

УДК 513.51

Е. А. РОВБА, Е. В. ДИРВУК

**О КОНСТАНТЕ ЛЕБЕГА ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ
ПРОЦЕССОВ ЛАГРАНЖА ПО УЗЛАМ ЧЕБЫШЕВА – МАРКОВА**

*Гродненский государственный университет им. Янки Купалы, Гродно, Беларусь,
e-mail: rovba.ea@gmail.com, dirvuk@gmail.com*

В настоящей работе рассматриваются интерполяционные процессы Лагранжа, в которых в качестве узлов интерполирования выбираются нули рациональных функций Чебышева – Маркова первого рода. Получена оценка константы Лебега в случае действительных полюсов.

Ключевые слова: интерполяционные процессы Лагранжа, рациональные функции Чебышева – Маркова, оценка константы Лебега.

Y. A. ROVBA, Y. V. DIRVUK

**ESTIMATION OF THE LEBESGUE CONSTANT FOR THE RATIONAL
LAGRANGE INTERPOLATION PROCESSES THROUGH THE CHEBYSHEV – MARKOV NODES**

*Yanka Kupala State University of Grodno, Grodno, Belarus,
e-mail: rovba.ea@gmail.com, dirvuk@gmail.com*

This article considers the Lagrange interpolation processes, in which as interpolation nodes the zeros of the first-kind rational Chebyshev – Markov functions are chosen. The Lebesgue constant in the case of real poles is estimated.

Keywords: Lagrange interpolation process, rational Chebyshev – Markov functions, estimate of the Lebesgue constant.

Исследование функции Лебега интерполяционных процессов Лагранжа на различных множествах – одна из основных задач теории интерполирования (см., напр., [1]). Скорость их роста в зависимости от величины n определяет как сходимость интерполяционного процесса $L_n(x)$ к функции $f(x)$ в равномерной норме, так и оценку вычислительной погрешности интерполяции. В полиномиальном случае интерполирование Лагранжа по нулям многочленов Чебышева изучалось многими авторами. Оценки нормы соответствующих интерполяционных многочленов, рассматриваемых как операторы в пространстве непрерывных функций на отрезке, т. е. констант Лебега, были получены в работах С. Н. Бернштейна [2], В. В. Иванова [3], В. К. Дзядыка [4] и других авторов (см., напр., [5]).

Аналогом для интерполирования рациональными функциями с фиксированными полюсами на отрезке $[-1,1]$ служит интерполяционный процесс по нулям дробей Чебышева – Маркова, рассмотренный впервые В. Н. Русаком [6]. В этой работе получена оценка константы Лебега в случае, когда полюсы не имеют предельных точек на отрезке $[-1,1]$. Подобный результат был повторен в работах П. Борвейна [7] и Г. Мина [8]. А. П. Старовойтов [9] получил оценку константы Лебега интерполяционных рациональных процессов с узлами Чебышева – Маркова в случае стремления полюсов к концам отрезка $[-1,1]$ по некасательным путям и некоторых дополнительных условиях. А. Л. Лукашов [10] получил подобную оценку констант Лебега интерполяционных рациональных процессов с узлами Чебышева – Маркова на нескольких отрезках. Заметим, что норма интерполяционных операторов в L_2 исследована достаточно полно (см. [11, 12]).

Основная цель предлагаемой статьи – получить оценку константы Лебега для случая интерполяционных рациональных процессов Лагранжа с узлами Чебышева – Маркова на отрезке $[-1,1]$ в случае действительных плюсов.

Пусть $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ – последовательность действительных чисел $a_0 = 0$, $|a_k| < 1$, $k \in \mathbb{N}$. Определим косинус-дробь Чебышева – Маркова:

$$M_n(x) = \cos \mu_n(x),$$

где

$$\mu_n(x) = \sum_{k=0}^n \arccos \frac{x + a_k}{1 + a_k x}.$$

Нетрудно проверить, что $\mu_n'(x) = -\frac{\lambda_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}$, $\lambda_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\sqrt{1-a_k^2}}{1+a_k x}$, $x \in (-1,1)$.

