МАТЭМАТЫКА

УДК 517.956.32

В. И. КОРЗЮК[1, 2], *А. А. МАНДРИК*[2]

ПЕРВАЯ СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА В ПОЛУПОЛОСЕ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО НЕСТРОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

[1]*Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь,*
korzyuk@bsu.by
[2]*Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь,*
mndkaa@gmail.com

Изучается классическое решение граничной задачи для неоднородного нестрого гиперболического уравнения третьего порядка. Уравнение задается в полуполосе двух независимых переменных. На нижнем основании области задаются условия Коши, а на боковых границах – условия Дирихле. Методом характеристик выписывается в аналитическом виде решение рассматриваемой задачи. Доказывается единственность решения.

Ключевые слова: нестрого гиперболическое уравнение, неоднородное уравнение, смешанная задача, условия согласования.

V. I. KORZYUK[1, 2], *A. A. MANDRYK*[2]

FIRST MIXED PROBLEM IN THE HALF-BAND FOR THE THIRD-ORDER NONHOMOGENEOUS NONSTRICTLY HYPERBOLIC EQUATION

[1]*Belarusian State University, Minsk, Belarus,*
korzyuk@bsu.by
[2]*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus,*
mndkaa@gmail.com

This article is concerned with studying the classical solution of the boudary problem for the third-order nonhomogeneous nonstrictly hyperbolic equation. The equation is defined in the half-band of two independent variables. There are Cauchy's conditions at the bottom of the domain and Dirichlet's conditions at side boundaries. Using the method of characteristics, the analytic solution of the considered problem is written. The uniqueness of the solution is proved.

Keywords: nonstrictly hyperbolic equation, nonhomogeneous equation, mixed problem, matching conditions.

Введение. Изучение таких задач продиктовано не только развитием теории дифференциальных уравнений с частными производными. Они возникают при описании конкретных физических явлений. Например, гиперболические уравнения третьего порядка появляются при математическом моделировании распространения линейных акустических волн в среде с дисперсией [1, с. 87]. Свойства этих уравнений и задач изучались в [2, 3].

Бóльшая часть литературы по гиперболическим уравнениям посвящена задаче Коши. В работах [4–6] рассматривались обобщенные решения для смешанных задач гиперболических уравнений третьего порядка, где доказаны теоремы существования и единственности таких решений в подходящих функциональных пространствах. Отметим также работы [7–9], где функциональными методами изучались граничные задачи на плоскости в случае двух независимых переменных.

Исследование или отыскание классических решений задач всегда было актуальным для теории дифференциальных уравнений с частными производными. Это важно и для численных методов решения граничных задач, так как они во многих случаях основаны на классических решениях. Заметим, что классические решения определяются не только правильным выбором вида граничных условий для дифференциальных уравнений с частными производными, но и условиями согласования для функций, входящих в условия и уравнения. Классическому решению посвящена работа [10], в которой рассмотрена первая смешанная задача для простейшего гиперболического уравнения третьего порядка с разными характеристиками. В настоящей работе исследуется первая смешанная задача в классе бесконечно дифференцируемых функций.

Постановка задачи. В области $Q=(0,+\infty)\times(0,l)$ двух независимых переменных $(t,x)\in Q\subset R^2$ рассмотрим нестрого гиперболическое уравнение третьего порядка

$$\left(\partial_t - a\partial_x + b_1\right)\left(\partial_t + a\partial_x + b\right)^2 u(t,x) = f(t,x), (t,x)\in\overline{Q}=[0,+\infty)\times[0,l], \tag{1}$$

где a, b, b_1, l – действительные числа; $\overline{Q}$ – замыкание области Q; ∂_t, ∂_x – частные производные по t и x соответственно. В общем случае $\partial_t^k\partial_x^p = \dfrac{\partial^{k+p}}{\partial_t^k\partial_x^p}$ – частные производные по t и x порядка $k+p$, где k и p – целые неотрицательные числа. Для определенности положим $a>0$. К уравнению (1) на нижнем основании области Q присоединяются условия Коши

$$\partial_t^i u(0,x) = \varphi_i(x),\ i=\overline{0,2},\ x\in[0,l], \tag{2}$$

а на боковых частях границы ∂Q задаются граничные условия вида

$$\begin{aligned}&\partial_x^i u(t,0)=\psi_i(t),\ i\in\overline{0,1},\ t\in[0,+\infty),\\ &u(t,l)=\mu(t),\ t\in[0,+\infty).\end{aligned} \tag{3}$$

