УДК 519.6

В. Б. МАЛЮТИН

ВЫЧИСЛЕНИЕ МАТРИЧНОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛОВ, ОСНОВАННОЕ НА АППРОКСИМАЦИИ ХРОНОЛОГИЧЕСКИ УПОРЯДОЧЕННОЙ ЭКСПОНЕНТЫ

Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь,
e-mail:malyutin@im.bas-net.by

Предложен метод приближенного вычисления матричнозначных функциональных интегралов при малых значениях параметра *b*, входящего в дифференциальное уравнение для переходной функции. Этот метод основывается на аппроксимации хронологически упорядоченной экспоненты обычными экспонентами.

Ключевые слова: функциональные интегралы, хронологически упорядоченная экспонента.

V. B. MALYUTIN

EVALUATION OF MATRIX VALUED FUNCTIONAL INTEGRALS BASED ON THE APPROXIMATION OF A CHRONOLOGICALLY ORDERED EXPONENT

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus,
e-mail:malyutin@im.bas-net.by

The method for approximate evaluation of matrix valued functional integrals with a small parameter *b* in the differential equation for the transition function is proposed. This method is based on the approximation of a chronologically ordered exponent by usual exponents.

Keywords: functional integrals, chronologically ordered exponent.

Введение. Матричнозначные функциональные интегралы представляют собой один из видов функциональных интегралов. В матричнозначных интегралах интегрирование производится по обычным вещественным переменным, а переходные функции, определяющие меру, принимают матричные значения. Через матричнозначные функциональные интегралы выражаются фундаментальные решения систем дифференциальных уравнений [1, 2]. Матричнозначные интегралы возникают, например, при рассмотрении релятивистских частиц с целым и полуцелым спином [3, 4]. Использование матричнозначных интегралов для представления фундаментального решения задачи Коши для уравнения Дирака, описывающего движение заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле, рассмотрено в работах [5, 6].

Следуя работам [5, 6], матричнозначный функциональный интеграл будем рассматривать на пространстве функций $x(\tau)$, $s \le \tau \le t$, удовлетворяющих условию $x(s) = 0$ и условию Липшица с порядком, равным единице, т. е. для любых $s \le a < b \le t$, $|x(b) - x(a)| \le M|b - a|$. Интеграл определяется равенством

$$\int \mathrm{F}(\mathrm{x}(\bullet))\mathrm{d}\,\mu(\mathrm{x}) = \lim_{\max\limits_j \Delta t_j \to 0} \int_R (n) \int_R F\left(\sum_{j=1}^n x_j \chi_{]t_{j-1},t_j]}(\cdot)\right) \prod_{j=n}^1 S(t_j - t_{j-1}, x_j - x_{j-1}) dx_1 \ldots dx_n, \tag{1}$$

если этот предел существует для любого разбиения отрезка $[s,t]$ точками $s = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t$.

Здесь $x_j = x(t_j)$, $\chi_{]t_{j-1},t_j]}(\tau)$ – характеристическая функция интервала $]t_{j-1},t_j]$; $S(t_j - t_{j-1}, x_j - x_{j-1})$ – переходная функция, являющаяся фундаментальным решением уравнения

$$\frac{\partial S(t,x)}{\partial t} = a\alpha \frac{\partial S(t,x)}{\partial x} + b\beta S(t,x), \tag{2}$$

где a, b – вещественные параметры, α, β – антикоммутирующие величины (операторы или матрицы), т. е. $\alpha\beta + \beta\alpha = 0$.

Некоторые классы матричнозначных интегралов, которые могут быть вычислены точно, рассмотрены в работах [7, 8]. Один из методов вычисления матричнозначных функциональных интегралов – это аппроксимация матричнозначных интегралов скалярнозначными функциональными интегралами [9–11]. Широкое и детальное исследование методов вычисления скалярнозначных функциональных интегралов проведено в работах [12–14]. Еще один метод – это построение приближенных формул, точных для функциональных многочленов заданной степени [15]. Такие формулы называются формулами заданной степени точности и широко используются для приближенного вычисления скалярнозначных функциональных интегралов. В работах [16, 17] рассмотрен метод приближенного вычисления матричнозначных функциональных интегралов при малых значениях параметра a и больших значениях параметра b, который основан на аппроксимации интегрируемого функционала функциональными многочленами.