Обозначим через $x_k, k=0,1,\dots,n$ нули функции $M_n(x)$,

$$\mu_n(x_k) = \frac{(2k+1)\pi}{2}, \quad k=0,1,\dots,n, \quad (1)$$

$$-1 < x_n < x_{n-1} < \dots < x_1 < x_0 < 1.$$

Для всякой функции $f(x)$, определенной на отрезке $[-1,1]$, можно построить интерполяционную рациональную функцию Лагранжа

$$L_n(x, f) = \sum_{k=0}^n f(x_k) l_k(x), \quad (2)$$

где

$$l_k(x) = \frac{M_n(x)}{(x-x_k)M_n'(x_k)}, \quad k=0,1,\dots,n.$$

Определим функцию Лебега

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n |l_k(x)|, \quad x \in [-1,1]$$

и константу Лебега

$$L_n = \max_{x \in [-1,1]} L_n(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Понятно, что $L_n = \|L_n\|_{C[-1,1]}$, т. е. постоянная Лебега, есть норма оператора, $L_n : C[-1,1] \rightarrow \mathbf{R}_n(a)$, где $\mathbf{R}_n(a)$ есть множество рациональных функций вида

$$\frac{p_n(x)}{\prod_{k=1}^n (1+a_k x)},$$

где $p_n(x)$ – произвольный алгебраический многочлен степени не выше n .

Справедлива

Т е о р е м а. Пусть $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ – последовательность действительных чисел, $a_0 = 0$, $|a_k| < 1$, $k \in \mathbb{N}$ и $\{L_n(x, f)\}$ – интерполяционный процесс Лагранжа с узлами Чебышева – Маркова (см. (2)). Тогда для постоянной Лебега этого процесса справедлива оценка

$$L_n(x) < 1 + C d_n \ln \sum_{k=0}^n \left(\sqrt{\frac{1-a_k}{1+a_k}} + \sqrt{\frac{1+a_k}{1-a_k}} \right), \quad n \in \mathbb{N},$$

где C – некоторая положительная постоянная, $d_n = \max_{k=1,2,\dots,n} \left\{ \frac{\lambda_n(x_{k-1})}{\lambda_n(x_k)}, \frac{\lambda_n(x_k)}{\lambda_n(x_{k-1})} \right\}$.

Доказательство. Прежде всего отметим, что из равенства

$$L_n(x, 1) \equiv 1$$

имеем:

$$\sum_{k=0}^n l_k(x) = 1,$$

и

$$|l_j(x)| \leq 1 + \sum_{\substack{k=0, \\ k \neq j}}^n |l_k(x)|, \quad j = 0, 1, \dots, n. \quad (3)$$

Далее найдем

$$\lambda_n'(x) = -\sum_{k=1}^n \frac{a_k \sqrt{1-a_k^2}}{(1+a_k x)^2}, \quad x \in [-1, 1];$$

и

$$\lambda_n''(x) = \sum_{k=1}^n \frac{2a_k^2 \sqrt{1-a_k^2}}{(1+a_k x)^3}, \quad x \in [-1, 1].$$

Очевидно, функция $\lambda_n(x)$ является выпуклой вниз на отрезке $[-1, 1]$ и, следовательно, существует точка $x = \alpha_n$ такая, что на отрезке $[-1, \alpha_n]$ эта функция убывает, а на отрезке $[\alpha_n, 1]$ – возрастает. Причем не исключаем случай, когда $\alpha_n = 1$ или $\alpha_n = -1$. Заметим также, что

$$\lambda_n(-1) = \sum_{k=0}^n \sqrt{\frac{1+a_k}{1-a_k}}, \quad \lambda_n(1) = \sum_{k=0}^n \sqrt{\frac{1-a_k}{1+a_k}}.$$