Однородное уравнение. Начнем исследование задачи (1)–(3) в случае, когда уравнение (1) является однородным:

$$\left(\partial_t - a\partial_x + b_1\right)\left(\partial_t + a\partial_x + b\right)^2 u(t,x) = 0, (t,x)\in\overline{Q}=[0,+\infty)\times[0,l]. \tag{4}$$

Согласно работе [11], общее решение уравнения (4) представимо в виде линейной комбинации трех произвольных функций

$$u(t,x) = e^{-b_1 t} f_1(x+at) + e^{-bt}[f_2(x-at)t + f_3(x-at)], \tag{5}$$

с соответствующими областями определения $D(f_i)$, $i=\overline{1,3}$. Нетрудно видеть, что $D(f_1)=[0,+\infty)$ и $D(f_i)=(-\infty,l]$, $i=\overline{2,3}$, если $(t,x)\in\overline{Q}$. Обозначим через $C^\infty(\overline{Q})$ множество бесконечно дифференцируемых функций, заданных на $\overline{Q}$, а через $C^{i,j}(\overline{Q})$ множество функций, заданных на $\overline{Q}$, которые i раз непрерывно дифференцируемы по первому аргументу и j раз – по второму.

Полученный результат подытожим в виде леммы.

Л е м м а 1. *Общее решение уравнения* (4) *из класса* $C^\infty(\overline{Q})$ *представимо в виде* (5), *где функции* f_i *– произвольные бесконечно дифференцируемые на* $D(f_i)$, $i=\overline{1,3}$, *функции.*

Таким образом, чтобы отыскать решение $u:\mathbb{R}^2\supset\overline{Q}\ni(t,x)\to u(t,x)\in\mathbb{R}$ задачи (2)–(4), необходимо выбрать функции f_i, $i=\overline{1,3}$, такими, чтобы они в сумме вида (5) удовлетворяли еще и условиям (2), (3).

Введем для значений функций и их производных в случае одной независимой переменной следующие обозначения. Пусть $g:R\to g(z)$ – функция переменной z. Тогда $\mathrm{d}^k g(z) = \dfrac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}z^k}g(z)$ – производная k-го порядка; $g(a)$, $\mathrm{d}^k g(a)$ – значения функции g и ее производной $\mathrm{d}^k g$ k-го порядка в точке a и т. д.

Сформулируем теорему, дающую необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости задачи (2)–(4).

Т е о р е м а 1. *Если выполняются следующие условия гладкости на заданные функции:* $\varphi_i \in C^\infty([0,l])$, $i=\overline{0,2}$, $\psi_j \in C^\infty([0,+\infty))$, $j=\overline{0,1}$, $\mu \in C^\infty([0,+\infty))$, *то задача* (2)–(4) *однозначно разрешима в классе* $C^\infty(\overline{Q})$, *тогда и только тогда, когда выполняются следующие равенства:*

$$\frac{d^k}{dy^k}\left(e^{\frac{(b-b_1)(l-y)}{a}}\left[(l-y)d\varphi_0(2l-y)+\frac{b(l-y)-a}{a}\varphi_0(2l-y)+\frac{l-y}{a}\varphi_1(2l-y)\right]+\right.$$

$$\left.\left.+e^{\frac{b_1(y-l)}{a}}\mu\left(\frac{y-l}{a}\right)+\frac{1}{4a^2}\int_0^{2l-y}\Phi(z)e^{\frac{b_1-b}{2a}(y-z)}(y-z)dz\right)\right|_{y=l}=$$

$$=\frac{d^k}{dy^k}\left.\left(\frac{1}{4a^2}\int_0^{y}\Phi(z)e^{\frac{b_1-b}{2a}(y-z)}(y-z)dz\right)\right|_{y=l},\quad k=\overline{0,\infty},\tag{6}$$

$$\frac{d^k}{dy^k}\left.\left(e^{-\frac{by}{a}}\left[d\psi_0\left(-\frac{y}{a}\right)+b\psi_0\left(-\frac{y}{a}\right)+a\psi_1\left(-\frac{y}{a}\right)\right]-\frac{1}{2a}\int_0^{-y}\Phi(z)e^{\frac{b_1-b}{2a}(y-z)}dz\right)\right|_{y=0}=$$