В данной работе предлагается метод приближенного вычисления матричнозначных функциональных интегралов при малых значениях параметра b, который основывается на аппроксимации хронологически упорядоченной экспоненты обычными экспонентами.

1. Аппроксимация матричнозначного функционального интеграла. Метод приближенного вычисления матричнозначных функциональных интегралов рассмотрим для цилиндрических функционалов, т. е. функционалов вида

$$F\left(\int_s^t f_1(\tau)dx(\tau),\ldots,\int_s^t f_d(\tau)dx(\tau)\right). \tag{3}$$

Т е о р е м а. *Пусть функции* $f_j(\tau)$, $1 \le j \le d$, *интегрируемы в смысле Римана, пусть* $\int \left|\hat{F}(z_1,\ldots,z_d)\right| \exp\left((t-s)\,|a|\cdot\|\alpha\| \sum_{l=1}^{d} \overline{f}_l\,|z_l|\right) dz_1\ldots dz_d \le C$, *где* $\hat{F}$ *обозначает обратное преобразование Фурье функции F,* $\overline{f}_l = \max_{s\le\tau\le t} |f_l(\tau)|$, $1 \le l \le d$. *Тогда для матричнозначного интеграла справедливо равенство*

$$\int \mathrm{F}\left(\int_s^t f_1(\tau)dx(\tau),\ldots,\int_s^t f_d(\tau)dx(\tau)\right) \mathrm{d}\,\mu(\mathrm{x}) \ =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \int_s^{\tau_0}\int_s^{\tau_1}\ldots\int_s^{\tau_{k-1}} F\left(-a\alpha\int_s^t \xi_{\tau_1,\ldots,\tau_k}(\tau) f_1(\tau)d\tau,\ldots,-a\alpha\int_s^t \xi_{\tau_1,\ldots,\tau_k}(\tau) f_d(\tau)d\tau\right)(b\beta)^k d\tau_k\ldots d\tau_2 d\tau_1 + \overline{R}_m, \tag{4}$$

где $\xi_{\tau_1,\ldots,\tau_k}(\tau) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \chi_{]\tau_{j+1},\tau_j]}(\tau)$, $\tau_0 = t$, $\tau_{k+1} = s$, $\lim_{m\to\infty} \|\overline{R}_m\| = 0$.

Доказательство. Если функции $f_j(\tau)$, $1 \le j \le d$, интегрируемы в смысле Римана, а функция $x(\tau)$, $s \le \tau \le t$, удовлетворяет условию Липшица с порядком, равным единице, то интегралы $\int_s^t f_j(\tau)dx(\tau)$, $1 \le j \le d$, существуют [18].

По определению матричнозначного интеграла имеем

$$I = \int F\left(\int_s^t f_1(\tau)dx(\tau),\ldots,\int_s^t f_d(\tau)dx(\tau)\right) d\ \mu(x) \ =$$

$$= \lim_{\substack{\max_j \Delta t_j \to 0}} \int_R^{(n)} \int_R \dots F\left(\sum_{j=1}^n f_1(t_j)(x_j - x_{j-1}),\dots,\ \sum_{j=1}^n f_d(t_j)(x_j - x_{j-1}) \right) \prod_{j=n}^1 S(t_j - t_{j-1}, x_j - x_{j-1}) dx_1 \dots dx_n .$$

Используя замену переменных $x_j - x_{j-1} = y_j$ и то, что преобразование Фурье функции $S(t_j - t_{j-1}, y_j)$ равно $\exp((t_j - t_{j-1})(-ia\alpha z_j + b\beta))$, получим

$$I = \lim_{\substack{\max_j \Delta t_j \to 0}} \int_R^{(n)} \int_R \dots F\left(\sum_{j=1}^n f_1(t_j) y_j,\dots,\ \sum_{j=1}^n f_d(t_j) y_j \right) \prod_{j=n}^1 S(t_j - t_{j-1}, y_j) dy_1 \dots dy_n =$$

$$= \lim_{\substack{\max_j \Delta t_j \to 0}} \int_R^{(d)} \int_R \dots \hat{F}(z_1,\dots,\ z_d) \prod_{j=n}^1 \exp\left((t_j - t_{j-1}) \left(-ia\alpha \sum_{l=1}^d f_l(t_j) z_l + b\beta \right) \right) dz_1 \dots dz_d . \qquad (5)$$

Здесь $\hat{F}$ обозначает обратное преобразование Фурье функции F.

