

УДК 517.983.54+519.6

О. В. МАТЫСИК

**НЕЯВНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ САМОСОПРЯЖЕННОЙ НЕКОРРЕКТНОЙ ЗАДАЧИ
С ПРИБЛИЖЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ И АПОСТЕРИОРНЫМ ВЫБОРОМ
ПАРАМЕТРА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ**

*Брестский государственный университет им. А. С. Пушкина, Брест, Беларусь,
e-mail: matysikoleg@mail.ru*

Данная статья ставит своей целью изучение свойств неявного итерационного метода решения некорректных операторных уравнений первого рода, заданных в гильбертовом пространстве, с ограниченным самосопряженным оператором, в предположении, что погрешности имеются не только в правой части уравнения, но и в операторе. Доказана сходимость метода с апостериорным выбором числа итераций, найдены оценка погрешности метода и оценка для апостериорного момента останова. Полученные результаты могут быть использованы в теоретических исследованиях при решении операторных уравнений первого рода, а также прикладных некорректных задач, которые встречаются в динамике и кинетике, математической экономике, геофизике, спектроскопии, системах полной автоматической обработки и интерпретации экспериментов, диагностике плазмы, сейсмике, медицине.

Ключевые слова: неявный итерационный метод, некорректная задача, гильбертово пространство, самосопряженный приближенный оператор, правило останова по невязке.

O. V. MATYSIK

**IMPLICIT METHOD FOR SOLVING A SELF-ADJOINT ILL-POSED PROBLEM
WITH AN APPROXIMATE OPERATOR AND AN A POSTERIORI CHOICE
OF THE REGULARIZATION PARAMETER**

*Brest State University named after A. S. Pushkin, Brest, Belarus,
e-mail: matysikoleg@mail.ru*

The implicit iteration method for solution of the first-kind operator equations with a non-negative self-adjoint bounded operator in the Hilbert space is proposed. Convergence of the method is proved in the case of an a posteriori choice of the regularization parameter in the usual norm of the Hilbert space, supposing that not only the right hand-side of the equation, but also the operator have errors. The estimates of a method error and an a posteriori stop moment are obtained.

Keywords: implicit iteration method, incorrect problem, Hilbert space, self-adjointed approximate operator, discrepancy stopping rule.

Введение. В статье предлагается неявный итерационный метод решения некорректно поставленных задач, описываемых операторными уравнениями первого рода. Метод представляет собой семейство итерационных схем, зависящих от параметра k .

Сравнение предлагаемого неявного метода с хорошо известным явным методом итераций $x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + \alpha(y_\delta - Ax_{n,\delta})$, $x_{0,\delta} = 0$ [1] показывает, что порядки их оптимальных оценок совпадают. Достоинство явных методов заключается в том, что они не требуют обращения оператора, а требуют только вычисления значений оператора на последовательных приближениях. В этом смысле явный метод из работы [1] предпочтительнее предлагаемого неявного метода. Однако предложенный неявный метод обладает следующим важным преимуществом. В явном методе

из [1] на шаг α накладывается ограничение сверху – неравенство $0 < \alpha \leq \frac{5}{4\|A\|}$, что может на практике привести к необходимости большого числа итераций. В рассматриваемом неявном методе никаких ограничений сверху на $\alpha > 0$ нет, в связи с чем оптимальную оценку для рассматриваемого неявного метода можно получить уже на первых шагах итераций.

Случай приближенной правой части некорректного уравнения и точного оператора для предложенного метода рассмотрен в работе [2, с. 137]. Там исследован априорный и апостериорный выбор параметра регуляризации, изучен случай неединственного решения уравнения, доказана сходимость метода в энергетической норме гильбертова пространства.

В [3] для предлагаемого метода при решении уравнения с приближенным оператором и приближенной правой частью доказана сходимость и получены оценки погрешности в случае априорного выбора числа итераций.

В данной статье продолжено изучение предложенного метода. Доказана его сходимость в случае апостериорного выбора числа итераций для решения уравнения с самосопряженным оператором, получены оценка погрешности метода и оценка для апостериорного момента останова в предположении, что оператор и правая часть уравнения заданы приближенно.