$$=\frac{d^k}{dy^k}\left.\left(\varphi_1(y)+b\varphi_0(y)+ad\varphi_0(y)-\frac{1}{2a}\int_0^{y}\Phi(z)e^{\frac{b_1-b}{2a}(y-z)}dz\right)\right|_{y=0},\quad k=\overline{0,\infty},\tag{7}$$

$$\frac{d^k}{dy^k}\left.\left(e^{-\frac{by}{a}}\left[\frac{y}{a}d\psi_0\left(-\frac{y}{a}\right)+\frac{by+a}{a}\psi_0\left(-\frac{y}{a}\right)+y\psi_1\left(-\frac{y}{a}\right)\right]-\frac{1}{4a^2}\int_0^{-y}\Phi(z)e^{\frac{b_1-b}{2a}(y-z)}(y-z)dz\right)\right|_{y=0}=$$

$$=\frac{d^k}{dy^k}\left.\left(\varphi_0(y)-\frac{1}{4a^2}\int_0^{y}\Phi(z)e^{\frac{b_1-b}{2a}(y-z)}(y-z)dz\right)\right|_{y=0},\quad k=\overline{0,\infty},\tag{8}$$

где $\Phi(y)=\varphi_2(y)+2b\varphi_1(y)+2ad\varphi_1(y)+b^2\varphi_0(y)+2abd\varphi_0(y)+a^2d^2\varphi_0(y),\ y\in[0,l]$.

Неоднородное уравнение. Рассмотрим теперь следующую задачу с однородными начальными условиями для уравнения (1):

$$\left(\partial_t-a\partial_x+b_1\right)\left(\partial_t+a\partial_x+b\right)^2 v(t,x)=f(t,x),(t,x)\in\overline{Q},\tag{9}$$

$$\partial_t^i v(0,x)=0,\ i=\overline{0,2},\ x\in[0,l].\tag{10}$$

Л е м м а 2. *Если* $f\in C^\infty(\overline{Q})$ *и существуют некоторые окрестности точек* $x_1=0$ *и* $x_2=l$, *в которых при любом* $t\in[0,+\infty)$ *функции* $\partial_t^k f(t,x)$, $k=\overline{0,\infty}$, *представимы в виде абсолютно сходящихся рядов по степеням* $(x-x_i)$, $i=\overline{1,2}$, *то существует функция* $v(t,x)$ *из класса* $C^\infty(\overline{Q})$, *являющаяся решением задачи* (9)–(10).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим граничную задачу для функции $w(t,x,\tau)$:

$$\left(\partial_t-a\partial_x+b_1\right)\left(\partial_t+a\partial_x+b\right)^2 w(t,x,\tau)=0,\ (t,x)\in\overline{Q},\ \tau\in[0,+\infty),\tag{11}$$

$$\partial_t^i w(0,x,\tau)=0,\ i=0,1,\ \partial_t^2 w(0,x,\tau)=f(\tau,x),\ x\in[0,l],\ \tau\in[0,+\infty).\tag{12}$$

По условию леммы функция $f(t,x)$ определена в области $\overline{Q}=[0,+\infty)\times[0,l]$. Построим ее продолжение в классе $C^\infty([0,+\infty)\times R)$. Вначале продолжим f в область $[0,+\infty)\times[l,+\infty)$. По условию леммы существует некоторая окрестность $[l-\varepsilon_l, l]$ точки $x=l$, такая, что для любого $t \in [0,+\infty)$, f представима в виде абсолютно сходящегося ряда

$$f(t,x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\partial_x^k f(t,l)}{k!}(x-l)^k,\ t\in[0,+\infty),\ x\in[l-\varepsilon_l,l],\ \varepsilon_l\in(0,l),$$

причем производные этого ряда любого порядка по t также сходятся абсолютно.