Используя хронологически упорядоченную экспоненту [19–21], определяемую равенством

$$\overleftarrow{T} \exp\left(\int_s^t f(\alpha,\beta,\tau) d\tau \right) = \lim_{n\to\infty} \prod_{j=n}^1 \exp\left(\int_{\frac{t-s}{n}(j-1)}^{\frac{t-s}{n} j} f(\alpha,\beta,\tau) d\tau \right),$$

мы можем записать

$$\prod_{j=n}^1 \exp\left((t_j - t_{j-1}) \left(-ia\alpha \sum_{l=1}^d f_l(t_j) z_l + b\beta \right) \right)$$

в виде

$$\overleftarrow{T} \exp\left(\int_s^t \sum_{j=1}^n \left(-ia\alpha \sum_{l=1}^d f_l(t_j) z_l + b\beta \right) \chi_{]t_{j-1},t_j]}(\tau) d\tau \right).$$

Рассмотрим равенство, позволяющее перейти от хронологически упорядоченной экспоненты к обычной экспоненте:

$$\overleftarrow{T} \exp\left(\int_s^t \sum_{j=1}^n \left(-ia\alpha \sum_{l=1}^d f_l(t_j) z_l + b\beta \right) \chi_{]t_{j-1},t_j]}(\tau) d\tau \right) = \exp\left(\int_s^t \sum_{j=1}^n \left(-ia\alpha \sum_{l=1}^d f_l(t_j) z_l \right) \chi_{]t_{j-1},t_j]}(\tau) d\tau \right) +$$

$$+ \int_s^t \frac{d}{d\tau_1} \left[\exp\left(\int_{\tau_1}^t \sum_{j=1}^n \left(-ia\alpha \sum_{l=1}^d f_l(t_j) z_l \right) \chi_{]t_{j-1},t_j]}(\tau) d\tau \right) \overleftarrow{T} \exp\left(\int_s^{\tau_1} \sum_{j=1}^n \left(-ia\alpha \sum_{l=1}^d f_l(t_j) z_l + b\beta \right) \chi_{]t_{j-1},t_j]}(\tau) d\tau \right) \right] d\tau_1 =$$

$$= \exp\left(\int_s^t \sum_{j=1}^n \left(-ia\alpha \sum_{l=1}^d f_l(t_j) z_l \right) \chi_{]t_{j-1},t_j]}(\tau) d\tau \right) + \int_s^t \left[\exp\left(\int_{\tau_1}^t \sum_{j=1}^n \left(-ia\alpha \sum_{l=1}^d f_l(t_j) z_l \right) \chi_{]t_{j-1},t_j]}(\tau) d\tau \right) \times \right.$$

$$\left. \times b\beta \overleftarrow{T} \exp\left(\int_s^{\tau_1} \sum_{j=1}^n \left(-ia\alpha \sum_{l=1}^d f_l(t_j) z_l + b\beta \right) \chi_{]t_{j-1},t_j]}(\tau) d\tau \right) \right] d\tau_1.$$

Применяя последовательно это равенство для хронологически упорядоченной экспоненты, получим

$$\overleftarrow{T} \exp\left(\int_s^t \sum_{j=1}^n \left(-ia\alpha \sum_{l=1}^d f_l(t_j) z_l + b\beta \right) \chi_{]t_{j-1},t_j]}(\tau) d\tau \right) =$$

$$= \sum_{k=0}^m \int_s^{\tau_0} \int_s^{\tau_1} \dots \int_s^{\tau_{k-1}} \exp\left(\int_{\tau_1}^{\tau_0} \sum_{j=1}^n \left(-ia\alpha \sum_{l=1}^d f_l(t_j) z_l \right) \chi_{]t_{j-1},t_j]}(\tau) d\tau \right) \times$$

$$\times b\beta \exp\left(\int_{\tau_2}^{\tau_1} \sum_{j=1}^n \left(-ia\alpha \sum_{l=1}^d f_l(t_j) z_l \right) \chi_{]t_{j-1},t_j]}(\tau) d\tau \right) \times \dots \times$$

$$\times b\beta \exp\left(\int_{\tau_{k+1}}^{\tau_k} \sum_{j=1}^{n}\left(-ia\alpha\sum_{l=1}^{d} f_l(t_j)z_l\right)\chi_{]t_{j-1},t_j]}(\tau)d\tau\right)d\tau_k...d\tau_2 d\tau_1 + R_m, \tag{6}$$