Если $x = x_k$, то функция Лебега $L_n(x_k) = 1$. Поэтому предполагаем, что $x \neq x_k$, $k = 0, 1, \dots, n$ и пусть, например, $x \in [\alpha_n, 1]$, $\alpha_n < 1$. Тогда существует j такое, что $x_j < x < x_{j-1}$, $1 \leq j \leq n$, либо $x \in [-1, x_n) \cup (x_0, 1]$. Подчеркнем, что в этом случае функция $\lambda_n(x)$ будет возрастающей на промежутке $[x_{j-1}, 1]$, а на промежутке $[-1, x_{j-1}]$ – выпуклой вниз.

Функцию Лебега представим в виде

$$\begin{aligned} L_n(x) = \sum_{k=0}^{j-3} |l_k(x)| + |l_{j-2}(x)| + |l_{j-1}(x)| + |l_j(x)| + |l_{j+1}(x)| + \sum_{k=j+2}^n |l_k(x)| = S_1(x) + |l_{j-2}(x)| + \\ + |l_{j-1}(x)| + |l_j(x)| + |l_{j+1}(x)| + S_2(x). \end{aligned} \quad (4)$$

Если $x \in (x_0, 1]$ или $j = 1, 2$, то сумма $S_1(x)$ будет отсутствовать, если же $x \in [-1, x_n)$ или $j = n-1, n$, то будет отсутствовать сумма $S_2(x)$. Пусть, например, $2 < j < n-1$. Будем оценивать вначале сумму $S_1(x)$:

$$S_1(x) = \sum_{k=0}^{j-3} |l_k(x)|.$$

Легко видеть, что в этом случае

$$|l_k(x)| < \frac{\sqrt{1-x_k^2}}{(x_k - x)\lambda_n(x_k)}, \quad k = 0, 1, \dots, j-3.$$

Сделаем замену $x = \cos \theta$, $x_k = \cos \theta_k$, $k = 0, 1, \dots, n$. Тогда

$$|l_k(x)| < \frac{\sin \theta_k}{(\cos \theta_k - \cos \theta) \lambda_n(\cos \theta_k)}, \quad k = 0, 1, \dots, j-3.$$

Функция $\frac{\sin t}{\cos t - \cos \theta}$ возрастает при $t \in [0, \theta)$. Следовательно,

$$\frac{\sin \theta_k}{\cos \theta_k - \cos \theta} < \frac{1}{\theta_{k+1} - \theta_k} \int_{\theta_k}^{\theta_{k+1}} \frac{\sin t dt}{\cos t - \cos \theta}, \quad k = 0, 1, \dots, j-3$$

и

$$|l_k(x)| < \frac{(\theta_{k+1} - \theta_k)^{-1}}{\lambda_n(\cos \theta_k)} \int_{\theta_k}^{\theta_{k+1}} \frac{\sin t dt}{\cos t - \cos \theta}, \quad k = 0, 1, \dots, j-3. \quad (5)$$

Далее заметим, что

$$\begin{aligned} \mu_n(\cos \theta_{k+1}) - \mu_n(\cos \theta_k) &= \pi, \\ \theta_{k+1} - \theta_k &= \frac{\pi}{\lambda_n(\cos \theta_k^*)}, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\theta_k^* \in (\theta_k, \theta_{k+1}).$$

Из свойств функции $\lambda_n(x)$ следует, что

$$\lambda_n(\cos \theta_k^*) < \lambda_n(\cos \theta_k), \quad k = 0, 1, \dots, j-3,$$

и, следовательно,

$$\theta_{k+1} - \theta_k > \frac{\pi}{\lambda_n(\cos \theta_k)}.$$

Таким образом, из неравенств (5) имеем

$$|l_k(x)| < \frac{1}{\pi} \int_{\theta_k}^{\theta_{k+1}} \frac{\sin t dt}{\cos t - \cos \theta}, \quad k = 0, 1, \dots, j-3,$$