Поскольку этот ряд сходится абсолютно для всех $(t,x)\in Q_l^- =[0,+\infty)\times[l-\varepsilon_l,l]$, то легко заметить, что он также сходится абсолютно и для $(t,x)\in Q_l^+ =[0,+\infty)\times[l,l+\varepsilon_l]$. Таким образом, в Q_l^+ зададим функцию $\widetilde{f}$, определяющуюся по формуле

$$\widetilde{f}(t,x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\partial_x^k f(t,l)}{k!}(x-l)^k,\ (t,x)\in Q_l^+.$$

Заданная таким способом функция является непрерывным продолжением f в Q_l^+, причем $\widetilde{f}\in C^\infty(Q_l^+)$, а производные этих функций любого порядка на границе $x=l$ совпадают. Далее рассмотрим функцию

$$g_l(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{(x-l)(x-(l+\varepsilon_l))}},\ x\in(l,l+\varepsilon_l),\\ 0,\ x\in(-\infty,l]\bigcup[l+\varepsilon_l,+\infty).\end{cases} \tag{13}$$

Несложно видеть, что $g_l\in C^\infty(R)$. Воспользуемся ею для построения еще одной функции

$$\delta_l(x)=1-\frac{1}{A_l}\int_l^x g_l(\xi)d\xi,\ A_l=\int_l^{l+\varepsilon_l}g_l(\xi)d\xi>0,\ x\in R. \tag{14}$$

Функция $\delta_l(x)$ – бесконечно дифференцируема на всей числовой прямой, также $\delta_l(x)\equiv 1$, $x\in(-\infty,l]$ и $\delta_l(x)\equiv 0$, $x\in[l+\varepsilon_l,+\infty)$. Далее на основе $\widetilde{f}$ и δ_l построим продолжение функции f в область $[0,+\infty)\times[l,+\infty)$:

$$f_l(t,x)=\begin{cases} \widetilde{f}(t,x)\delta_l(x),\ (t,x)\in Q_l^+,\\ 0,\ t\in[0,+\infty),\ x\in(l+\varepsilon_l,+\infty).\end{cases} \tag{15}$$

Легко заметить, что $f_l\in C^\infty([0,+\infty)\times[l,+\infty))$. Действительно, она бесконечно дифференцируема в Q_l^+, как произведение двух бесконечно дифференцируемых функций, и в $[0,+\infty)\times(l+\varepsilon_l,+\infty)$, поскольку тождественно равна нулю в этой области. Покажем теперь, что левые и правые производные всех порядков на границе $x=l+\varepsilon_l$ совпадают. Очевидно, что все правые производные равны нулю, покажем, что левые также обращаются в нуль

$$\partial_x^k f_l(t,x)|_{x=(l+\varepsilon_l)-0}=\partial_x^k\left(\widetilde{f}(t,x)\delta_l(x)\right)|_{x=(l+\varepsilon_l)-0}=\sum_{i=0}^{k}C_k^i\partial_x^i\widetilde{f}(t,x)\frac{\mathrm{d}^{k-i}\delta_l(x)}{\mathrm{d}x^{k-i}}|_{x=(l+\varepsilon_l)-0},\ k=\overline{0,\infty}.$$

Однако для любого $k=\overline{0,\infty}$, имеют место равенства

$$\left.\frac{\mathrm{d}^k\delta_l(x)}{\mathrm{d}x^k}\right|_{x=l+\varepsilon_l}=0,$$

в этом легко убедиться, непосредственно вычислив производные функции δ_l по формулам (13)–(14). Таким образом, $f_l\in C^\infty([0,+\infty)\times[l,+\infty))$, покажем теперь, что f и f_l совпадают вместе со всеми своими производными вдоль прямой $x=l$

$$\left.\partial_x^k f_l(t,x)\right|_{x=l}=\sum_{i=0}^{k}C_k^i\partial_x^i\widetilde{f}(t,x)\left.\frac{\mathrm{d}^{k-i}\delta_l(x)}{\mathrm{d}x^{k-i}}\right|_{x=l},\ k=\overline{0,\infty}.$$

Однако имеют место равенства

$$\delta_l(l)=1,\ \left.\frac{\mathrm{d}^k\delta_l(x)}{\mathrm{d}x^k}\right|_{x=l}=0,\ k=\overline{1,\infty},$$

из которых получим

$$\partial_x^k f_l(t,x)|_{x=l}=\partial_x^k\widetilde{f}(t,x)|_{x=l}=\partial_x^k f(t,l),\ k=\overline{0,\infty}.$$