1. Постановка задачи. Пусть H и F – гильбертовы пространства, $A \in \mathcal{L}(H, F)$, т. е. A – линейный непрерывный оператор, действующий из H в F . Решается уравнение

$$Ax = y. \quad (1)$$

Предполагается, что нуль принадлежит спектру оператора A , но не является его собственным значением. Задача отыскания элемента $x \in H$ по элементу $y \in F$ является некорректной, так как сколь угодно малые возмущения в правой части y могут вызывать большие возмущения решения.

Предположим, что точное решение $x^* \in H$ уравнения (1) существует и является единственным. Будем искать его с помощью неявного метода итераций

$$(E + \alpha^2 A^{2k})x_{n+1} = (E - \alpha A^k)^2 x_n + 2\alpha A^{k-1}y, \quad x_0 = 0, \quad k \in N, \quad (2)$$

где E – тождественный оператор, α – итерационный шаг. Считаем, что оператор A и правая часть y уравнения (1) заданы приближенно, т. е. вместо y известно приближение y_δ , $\|y - y_\delta\| \leq \delta$, а вместо оператора A известен оператор A_η , $\|A - A_\eta\| \leq \eta$. Тогда метод итераций (2) примет вид

$$(E + \alpha^2 A_\eta^{2k})x_{(n+1)(\delta, \eta)} = (E - \alpha A_\eta^k)^2 x_{n(\delta, \eta)} + 2\alpha A_\eta^{k-1}y_\delta, \quad x_{0(\delta, \eta)} = 0, \quad k \in N. \quad (3)$$

Предположим, что $0 \in Sp(A_\eta)$ и $Sp(A_\eta) \subseteq [0, M]$.

Докажем сходимость итерационного метода (3) в случае апостериорного выбора параметра регуляризации при решении некорректного уравнения $A_\eta x = y_\delta$ и получим оценку погрешности метода и оценку для момента останова. Подобные вопросы изучались в [1, с. 103], но только для других методов. В дальнейшем считаем, что нуль не является собственным значением оператора A_η , но принадлежит его спектру.

2. Правило останова по невязке. Зададим уровень останова $\varepsilon > 0$ и определим момент m останова итерационного процесса (3) условием

$$\left. \begin{aligned} \|A_\eta x_{n(\delta, \eta)} - y_\delta\| &> \varepsilon, \quad (n < m), \\ \|A_\eta x_{m(\delta, \eta)} - y_\delta\| &\leq \varepsilon, \end{aligned} \right\} \quad \varepsilon = b(\delta + \|x^*\|\eta), \quad b > 1. \quad (4)$$

Предположим, что при начальном приближении $x_{0(\delta, \eta)}$ невязка достаточно велика, больше уровня останова ε , т. е. $\|A_\eta x_{0(\delta, \eta)} - y_\delta\| > \varepsilon$. Покажем возможность применения правила (4) к методу итераций (3).

3. Случай самосопряженной задачи. Пусть $H = F$, $A = A^* \geq 0$, $A_\eta = A_\eta^* \geq 0$, $Sp(A_\eta) \subseteq [0, M]$, $0 < \eta \leq \eta_0$. Итерационный метод (3) запишется в виде

$$x_{n(\delta, \eta)} = g_n(A_\eta) y_\delta, \quad (5)$$

где $g_n(\lambda) = \lambda^{-1} \left[1 - \frac{(1 - \alpha \lambda^k)^{2n}}{(1 + \alpha^2 \lambda^{2k})^n} \right] \geq 0$. В монографии [2, с. 139] получены следующие условия для функций $g_n(\lambda)$ при $\alpha > 0$:

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq M} |g_n(\lambda)| \leq \gamma n^{1/k}, \quad (n > 0), \quad \gamma = 2k\alpha^{1/k}; \quad (6)$$