где $\tau_0 = t,\ \tau_{k+1} = s,$

$$R_m = \int_s^{\tau_0}\int_s^{\tau_1}...\int_s^{\tau_m} \exp\left(\int_{\tau_1}^{\tau_0} \sum_{j=1}^{n}\left(-ia\alpha\sum_{l=1}^{d} f_l(t_j)z_l\right)\chi_{]t_{j-1},t_j]}(\tau)d\tau\right)\times$$

$$\times b\beta \exp\left(\int_{\tau_2}^{\tau_1} \sum_{j=1}^{n}\left(-ia\alpha\sum_{l=1}^{d} f_l(t_j)z_l\right)\chi_{]t_{j-1},t_j]}(\tau)d\tau\right)\times...\times$$

$$\times b\beta \overleftarrow{T}\exp\left(\int_{\tau_{m+2}}^{\tau_{m+1}} \sum_{j=1}^{n}\left(-ia\alpha\sum_{l=1}^{d} f_l(t_j)z_l + b\beta\right)\chi_{]t_{j-1},t_j]}(\tau)d\tau\right)d\tau_{m+1}...\ d\tau_2 d\tau_1,$$

где $\tau_{m+2} = s.$

Из (5), (6) получаем

$$I = \lim_{\max_j \Delta t_j \to 0}\sum_{k=0}^{m}\int_s^{\tau_0}\int_s^{\tau_1}...\int_s^{\tau_{k-1}}\int_R (d)\int_R \hat{F}(z_1,...,\ z_d)\exp\left(\int_{\tau_1}^{\tau_0} \sum_{j=1}^{n}\left(-ia\alpha\sum_{l=1}^{d} f_l(t_j)z_l\right)\chi_{]t_{j-1},t_j]}(\tau)d\tau\right)\times$$

$$\times b\beta \exp\left(\int_{\tau_2}^{\tau_1} \sum_{j=1}^{n}\left(-ia\alpha\sum_{l=1}^{d} f_l(t_j)z_l\right)\chi_{]t_{j-1},t_j]}(\tau)d\tau\right)\times...\times$$

$$\times b\beta \exp\left(\int_{\tau_{k+1}}^{\tau_k} \sum_{j=1}^{n}\left(-ia\alpha\sum_{l=1}^{d} f_l(t_j)z_l\right)\chi_{]t_{j-1},t_j]}(\tau)d\tau\right)dz_1...\ dz_d d\tau_k...\ d\tau_2 d\tau_1 + \overline{R}_m, \tag{7}$$

где

$$\overline{R}_m = \lim_{\max_j \Delta t_j \to 0}\int_s^{\tau_0}\int_s^{\tau_1}...\int_s^{\tau_m}\int_R (d)\int_R \hat{F}(z_1,...,\ z_d)\exp\left(\int_{\tau_1}^{\tau_0} \sum_{j=1}^{n}\left(-ia\alpha\sum_{l=1}^{d} f_l(t_j)z_l\right)\chi_{]t_{j-1},t_j]}(\tau)d\tau\right)\times$$

$$\times b\beta \exp\left(\int_{\tau_2}^{\tau_1} \sum_{j=1}^{n}\left(-ia\alpha\sum_{l=1}^{d} f_l(t_j)z_l\right)\chi_{]t_{j-1},t_j]}(\tau)d\tau\right)\times...\times$$

$$\times b\beta \overleftarrow{T}\exp\left(\int_{\tau_{m+2}}^{\tau_{m+1}} \sum_{j=1}^{n}\left(-ia\alpha\sum_{l=1}^{d} f_l(t_j)z_l + b\beta\right)\chi_{]t_{j-1},t_j]}(\tau)d\tau\right)dz_1...\ dz_d d\tau_{m+1}...\ d\tau_2 d\tau_1.$$