Таким образом, доказано, что f и f_l совпадают вместе со всеми своими производными вдоль прямой $x=l$. Аналогичным образом строится продолжение f относительно прямой $x=0$. По условию леммы существует такая окрестность $[0,\varepsilon_0]$, на которой функция представима в виде аболютно сходящегося ряда. Построение функции f_0, являющейся продолжением f в область $[0,+\infty)\times(-\infty,0]$, проводится аналогично с использованием вместо g_l и δ_l новых функций

$$g_0(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x(x+\varepsilon_0)}},\ x\in(-\varepsilon_0,0),\\ 0,\ x\in(-\infty,-\varepsilon_0]\bigcup[0,+\infty),\end{cases}$$

$$\delta_0(x)=\frac{1}{A_0}\int_{-\varepsilon_0}^{x}g_0(\xi)d\xi,\ A_0=\int_{-\varepsilon_0}^{0}g_0(\xi)d\xi>0,\ x\in R.$$

Следовательно, мы получим продолжение f, определяющееся формулой

$$F(t,x)=\begin{cases} f_0(t,x),\ t\in[0,+\infty),\ x\in(-\infty,0),\\ f(t,x),\ t\in[0,+\infty),\ x[0,l],\\ f_l(t,x),\ t\in[0,+\infty),\ x(l,+\infty),\end{cases} \tag{16}$$

причем $F\in C^\infty([0,+\infty)\times R)$.

Общее решение уравнения (11) имеет вид

$$w(t,x,\tau)=e^{-b_1t}W_1(x+at,\tau)+e^{-bt}[W_2(x-at,\tau)t+W_3(x-at,\tau)].$$

Определим функции W_i, $i=\overline{1,3}$, следующим образом:

$$W_1(y,\tau)=\frac{1}{4a^2}\int_0^y F(\tau,z)e^{\frac{b_1-b}{2a}(y-z)}(y-z)dz,\ y\in[0,+\infty),\ \tau\in[0,+\infty),$$

$$W_2(y,\tau)=-\frac{1}{2a}\int_0^y F(\tau,z)e^{\frac{b_1-b}{2a}(y-z)}dz,\ y\in(-\infty,l],\ \tau\in[0,+\infty), \tag{17}$$

$$W_3(y,\tau)=-\frac{1}{4a^2}\int_0^y F(\tau,z)e^{\frac{b_1-b}{2a}(y-z)}(y-z)dz,\ y\in(-\infty,l],\ \tau\in[0,+\infty).$$

Таким образом, функция $w(t,x,\tau)$ в области $\widetilde{Q}=\overline{Q}\times[0,+\infty)$ будет определяться формулой

$$w(t,x,\tau)=\frac{1}{4a^2}e^{\frac{-b_1-b}{2}t}\int_{x-at}^{x+at}F(\tau,z)e^{\frac{b_1-b}{2a}(x-z)}(x+at-z)dz.$$

Легко проверить непосредственной подстановкой, что определенные таким способом функции W_i, $i=\overline{1,3}$, обеспечивают выполнение начальных условий (12). Заметим также, что

$$W_1(y,\tau)\in C^\infty([0,+\infty)\times[0,+\infty)),$$
$$W_j(y,\tau)\in C^\infty((-\infty,l]\times[0,+\infty)),\ j=\overline{2,3},$$

отсюда следует, что

$$w(t,x,\tau)\in C^\infty(\widetilde{Q}).$$

В результате получено решение задачи Коши в классе $C^{\infty}(\widetilde{Q})$.

Определим функцию $v(t,x)$ по формуле

$$v(t,x)=\int_0^t w(t-\tau,x,\tau)d\tau,\ (t,x)\in\overline{Q}. \tag{18}$$

Функция v, определенная таким образом, принадлежит классу $C^{\infty}(\overline{Q})$ и удовлетворяет начальным условиям (10). Действительно,

$$v(0,x)=0,\ \partial_t v(0,x)=w(0,x,t)+\int_0^t \partial_{t-\tau}w(t-\tau,x,\tau)d\tau\,|_{t=0}=0,$$

$$\partial_t^2 v(0,x)=\partial_\tau w(0,x,t)+\partial_t w(0,x,t)+\int_0^t \partial_{t-\tau}^2 w(t-\tau,x,\tau)d\tau\,|_{t=0}=0.$$

Также v является решением уравнения (9), в чем легко убедиться непосредственной подстановкой. Лемма 2 доказана.