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq M} \lambda^s |1 - \lambda g_n(\lambda)| \leq \gamma_s n^{-s/k}, \quad (n > 0), \quad 0 < s < \infty, \quad \gamma_s = \left(\frac{s}{2k\alpha e} \right)^{s/k} \quad (7)$$

(здесь s – степень истокопредставимости точного решения $x^* = A^s z$, $s > 0$, $\|z\| \leq \rho$);

$$\sup_{0 \leq \lambda \leq M} |1 - \lambda g_n(\lambda)| \leq \gamma_0, \quad \gamma_0 = 1, \quad (n > 0). \quad (8)$$

Справедлива

Лемма 1. Пусть $A = A^* \geq 0$, $A_\eta = A_\eta^* \geq 0$, $\|A_\eta - A\| \leq \eta$, $\|A_\eta\| \leq M$, $\alpha > 0$ и выполнено условие (7). Тогда для $G_{m\eta} = E - A_\eta g_n(A_\eta)$ справедливо соотношение для $\forall u \in \overline{R(A)}$:

$$n^{1/k} \|A_\eta G_{m\eta} u\| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \eta \rightarrow 0. \quad (9)$$

Доказательство. Воспользуемся теоремой Банаха – Штейнгауза [4, с. 151], по которой сходимость $B_n u \rightarrow B u$ при $n \rightarrow \infty$ для $\forall u \in H$ имеет место на некотором плотном в H подмножестве и $\|B_n\|$, $n = 1, 2, \dots$ ограничены не зависящей от n постоянной. Здесь $\|B_n\| = n^{1/k} \|A_\eta G_{m\eta}\|$ и по условию (7) нормы $\|B_n\|$ ограничены в совокупности

$$\begin{aligned} n^{1/k} \|A_\eta G_{m\eta}\| &= n^{1/k} \|A_\eta (E - A_\eta g_n(A_\eta))\| = \\ &= n^{1/k} \sup_{0 \leq \lambda \leq M} \lambda |1 - \lambda g_n(\lambda)| \leq n^{1/k} \gamma_1 n^{-1/k} = \gamma_1, \quad (n > 0, \eta > 0). \end{aligned}$$

Для элементов вида $u = A\omega$, образующих в $\overline{R(A)}$ плотное подмножество, в силу (7) имеем

$$\begin{aligned} n^{1/k} \|A_\eta G_{m\eta} u\| &= n^{1/k} \|A_\eta G_{m\eta} A\omega\| = n^{1/k} \|A_\eta G_{m\eta} (A - A_\eta)\omega\| + \\ &+ n^{1/k} \|A_\eta G_{m\eta} A_\eta \omega\| \leq \left(\gamma_1 \eta + n^{1/k} \sup_{0 \leq \lambda \leq M} \lambda^2 |1 - \lambda g_n(\lambda)| \right) \|\omega\| \leq \\ &\leq (\gamma_1 \eta + n^{1/k} \gamma_2 n^{-2/k}) \|\omega\| = (\gamma_1 \eta + \gamma_2 n^{-1/k}) \|\omega\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \eta \rightarrow 0. \end{aligned}$$

По теореме Банаха – Штейнгауза $n^{1/k} \|A_\eta G_{m\eta} u\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, $\eta \rightarrow 0$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть $A = A^* \geq 0$, $A_\eta = A_\eta^* \geq 0$, $\|A_\eta - A\| \leq \eta$, $\|A_\eta\| \leq M$, $\alpha > 0$ и выполнены условия (6) и (8). Если для некоторых $u_0 \in \overline{R(A)}$, $n_p \leq \bar{n} = \text{const}$ и $\eta_p \rightarrow 0$ имеем $A_{\eta_p} G_{n_p \eta_p} u_0 \rightarrow 0$ при $p \rightarrow \infty$, то $G_{n_p \eta_p} u_0 \rightarrow 0$.