и

$$S_1(x) < \frac{1}{\pi} \int_{\theta_0}^{\theta_{j-2}} \frac{\sin t dt}{\cos t - \cos \theta} = \frac{1}{\pi} \ln \frac{\cos \theta_0 - \cos \theta}{\cos \theta_{j-2} - \cos \theta}.$$

Нетрудно проверить, что при $\theta \in (\theta_{j-1}, \theta_j)$

$$\begin{aligned} \cos \theta_0 - \cos \theta &< 1 - \cos \theta < 2, \\ \cos \theta_{j-2} - \cos \theta &> \cos \theta_{j-2} - \cos \theta_{j-1} = 2 \sin \frac{\theta_j - \theta_{j-1}}{2} \sin \frac{\theta_j + \theta_{j-1}}{2}. \end{aligned}$$

Из свойств функции $\lambda_n(x)$ и равенства (6) следует, что

$$\theta_j - \theta_{j-1} > \frac{\pi}{\lambda_n(1)},$$

и

$$\theta_j + \theta_{j-1} > \frac{\pi}{\lambda_n(1)}.$$

В итоге получаем, что

$$S_1(x) < \frac{2}{\pi} \ln \lambda_n(1). \quad (7)$$

Второе и третье слагаемые в сумме правой части (4) будем оценивать следующим образом. Например,

$$\begin{aligned} |l_{j-1}(x)| &= \left| \frac{\sqrt{1-x_{j-1}^2} (M_n(x) - M_n(x_{j-1}))}{(x_{j-1} - x) \lambda_n(x_{j-1})} \right| = \left| \frac{\sin \theta_{j-1} (M_n(\cos \theta) - M_n(\cos \theta_{j-1}))}{(\cos \theta_{j-1} - \cos \theta) \lambda_n(\cos \theta_{j-1})} \right| = \\ &= \left| \frac{\sin \theta_{j-1} \sin \mu_n(\cos \theta^*) \lambda_n(\cos \theta^*) (\theta - \theta_{j-1})}{2 \sin \frac{\theta + \theta_{j-1}}{2} \sin \frac{\theta - \theta_{j-1}}{2} \lambda_n(\cos \theta_{j-1})} \right|, \end{aligned}$$

где $\theta^* \in (\theta_{j-1}, \theta)$.

Далее имеем

$$\begin{aligned} \frac{\sin \theta_{j-1}}{2 \sin \frac{\theta + \theta_{j-1}}{2}} &\leq 1, \quad \sin \frac{\theta - \theta_{j-1}}{2} \geq \frac{1}{\pi} (\theta - \theta_{j-1}), \\ \lambda_n(\cos \theta^*) &< \lambda_n(\cos \theta_{j-1}). \end{aligned}$$

Следовательно, справедлива оценка

$$|l_{j-1}(x)| < \pi. \quad (8)$$

Аналогично получим, что

$$|l_{j-2}(x)| < \pi. \quad (9)$$

Теперь займемся оценкой суммы $S_2(x)$:

$$S_2(x) = \sum_{k=j+2}^n |l_k(x)|.$$

В этом случае будем иметь

$$|l_k(x)| < \frac{\sqrt{1-x_k^2}}{(x-x_k) \lambda_n(x_k)} = \frac{\sin \theta_k}{(\cos \theta - \cos \theta_k) \lambda_n(\cos \theta_k)}, \quad k = j+2, j+3, \dots, n.$$

Функция $\frac{\sin t}{\cos \theta - \cos t}$ будет убывающей при $\theta < t \leq \pi$. Следовательно,

$$\frac{\sin \theta_k}{\cos \theta - \cos \theta_k} < \frac{1}{\theta_k - \theta_{k-1}} \int_{\theta_{k-1}}^{\theta_k} \frac{\sin t dt}{\cos \theta - \cos t}, \quad k = j+2, j+3, \dots, n,$$