Пусть функция $v(t,x)\in C^{\infty}(\overline{Q})$ – решение задачи (9)–(10). Тогда вместе с граничной задачей (1)–(3) рассмотрим также задачу

$$\left(\partial_t - a\partial_x + b_1\right)\left(\partial_t + a\partial_x + b\right)^2 \overline{u}(t,x)=0,(t,x)\in Q, \tag{19}$$

$$\partial_t^i \overline{u}(0,x)=\varphi_i(x),\ i=\overline{0,2},\ x\in[0,l], \tag{20}$$

$$\begin{gathered}\partial_x^i \overline{u}(t,0)=\widetilde{\psi_i}(t)=\psi_i(t)-\partial_x^i v(t,0),\ i=\overline{0,1},\ t\in[0,+\infty),\\ \overline{u}(t,l)=\widetilde{\mu}(t)=\mu(t)-v(t,l),\ t\in[0,+\infty).\end{gathered} \tag{21}$$

Лемма 3. *Задача* (1)–(3) *однозначно разрешима тогда и только тогда, когда однозначно разрешима задача* (19)–(21).

Доказательство. Предположим, задача (1)–(3) имеет единственное решени u. Тогда, взяв в качестве $\overline{u}=u-v$, получим решение задачи (19)–(21). Допустим, что для уравнения (19)–(21) существует другое решение $\overline{u}_1$, отличное от $\overline{u}$. В этом случае функция $u_1=\overline{u}_1+v$ будет отличаться от функции u и также будет решением задачи (1)–(3). Получаем противоречие, таким образом, задача (19)–(21) однозначно разрешима.

Теперь докажем достаточность. Пусть задача (19)–(21) однозначно разрешима и функция $\overline{u}$ – ее решение. Тогда, очевидно, функция $u=\overline{u}+v$ будет решением задачи (1)–(3). Допустим, что функция u_1, отличная от u, также является решением этой задачи. Тогда $\overline{u}_1=u_1-v$, отлична от $\overline{u}$, также является решением задачи (19)–(21). Получено противоречие. Лемма 3 доказана.

Для разрешимости задачи (1)–(3) должны выполняться соответствующие условия согласования на заданную функцию f уравнения (1), функции φ_i, $i=\overline{0,2}$, условий (2) и на функции μ, ψ_i, $i=\overline{0,1}$, условий (3). В данном случае эти условия выписываются в явном виде следующим образом:

$$\frac{d^i}{dy^i}\left(e^{\frac{(b-b_1)(l-y)}{a}}\left[(l-y)d\varphi_0(2l-y)+\frac{b(l-y)-a}{a}\varphi_0(2l-y)+\frac{l-y}{a}\varphi_1(2l-y)\right]+\right.$$

$$\left.+e^{\frac{b_1(y-l)}{a}}\left[\mu\left(\frac{y-l}{a}\right)-F\left(\frac{y-l}{a},l\right)\right]+\frac{1}{4a^2}\int_0^{2l-y}\Phi(z)e^{\frac{b_1-b}{2a}(y-z)}(y-z)dz\right)\Bigg|_{y=l}=$$

$$=\frac{d^i}{dy^i}\left(\frac{1}{4a^2}\int_0^y \Phi(z)e^{\frac{b_1-b}{2a}(y-z)}(y-z)dz\right)\Bigg|_{y=l},\ i=\overline{0,\infty}, \tag{22}$$

$$\frac{d^i}{dy^i}\left(e^{-\frac{by}{a}}\left[d\psi_0\left(-\frac{y}{a}\right)+b\psi_0\left(-\frac{y}{a}\right)+a\psi_1\left(-\frac{y}{a}\right)\right]-\right.$$

$$-e^{-\frac{by}{a}}\left[\partial_t F(t,0)|_{t=-\frac{y}{a}}+bF\left(-\frac{y}{a},0\right)+a\partial_x F\left(-\frac{y}{a},x\right)|_{x=0}\right]-$$

$$\left.-\frac{1}{2a}\int_0^{-y}\Phi(z)e^{\frac{b_1-b}{2a}(y-z)}dz\right)\Bigg|_{y=0}=$$

$$=\frac{d^i}{dy^i}\left(\varphi_1(y)+b\varphi_0(y)+ad\varphi_0(y)-\frac{1}{2a}\int_0^{y}\Phi(z)e^{\frac{b_1-b}{2a}(y-z)}dz\right)\Bigg|_{y=0},\ i=\overline{0,\infty}, \tag{23}$$