Доказательство. В силу неравенства (8) последовательность $u_p = G_{n_p \eta_p} u_0$ ограничена, т. е. $\|u_p\| = \|G_{n_p \eta_p} u_0\| \leq \gamma_0 \|u_0\|$, $p \in N = \{1, 2, \dots\}$. Поэтому в гильбертовом пространстве из этой

последовательности можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность $v_p \rightarrow v$, ($p \in N' \subset N$). Тогда $A_{\eta p} v_p \rightarrow A_{\eta p} v$, ($p \in N'$). По условию $\omega_p = A_{\eta p} v_p \rightarrow 0$, значит, $A_{\eta p} v = 0$. Но так как нуль не является собственным значением оператора $A_{\eta p}$, то $v = 0$. Теперь

$$\begin{aligned} \|v_p\|^2 &= (v_p, G_{n_p \eta p} v_0) = (v_p, (E - A_{\eta p} g_{n_p}(A_{\eta p})) v_0) = (v_p, v_0) - \\ &- (A_{\eta p} v_p, g_{n_p}(A_{\eta p}) v_0) = (v_p, v_0) - (\omega_p, g_{n_p}(A_{\eta p}) v_0) \rightarrow (v, v_0) = (0, v_0) = 0, \quad (p \in N'), \end{aligned}$$

так как $\omega_p \rightarrow 0$ и по условию (6) $\|g_{n_p}(A_{\eta p})\| \leq \gamma n_p^{1/k} \leq \gamma \bar{n}^{1/k}$. Итак, любая слабо сходящаяся подпоследовательность ограниченной последовательности v_p стремится к нулю по норме. Отсюда следует, что и вся последовательность $v_p \rightarrow 0$, $p \rightarrow \infty$ по норме. Лемма 2 доказана.

Используем доказанные леммы при доказательстве следующих теорем.

Теорема 1. Пусть $H = F$, $A = A^* \geq 0$, $A_{\eta} = A_{\eta}^* \geq 0$, $\|A_{\eta} - A\| \leq \eta$, $\|A_{\eta}\| \leq M$, ($0 < \eta \leq \eta_0$), $\alpha > 0$, $y \in R(A)$, $\|y - y_{\delta}\| \leq \delta$ и выполнены условия (6), (7), (8). Пусть параметр $m(\delta, \eta)$ выбран по правилу (4). Тогда $(\delta + \eta)^k m(\delta, \eta) \rightarrow 0$, $x_{m(\delta, \eta)} \rightarrow x^*$ при $\delta \rightarrow 0$, $\eta \rightarrow 0$.

Доказательство. Из (5) имеем $x_{n(\delta, \eta)} = g_n(A_{\eta}) y_{\delta}$, тогда

$$\begin{aligned} x_{n(\delta, \eta)} - x^* &= -x^* + g_n(A_{\eta}) y_{\delta} = -G_{m\eta} x^* + G_{m\eta} x^* - x^* + g_n(A_{\eta}) y_{\delta} = \\ &= -G_{m\eta} x^* + (E - A_{\eta} g_n(A_{\eta})) x^* - x^* + g_n(A_{\eta}) y_{\delta} = \\ &= -G_{m\eta} x^* + x^* - A_{\eta} g_n(A_{\eta}) x^* - x^* + g_n(A_{\eta}) y_{\delta} = \\ &= -G_{m\eta} x^* + g_n(A_{\eta}) (y_{\delta} - A_{\eta} x^*). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$x_{n(\delta, \eta)} - x^* = -G_{m\eta} x^* + g_n(A_{\eta}) (y_{\delta} - A_{\eta} x^*). \quad (10)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} A_{\eta} x_{n(\delta, \eta)} - A_{\eta} x^* &= -A_{\eta} G_{m\eta} x^* + A_{\eta} g_n(A_{\eta}) y_{\delta} - A_{\eta} g_n(A_{\eta}) A_{\eta} x^*; \\ A_{\eta} x_{n(\delta, \eta)} &= A_{\eta} x^* - A_{\eta} G_{m\eta} x^* + A_{\eta} g_n(A_{\eta}) y_{\delta} - A_{\eta} g_n(A_{\eta}) A_{\eta} x^*; \\ A_{\eta} x_{n(\delta, \eta)} - y_{\delta} &= -A_{\eta} G_{m\eta} x^* - y_{\delta} + (E - A_{\eta} g_n(A_{\eta})) A_{\eta} x^* + A_{\eta} g_n(A_{\eta}) y_{\delta} = \\ &= -A_{\eta} G_{m\eta} x^* + G_{m\eta} A_{\eta} x^* - (E - A_{\eta} g_n(A_{\eta})) y_{\delta} = \\ &= -A_{\eta} G_{m\eta} x^* + G_{m\eta} A_{\eta} x^* - G_{m\eta} y_{\delta} = -A_{\eta} G_{m\eta} x^* - G_{m\eta} (y_{\delta} - A_{\eta} x^*). \end{aligned}$$

