением

$$du(\underline{c})d\overline{u}(\underline{c}) = 4(1+c^2)^{-2}\left[(1+c^2)(d\underline{c}d\underline{c}) - (\underline{c}d\underline{c})^2\right].$$

Подстановка в (23) вектор-параметров $\underline{c}_{N,S}$ показывает, что связность не задается на базе одной формулой. Для полноты рассмотрения напомним общий вид вектор-параметра преобразования (2), отвечающего повороту от $\underline{n}_3$ к $\hat{\underline{r}}$:

$$\underline{c} = \xi(\underline{n}_3 + \hat{\underline{r}}) + 2[\underline{n}_3\hat{\underline{r}}](\underline{n}_3 + \hat{\underline{r}})^{-2} = \xi(\underline{n}_3 + \hat{\underline{r}}) + [\underline{n}_3\hat{\underline{r}}][1+(\underline{n}_3\hat{\underline{r}})]^{-1},$$

где ξ — произвольная вещественная функция $(\underline{n}_3\hat{\underline{r}})$, а не вещественное число, как утверждается в [10]. Очевидно, что последнее выражение не определено при $\hat{\underline{r}} = -\underline{n}_3$. Поэтому, не добавляя новые сингулярности, можем выбрать параметризацию ξ в виде $\xi = \left[1+(\underline{n}_3\hat{\underline{r}})\right]^{-1}\mathrm{tg}\,\tau$, что возвращает к формуле (5а).

Заключение. Возможность описывать расслоение Хопфа в терминах вектор-параметров открывает перспективы для исследования групповой структуры и факторизации нестационарных зацепляющихся и заузленных решений уравнений Максвелла [9] в $R^3\cup\infty\times R^1$, где добавочный

R^1-фактор соответствует оси времени. При этом зависящие от времени горизонтальные поля должны генерировать на базе потенциалы, которые соответствуют полю, порождаемому на сфере S^2 вращающимся монополем, расположенным в ее центре.

Литература

1. *Urbantke H. K.* // J. of Geom. and Phys. 2003. Vol. 46. P. 125–150.
2. *Hopf H.* // Math. Ann. 1931. Vol. 104. P. 637–665.
3. *Кузьмина И. А., Шапуков Б. Н.* // Тр. геометр. семинара. Казан. ун-т. 2003. Вып. 24. С. 81–98.
4. *Lyons D. W.* // arxiv: math-ph. 2008. 0808.3089v2. P. 1–6.
5. *Березин А. В., Курочкин Ю. А., Толкачев Е. А.* Кватернионы в релятивистской физике. Минск, 1989.
6. *Прись И. Е., Сиваков И. В., Толкач в Е. А.* // Докл. АН Беларуси. 1993. Т. 37, № 2. С. 135–139.
7. *Прись И. Е., Толкачев Е. А.* // Докл. АН Беларуси. 1993. Т. 37, № 3. С. 30–34.
8. *Ranada A. F.* // Lett. Math. Phys. 1989. Vol. 18. P. 97–106; *Ranada A. F., Trueba I. J. L.* // Phys. Lett. 1995. Vol. A202. P. 337–342.
9. *Kedia H., Bialynicki-Birula I., Peralta-Salas D., Irvine W. T. M.* // Phys. Rev. Lett. 2013. Vol. 111. P. 150404.
10. *Федоров Ф. И.* Группа Лоренца. М., 1979.
11. *Kholodenko A. L.* // arxiv: math-ph. 2014. 1402.1793v2 P. 1–35.

E. A. TOLKACHEV

HOPF BUNDLE $S^3 \to S^2$: PROJECTIVE COORDINATES AND F. I. FEDOROV'S VECTOR-PARAMETERS

Summary

Within the framework of the covariant description of the Hopf bundle $S^3 \to S^2$ in quaternions the connection between corresponding projective coordinates and vector-parameters was established, which gives a covariant representation of the potentials of linked electromagnetic fields and elaborates the theory of vector parameterization of the $SU(2)$ group.