и

$$|l_k(x)| < \frac{(\theta_k - \theta_{k-1})^{-1}}{\lambda_n(\cos \theta_k)} \int_{\theta_{k-1}}^{\theta_k} \frac{\sin t dt}{\cos \theta - \cos t}, \quad k = j+2, j+3, \dots, n.$$

Ввиду равенства (6) и с учетом поведения функции $\lambda_n(x)$ на отрезке $[-1, x_{j-1}]$

$$\frac{(\theta_k - \theta_{k-1})^{-1}}{\lambda_n(\cos \theta_k)} < \frac{d_n}{\pi},$$

где

$$d_n = \max_{k=1,2,\dots,n} \left\{ \frac{\lambda_n(x_{k-1})}{\lambda_n(x_k)}, \frac{\lambda_n(x_k)}{\lambda_n(x_{k-1})} \right\}. \quad (10)$$

Заметим, что $d_n > 1$, $n > 1$. Тогда для суммы $S_2(x)$ будем иметь оценку

$$S_2(x) < \frac{d_n}{\pi} \int_{\theta_{j+1}}^{\theta_n} \frac{\sin t dt}{\cos \theta - \cos t}. \quad (11)$$

Поступая аналогично, как для первой суммы, получим

$$S_2(x) < d_n \frac{2}{\pi} \ln \lambda_n^*, \quad (12)$$

где $\lambda_n^* = \max \{\lambda_n(1), \lambda_n(-1)\}$.

Оценку слагаемых $|l_j(x)|$ и $|l_{j+1}(x)|$ будем производить следующим образом. По аналогии с оценкой $|l_{j-1}(x)|$ имеем:

$$|l_{j+1}(x)| \leq \pi d_n. \quad (13)$$

Для оценки $|l_j(x)|$ воспользуемся неравенством (3). Тогда, учитывая оценки (7)–(9) и (12), (13), найдем

$$|l_j(x)| < 1 + 2\pi + \frac{2}{\pi} \ln \lambda_n^* + \frac{2}{\pi} d_n \ln \lambda_n^* + \pi d_n.$$

Таким образом, на основании равенства (4) получим

$$L_n(x) < 1 + 2 \left(\pi(2 + d_n) + \frac{2}{\pi} (1 + d_n) \ln \lambda_n^* \right), \quad x \in (x_j, x_{j+1}), \quad (14)$$

и, следовательно,

$$L_n(x) < 1 + C d_n \ln \lambda_n^*, \quad x \in [\alpha_n, 1],$$

где C – некоторая положительная постоянная.

Если же $x \in [-1, \alpha_n]$, $\alpha_n > -1$, доказательство проводится аналогично и в этом случае справедлива следующая оценка

$$L_n(x) < 1 + C d_n \ln \lambda_n^*, \quad x \in [-1, \alpha_n],$$

что завершает доказательство теоремы.

Заключение. В работе получена оценка константы Лебега для случая интерполяционных рациональных процессов Лагранжа по узлам Чебышева – Маркова в случае действительных плюсов.

Стоит отметить, что скорее всего окончательная оценка постоянной Лебега не должна содержать величины d_n . Первоначально авторам казалось, что последовательность $\{d_n\}$ всегда ограничена. А. А. Пекарский привел интересный контрпример и показал, что такое утверждение не является справедливым.

Вычисления, выполненные с помощью программного пакета Maple 18, показывают, что для величины d_n справедливы следующие соотношения в зависимости от выбора параметров a_k , $k = 0, 1, \dots, n$ (см. таблицу).

Авторы выражают благодарность профессору А. А. Пекарскому за полезное обсуждение результатов данной работы.