Итак,

$$A_{\eta} x_{n(\delta, \eta)} - y_{\delta} = -A_{\eta} G_{m\eta} x^* - G_{m\eta} (y_{\delta} - A_{\eta} x^*). \quad (11)$$

Покажем, что $\|G_{m\eta} x^*\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, $\eta \rightarrow 0$. Действительно,

$$\begin{aligned} \|G_{m\eta} x^*\| &= \|(E - A_{\eta} g_n(A_{\eta})) x^*\| = \left\| \int_0^M (1 - \lambda g_n(\lambda)) dE_{\lambda} x^* \right\| = \\ &= \left\| \int_0^M \frac{(1 - \alpha \lambda^k)^{2n}}{(1 + \alpha^2 \lambda^{2k})^n} dE_{\lambda} x^* \right\| \leq \left\| \int_0^{\tau} \frac{(1 - \alpha \lambda^k)^{2n}}{(1 + \alpha^2 \lambda^{2k})^n} dE_{\lambda} x^* \right\| + \left\| \int_{\tau}^M \frac{(1 - \alpha \lambda^k)^{2n}}{(1 + \alpha^2 \lambda^{2k})^n} dE_{\lambda} x^* \right\| = \\ &= \left\| \int_{\tau}^M \frac{(1 - \alpha \lambda^k)^{2n}}{(1 + \alpha^2 \lambda^{2k})^n} dE_{\lambda} x^* \right\| \leq q^n(\tau) \left\| \int_{\tau}^M dE_{\lambda} x^* \right\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad \text{так как для } \lambda \in [\tau, M] \quad \frac{(1 - \alpha \lambda^k)^2}{1 + \alpha^2 \lambda^{2k}} \leq q(\tau) < 1. \end{aligned}$$

$$\left\| \int_0^\tau \frac{(1 - \alpha \lambda^k)^{2n}}{(1 + \alpha^2 \lambda^{2k})^n} dE_\lambda x^* \right\| \leq \left\| \int_0^\tau dE_\lambda x^* \right\| = \|E_\tau x^*\| \rightarrow 0, \quad \tau \rightarrow 0 \text{ в силу свойств спектральной функции}$$

[5, с. 302]. Таким образом,

$$\|G_{m\eta} x^*\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad \eta \rightarrow 0. \quad (12)$$

Покажем, что

$$\|g_n(A_\eta)(y_\delta - A_\eta x^*)\| \leq \gamma n^{1/k} (\delta + \|x^*\| \eta). \quad (13)$$

По условию (6) $\|g_n(A_\eta)\| \leq \sup_{0 \leq \lambda \leq M} |g_n(\lambda)| \leq \gamma n^{1/k}$, а

$$\|y_\delta - A_\eta x^*\| \leq \|y_\delta - y\| + \|y - A_\eta x^*\| = \|y_\delta - y\| + \|Ax^* - A_\eta x^*\| \leq \delta + \|(A - A_\eta)x^*\| \leq \delta + \eta \|x^*\|,$$

поэтому получим $\|g_n(A_\eta)(y_\delta - A_\eta x^*)\| \leq \gamma n^{1/k} (\delta + \|x^*\| \eta)$. В силу леммы 1

$$\sigma_{m\eta} = n^{1/k} \|A_\eta G_{m\eta} x^*\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad \eta \rightarrow 0. \quad (14)$$