$$\frac{d^i}{dy^i}\left(e^{-\frac{by}{a}}\left[\frac{y}{a}d\psi_0\left(-\frac{y}{a}\right)+\frac{by+a}{a}\psi_0\left(-\frac{y}{a}\right)+y\psi_1\left(-\frac{y}{a}\right)\right]-\right.$$

$$-e^{-\frac{by}{a}}\left[\frac{y}{a}\partial_t F(t,0)|_{t=-\frac{y}{a}}+\frac{by+a}{a}F\left(-\frac{y}{a},0\right)+y\partial_x F\left(-\frac{y}{a},x\right)|_{x=0}\right]-$$

$$\left.-\frac{1}{4a^2}\int_0^{-y}\Phi(z)e^{\frac{b_1-b}{2a}(y-z)}(y-z)dz\right)\Bigg|_{y=0}=$$

$$=\frac{d^i}{dy^i}\left(\varphi_0(y)-\frac{1}{4a^2}\int_0^{y}\Phi(z)e^{\frac{b_1-b}{2a}(y-z)}(y-z)dz\right)\Bigg|_{y=0},\ i=\overline{0,\infty}, \tag{24}$$

где

$$\Phi(y)=\varphi_2(y)+2b\varphi_1(y)+2ad\varphi_1(y)+b^2\varphi_0(y)+2abd\varphi_0(y)+a^2d^2\varphi_0(y),\ y\in[0,l],$$

$$F(t,x)=\frac{1}{4a^2}\int_0^t e^{\frac{-b_1-b}{2}(t-\tau)}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau,z)e^{\frac{b_1-b}{2a}(x-z)}(x+a(t-\tau)-z)dzd\tau.$$

Теорема 2. *Если выполняются следующие условия гладкости на заданные функции:* $\varphi_i\in C^\infty([0,l])$, $i=\overline{0,2}$, $\psi_j\in C^\infty([0,+\infty))$, $j=\overline{0,1}$, $\mu\in C^\infty([0,+\infty))$, $f\in C^\infty(\overline{Q})$, *а также f удовлетворяет условиям леммы 2, то задача* (1)–(3) *однозначно разрешима в классе* $C^\infty(\overline{Q})$, *тогда и только тогда, когда выполняются равенства* (22)–(24).

Доказательство. Из лемм 2 и 3 следует, что задача (1)–(3) однозначно разрешима тогда и только тогда, когда однозначно разрешима однородная задача (19)–(21). Из теоремы 1 следует, что эта задача однозначно разрешима, только если выполняются следующие условия согласования:

$$\frac{d^i}{dy^i}\left(e^{\frac{(b-b_1)(l-y)}{a}}\left[(l-y)d\varphi_0(2l-y)+\frac{b(l-y)-a}{a}\varphi_0(2l-y)+\frac{l-y}{a}\varphi_1(2l-y)\right]+\right.$$

$$\left.+e^{\frac{b_1(y-l)}{a}}\tilde{\mu}\left(\frac{y-l}{a}\right)+\frac{1}{4a^2}\int_0^{2l-y}\Phi(z)e^{\frac{b_1-b}{2a}(y-z)}(y-z)dz\right)\Bigg|_{y=l}=$$

$$=\frac{d^i}{dy^i}\left(\frac{1}{4a^2}\int_0^{y}\Phi(z)e^{\frac{b_1-b}{2a}(y-z)}(y-z)dz\right)\Bigg|_{y=l},\ i=\overline{0,\infty}, \tag{25}$$

$$\frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}y^i}\left(e^{-\frac{by}{a}}\left[\mathrm{d}\widetilde{\psi}_0\left(-\frac{y}{a}\right)+b\widetilde{\psi}_0\left(-\frac{y}{a}\right)+a\widetilde{\psi}_1\left(-\frac{y}{a}\right)\right]-\frac{1}{2a}\int\limits_0^{-y}\Phi(z)e^{\frac{b_1-b}{2a}(y-z)}dz\right)\Bigg|_{y=0}=$$

$$=\frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}y^i}\left(\varphi_1(y)+b\varphi_0(y)+a\mathrm{d}\varphi_0(y)-\frac{1}{2a}\int\limits_0^{y}\Phi(z)e^{\frac{b_1-b}{2a}(y-z)}dz\right)\Bigg|_{y=0},\ i=\overline{0,\infty}, \tag{26}$$