Наборы значений величины d_n

n	d_n			
	$a_0 = 0, a_k = 1 - e^{\frac{-k}{\sqrt{n}}},$ $k = 1, 2, \dots, n$	$a_0 = 0, a_k = 1 - \left(\frac{k}{n}\right)^{1/2},$ $k = 1, 2, \dots, n$	$a_0 = 0, a_k = 1 - \frac{k}{n},$ $k = 1, 2, \dots, n$	$a_0 = 0, a_k = 1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2,$ $k = 1, 2, \dots, n$
1	1	1	1	1
2	1,596241482	1,103445257	1,216320419	1,484651283
3	1,597942669	1,128076509	1,238611723	1,543421758
4	1,515797795	1,130709366	1,254759388	1,504209600
5	1,465449967	1,120778009	1,231830691	1,470669166
6	1,430556413	1,114572460	1,213840925	1,418977094
7	1,394340811	1,104012575	1,195624043	1,372180433
8	1,362751766	1,097940438	1,178123644	1,333749017
9	1,343203175	1,090082953	1,164789034	1,302702270
10	1,324090571	1,084588746	1,151260736	1,277464535
20	1,217030255	1,049079572	1,084832927	1,162974196
30	1,172079117	1,034420604	1,058487668	1,124141808
40	1,146562242	1,026447463	1,044585078	1,104697222
50	1,129807134	1,021459162	1,036013178	1,092894531

Список использованной литературы

1. Привалов, А. А. Теория интерполирования функций: в 2 кн. / А. А. Привалов. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1990. – Кн. 1. – 1990. – С. 1–229; кн. 2. – 1990. – С. 231–422.
2. Бернштейн, С. Н. Об ограничении значений многочлена $P_n(x)$ степени n на всем отрезке по его значениям в $n + 1$ точках отрезка / С. Н. Бернштейн // Собр. соч.: в 4 т. – М., 1952. – Т. 2. – С. 107–126.
3. Иванов, В. В. Некоторые новые результаты в теории аппроксимации / В. В. Иванов // Вычислительная математика. Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1966. – С. 30–36.
4. Dzjadyk, V. K. On asymptotics and estimates for the uniform norms of the Lagrange interpolation polynomials corresponding to the Chebyshev nodal points / V. K. Dzjadyk, V. V. Ivanov // Anal. Math. – 1983. – Vol. 9. – P. 85–97.
5. Cheney, E. W. A note on some Lebesgue constants / E. W. Cheney, T. J. Rivlin // Center for numerical analysis (University of Texas at Austin), February 1975, CAN-98. – P. 1–7.
6. Русак, В. Н. Об интерполировании рациональными функциями с фиксированными полюсами / В. Н. Русак // Докл. Акад. наук БССР. – 1962. – Т. 4, № 9. – С. 548–550.
7. Borwein, P. Zeros of Chebyshev polynomials in Markov systems / P. Borwein // J. Approx. Theory. – 1990. – Vol. 63. – P. 56–64.
8. Min, G. Lobatto-type quadrature formula in rational space / G. Min // J. Comput. and Appl. Math. – 1998. – N 94. – P. 1–12.
9. Старовойтов, А. П. О рациональной интерполяции с фиксированными полюсами / А. П. Старовойтов // Изв. Акад. наук БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1983. – № 6. – С. 105–106.
10. Лукашов, А. Л. Рациональные интерполяционные процессы на нескольких отрезках / А. Л. Лукашов // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2005. – Т. 5 (1). – С. 34–48.
11. Ровба, Е. А. Рациональное интерполирование в нулях синус-дробей Чебышева – Маркова / Е. А. Ровба, К. А. Смотрицкий // Докл. Нац. акад. Беларуси. – 2008. – Т. 52, № 5. – С. 11–15.
12. Смотрицкий, К. А. О нормах интерполяционных процессов с фиксированными узлами / К. А. Смотрицкий, Е. В. Дирвук // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2014. – Т. 14, вып. 4 (2). – С. 590–595.

Поступила в редакцию 18.09.2015