Применим правило останова (4), тогда $\|A_\eta x_{m(\delta, \eta)} - y_\delta\| \leq b(\delta + \|x^*\| \eta)$, $b > 1$ и из (8) и (11) получим

$$\|A_\eta G_{m\eta} x^*\| \leq (b+1)(\delta + \|x^*\| \eta). \quad (15)$$

Действительно, из (11)

$$\begin{aligned} \|A_\eta G_{m\eta} x^*\| &\leq \|A_\eta x_{m(\delta, \eta)} - y_\delta\| + \|G_{m\eta}(y_\delta - A_\eta x^*)\| \leq \\ &\leq b(\delta + \|x^*\| \eta) + (\delta + \|x^*\| \eta) = (b+1)(\delta + \|x^*\| \eta). \end{aligned}$$

Для $\forall n < m$ $\|A_\eta x_{n(\delta, \eta)} - y_\delta\| > \varepsilon$, поэтому

$$\|A_\eta G_{m\eta} x^*\| \geq \|A_\eta x_{n(\delta, \eta)} - y_\delta\| - \|G_{m\eta}(y_\delta - A_\eta x^*)\| \geq (b-1)(\delta + \|x^*\| \eta).$$

Следовательно, для $\forall n < m$

$$\|A_\eta G_{m\eta} x^*\| \geq (b-1)(\delta + \|x^*\| \eta). \quad (16)$$

Из (16) и (14) при $n = m-1$ $\frac{\sigma_{m-1, \eta}}{(m-1)^{1/k}} = \|A_\eta G_{m-1, \eta} x^*\| \geq (b-1)(\delta + \|x^*\| \eta)$ или $(m-1)^{1/k} (\delta + \|x^*\| \eta) \leq \frac{\sigma_{m-1, \eta}}{b-1} \rightarrow 0, \delta \rightarrow 0, \eta \rightarrow 0$ (так как из (14) $\sigma_{m\eta} \rightarrow 0, m \rightarrow \infty, \eta \rightarrow 0$).

Если при этом $m(\delta, \eta) \rightarrow \infty$ при $\delta \rightarrow 0, \eta \rightarrow 0$, то, используя (10), (12) и (13), получим

$$\begin{aligned} \|x_{m(\delta, \eta)} - x^*\| &\leq \|G_{m\eta} x^*\| + \|g_m(A_\eta)(y_\delta - A_\eta x^*)\| \leq \\ &\leq \|G_{m\eta} x^*\| + \gamma m^{1/k} (\delta, \eta) (\delta + \|x^*\| \eta) \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0, \eta \rightarrow 0, \end{aligned}$$

т. е. что $x_{m(\delta, \eta)} \rightarrow x^*$.

Если же для некоторых δ_n и η_n последовательность $m(\delta_n, \eta_n)$ окажется ограниченной, то и в этом случае $x_{m(\delta_n, \eta_n)} \rightarrow x^*, \delta_n \rightarrow 0, \eta_n \rightarrow 0$. Действительно, из (15)

$$\|A_{\eta_n} G_{m\eta_n} x^*\| \leq (b+1)(\delta_n + \|x^*\| \eta_n) \rightarrow 0, \quad \delta_n \rightarrow 0, \eta_n \rightarrow 0.$$

Следовательно, имеем $A_{\eta_n} G_{m\eta_n} x^* \rightarrow 0$, $\eta_n \rightarrow 0$, $\delta_n \rightarrow 0$ и по лемме 2 получаем, что при $\delta_n \rightarrow 0$, $\eta_n \rightarrow 0$ выполняется $G_{m\eta_n} x^* \rightarrow 0$. Отсюда

$$\|x_{m(\delta_n, \eta_n)} - x^*\| \leq \|G_{m\eta_n} x^*\| + \gamma m^{1/k} (\delta_n, \eta_n) (\delta_n + \|x^*\| \eta_n) \rightarrow 0, \delta_n \rightarrow 0, \eta_n \rightarrow 0.$$