$$\frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}y^i}\left(e^{-\frac{by}{a}}\left[\frac{y}{a}\mathrm{d}\widetilde{\psi}_0\left(-\frac{y}{a}\right)+\frac{by+a}{a}\widetilde{\psi}_0\left(-\frac{y}{a}\right)+y\widetilde{\psi}_1\left(-\frac{y}{a}\right)\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4a^2}\int\limits_0^{-y}\Phi(z)e^{\frac{b_1-b}{2a}(y-z)}(y-z)dz\right)\Bigg|_{y=0}=$$

$$=\frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}y^i}\left(\varphi_0(y)-\frac{1}{4a^2}\int\limits_0^{y}\Phi(z)e^{\frac{b_1-b}{2a}(y-z)}(y-z)dz\right)\Bigg|_{y=0},\ i=\overline{0,\infty}. \tag{27}$$

Заметим, что

$$\widetilde{\psi}_i(t)=\psi_i(t)-\partial_x^i v(t,0),\ i=\overline{0,1},$$

$$\widetilde{\mu}(t)=\mu(t)-v(t,l).$$

Тогда после подстановки вычисленных значений $\mathrm{d}^j\widetilde{\psi_i}$ и $\widetilde{\mu}$ в (25)–(27) получим уравнения (22)–(24). Таким образом, доказано утверждение теоремы 2.

Выводы. В данной статье были найдены необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости неоднородной задачи (1)–(3) в классе бесконечно дифференцируемых функций, когда функции из начальных и граничных условий также являются бесконечно дифференцируемыми. Также было получено классическое решение этой задачи, позволяющее находить значение искомой функции и ее производных в каждой точке полуполосы Q.

Список использованной литературы

1. *Руденко, О. В.* Теоретические основы нелинейной акустики / О. В. Руденко, С. И. Солуян. – М.: Наука, 1975.
2. *Варламов, В. В.* Об одной задаче распространения волн сжатия в вязкой среде / В. В. Варламов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1988. – Т. 25, вып. 10. – С. 1561–1565.
3. *Варламов, В. В.* Об одной начально-краевой задаче для гиперболического уравнения третьего порядка / В. В. Варламов // Дифференц. уравнения. – 1990. – Т. 26, № 8. – С. 1455–1457.
4. *Корзюк, В. И.* Задача Коши для гиперболических дифференциально-операторных уравнений третьего порядка / В. И. Корзюк, Н. И. Юрчук // Дифференц. уравнения. – 1991. – Т. 27, № 8. – С. 1448–1450.
5. *Корзюк, В. И.* Энергетическое неравенство для граничной задачи гиперболического уравнения с волновым оператором третьего порядка / В. И. Корзюк // Дифференц. уравнения. – 1991. – Т. 27, № 6. – С. 1014–1022.
6. *Корзюк, В. И.* Граничная задача для гиперболического уравнения с волновым оператором 3-го порядка / В. И. Корзюк // Дифференц. уравнения. – 2004. – Т. 40, № 2. – С. 208–215.
7. *Thomee, V.* Estimates of the Friedrichs--Lewy type for a hyperbolic equation with three characteristics / V. Thomee // Math. Scand. – 1955. – Vol. 3. – P. 115–123.
8. *Thomee, V.* Estimates of the Friedrichs–Lewy type for mixed problems in the theory of linear hyperbolic differential equation in two independent variables / V. Thomee // Math. Scand. – 1957. – Vol. 5. – P. 93–113.
9. *Thomee, V.* Existence proofs for mixed problems for hyperbolic differential equations in two independent variables by means of the continuity method / V. Thomee // Math. Scand. – 1958. – Vol. 6. – P. 5–32.
10. *Корзюк, В. И.* Классическое решение первой смешанной задачи для гиперболического уравнения третьего порядка с волновым оператором / В. И. Корзюк, А. А. Мандрик // Дифференц. уравнения. – 2014. – Т. 50, № 4. – С. 492–504.
11. *Корзюк, В. И.* Решение задачи Коши для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами в случае двух независимых переменных / В. И. Корзюк, И. С. Козловская // Дифференц. уравнения. – 2012. – Т. 48, № 5. – С. 700–709.

Поступила в редакцию 05.11.2015