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Если $x^* = A^s z$, $s > 0$, $\|z\| \leq \rho$, то справедливы оценки

$$\begin{aligned} m \leq 1 + \frac{s+1}{2k\alpha e} \left[\frac{\rho}{(b-1)(\delta + \|x^*\| \eta) - c_s \gamma_1 \eta \rho} \right]^{\frac{k}{s+1}}, \\ \|x_{m(\delta, \eta)} - x^*\| \leq c_s \eta^{\min(1, s)} \rho + \left[c_s \gamma_1 \eta \rho + (b+1)(\delta + \|x^*\| \eta) \right]^{\frac{s}{s+1}} \rho^{\frac{1}{s+1}} + \\ + 2k\alpha^{1/k} \left\{ 1 + \frac{s+1}{2k\alpha e} \left[\frac{\rho}{(b-1)(\delta + \|x^*\| \eta) - c_s \gamma_1 \eta \rho} \right]^{\frac{k}{s+1}} \right\}^{1/k} (\delta + \|x^*\| \eta). \end{aligned} \quad (17)$$

Доказательство. Оценим заново элемент $\|A_{\eta} G_{m-1, \eta} x^*\|$. В силу неравенства (7) и леммы 1.1 [1, с. 91]

$$\begin{aligned} \|A_{\eta} G_{m-1, \eta} x^*\| &= \|A_{\eta} G_{m-1, \eta} A^s z\| \leq \|A_{\eta} G_{m-1, \eta} (A^s - A_{\eta}^s) z\| + \|A_{\eta}^{s+1} G_{m-1, \eta} z\| \leq \\ &\leq (\beta_{m-1, s} \eta + \gamma_{s+1} (m-1)^{-(s+1)/k}) \rho, \end{aligned}$$

где $\beta_{m-1, s} = c_s \sup_{0 \leq \lambda \leq M} \lambda(1 - \lambda g_{m-1}(\lambda)) \leq c_s [2k\alpha e(m-1)]^{-1/k} = c_s \gamma_1 (m-1)^{-1/k} \rightarrow 0$, $m \rightarrow \infty$. Здесь $c_s = \text{const}$ ($c_s \leq 2$ при $0 < s \leq 1$). Сопоставляя это с (16), получим

$$(b-1)(\delta + \|x^*\| \eta) \leq (\beta_{m-1, s} \eta + \gamma_{s+1} (m-1)^{-(s+1)/k}) \rho.$$

Отсюда

$$\gamma_{s+1} (m-1)^{-(s+1)/k} \rho \geq (b-1)(\delta + \|x^*\| \eta) - \beta_{m-1, s} \eta \rho,$$

тогда

$$m \leq 1 + \frac{s+1}{2k\alpha e} \left[\frac{\rho}{(b-1)(\delta + \|x^*\| \eta) - \beta_{m-1, s} \eta \rho} \right]^{\frac{k}{s+1}}.$$

Поскольку $\beta_{m-1, s} = c_s \gamma_1 \frac{1}{(m-1)^{1/k}} \leq c_s \gamma_1$ (так как при $m > 1$ $\frac{1}{(m-1)^{1/k}} \leq 1$), то

$$(b-1)(\delta + \|x^*\| \eta) - \beta_{m-1, s} \eta \rho \geq (b-1)(\delta + \|x^*\| \eta) - c_s \gamma_1 \eta \rho,$$

и, значит, получим следующую оценку для m :

$$m \leq 1 + \frac{s+1}{2k\alpha e} \left[\frac{\rho}{(b-1)(\delta + \|x^*\| \eta) - c_s \gamma_1 \eta \rho} \right]^{\frac{k}{s+1}}.$$

Имеем $\|G_{m\eta}x^*\| = \|G_{m\eta}A^s z\| \leq \|G_{m\eta}(A^s - A_\eta^s)z\| + \|G_{m\eta}A_\eta^s z\|$. По лемме 1.1 [1, с. 91] $\|G_{m\eta}(A^s - A_\eta^s)z\| \leq c_s \eta^{\min(1,s)} \rho$, что дает в оценку $\|x_{m(\delta,\eta)} - x^*\|$ вклад $O((\delta + \eta)^{s/(s+1)})$ [1, с. 111]. Норму $\|G_{m\eta}A_\eta^s z\|$ оценим с помощью неравенства моментов, леммы 1.1 [1, с. 91] и (15):

$$\begin{aligned} \|G_{m\eta}A_\eta^s z\| &= \|A_\eta^{s+1} G_{m\eta} z\|^{s/(s+1)} \|G_{m\eta} z\|^{1/(s+1)} \leq \|A_\eta G_{m\eta} A_\eta^s z\|^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)} \leq \\ &\leq \left(\|A_\eta G_{m\eta} (A_\eta^s - A^s) z\| + \|A_\eta G_{m\eta} A^s z\| \right)^{s/(s+1)} \rho^{\frac{1}{s+1}} \leq \\ &\leq \left[\beta_{ms} \eta \rho + (b+1)(\delta + \|x^*\| \eta) \right]^{s/(s+1)} \rho^{\frac{1}{s+1}}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|x_{m(\delta,\eta)} - x^*\| &\leq \|G_{m\eta}x^*\| + \|g_m(A_\eta)(y_\delta - A_\eta x^*)\| \leq \\ &\leq c_s \eta^{\min(1,s)} \rho + \left[\beta_{ms} \eta \rho + (b+1)(\delta + \|x^*\| \eta) \right]^{s/(s+1)} \rho^{\frac{1}{s+1}} + \gamma m^{\frac{1}{k}} (\delta + \|x^*\| \eta) \leq \\ &\leq c_s \eta^{\min(1,s)} \rho + \left[c_s \gamma_1 \eta \rho + (b+1)(\delta + \|x^*\| \eta) \right]^{s/(s+1)} \rho^{\frac{1}{s+1}} + \\ &+ 2k\alpha^{1/k} \left\{ 1 + \frac{s+1}{2k\alpha e} \left[\frac{\rho}{(b-1)(\delta + \|x^*\| \eta) - c_s \gamma_1 \eta \rho} \right]^{\frac{k}{s+1}} \right\}^{1/k} (\delta + \|x^*\| \eta). \end{aligned}$$

Теорема 2 доказана.

Замечание 1. Порядок оценки (17) есть $O((\delta + \eta)^{s/(s+1)})$, и, как следует из [1, с. 15], он оптимален в классе задач с истокорпредставимыми решениями.

Замечание 2. Хотя формулировка теоремы 2 дается с указанием степени истокорпредставимости s и истокорпредставляющего элемента z , на практике их значения не потребуются, так как они не содержатся в правиле останова (4).

Заключение. В данной работе получены следующие новые результаты: доказана сходимость неявного итерационного метода решения некорректных уравнений первого рода с неотрицательным самосопряженным ограниченным оператором в случае апостериорного выбора параметра регуляризации в исходной норме гильбертова пространства и в предположении, что погрешности имеются не только в правой части уравнения, но и в операторе; получены оценка погрешности метода и оценка апостериорного момента останова.

Список использованной литературы

1. Вайникко, Г. М. Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г. М. Вайникко, А. Ю. Веретенников. – М.: Наука, 1986.
2. Матысик, О. В. Явные и неявные итерационные процедуры решения некорректно поставленных задач / О. В. Матысик. – Брест: БрГУ им. А. С. Пушкина, 2014.
3. Matysik, O. V. Implicit iteration method of solving linear equations with approximating right-hand member and approximately specified operator / O. V. Matysik // J. Numer. Appl. Math. – 2014. – N 2 (116). – P. 28–34.
4. Люстерник, Л. А. Элементы функционального анализа / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. – М.: Наука, 1965.
5. Канторович, Л. В. Функциональный анализ в нормированных пространствах / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – М.: Физматгиз, 1959.

Поступила в редакцию 08.10.2015