В (7), используя соотношения антикоммутации для $\alpha,\ \beta$, расположим $b\beta$ справа от экспонент, содержащих $a\alpha$. Получим

$$I = \lim_{\max_j \Delta t_j \to 0}\sum_{k=0}^{m}\int_s^{\tau_0}\int_s^{\tau_1}...\int_s^{\tau_{k-1}}\int_R (d)\int_R \hat{F}(z_1,...,\ z_d)\times$$

$$\times\exp\left(\int_s^t \xi_{\tau_1,...,\tau_k}(\tau)\sum_{j=1}^{n}\left(-ia\alpha\sum_{l=1}^{d} f_l(t_j)z_l\right)\chi_{]t_{j-1},t_j]}(\tau)d\tau\right)(b\beta)^k dz_1...\ dz_d d\tau_k...\ d\tau_2 d\tau_1 + \overline{R}_m,$$

где $\xi_{\tau_1,...,\tau_k}(\tau) = \sum_{j=0}^{k}(-1)^j\chi_{]\tau_{j+1},\tau_j]}(\tau),\ \tau_0 = t,\ \tau_{k+1} = s.$

Под знаком предела $\lim\limits_{\max_j \Delta t_j \to 0}$ интеграл $\int_s^t \xi_{\tau_1,...,\tau_k}(\tau)\sum_{j=1}^{n}\left(-ia\alpha\sum_{l=1}^{d} f_l(t_j)z_l\right)\chi_{]t_{j-1},t_j]}(\tau)d\tau$ можно записать в виде $\sum_{j=1}^{n}\xi_{\tau_1,...,\tau_k}(t_j)\left(-ia\alpha\sum_{l=1}^{d} f_l(t_j)z_l\right)(t_j - t_{j-1}).$

После вычисления интегралов по $dz_1...dz_d$ выражение для I примет вид

$$I=\lim_{\substack{\max_j \Delta t_j\to 0}}\sum_{k=0}^{m}\int_s^{\tau_0}\int_s^{\tau_1}\ldots\int_s^{\tau_{k-1}}F\left(\sum_{j=1}^{n}\xi_{\tau_1,\ldots,\tau_k}(t_j)(-a\alpha)f_1(t_j)(t_j-t_{j-1}),\ldots,\sum_{j=1}^{n}\xi_{\tau_1,\ldots,\tau_k}(t_j)(-a\alpha)f_d(t_j)(t_j-t_{j-1})\right)\times$$
$$\times(b\beta)^k d\tau_k\ldots d\tau_2 d\tau_1+\overline{R}_m.$$

Вычисляя предел, получаем следующее равенство для I:

$$I=\sum_{k=0}^{m}\int_s^{\tau_0}\int_s^{\tau_1}\ldots\int_s^{\tau_{k-1}}F\left(-a\alpha\int_s^t\xi_{\tau_1,\ldots,\tau_k}(\tau)f_1(\tau)d\tau,\ldots,-a\alpha\int_s^t\xi_{\tau_1,\ldots,\tau_k}(\tau)f_d(\tau)d\tau\right)(b\beta)^k d\tau_k\ldots d\tau_2 d\tau_1+\overline{R}_m,$$

т. е. равенство (4) верно.

Норму остатка $\overline{R}_m$ можно оценить величиной

$$\|\overline{R}_m\|\le\int_s^{\tau_0}\int_s^{\tau_1}\ldots\int_s^{\tau_m}\int_R(d)\int_R\ldots\,|\hat{F}(z_1,\ldots,z_d)|\exp\left((t-s)|a|\cdot\|\alpha\|\sum_{l=1}^{d}|\overline{f}_l|\,|z_l|\right)|b|^{m+1}\cdot\|\beta\|^{m+1}\times$$
$$\times\exp((t-s)|b|\cdot\|\beta\|)dz_1\ldots dz_d d\tau_{m+1}\ldots d\tau_2 d\tau_1\le$$
$$\le\int_s^{\tau_0}\int_s^{\tau_1}\ldots\int_s^{\tau_m}C|b|^{m+1}\cdot\|\beta\|^{m+1}\exp\big((t-s)|b|\cdot\|\beta\|\big)d\tau_{m+1}\ldots d\tau_2 d\tau_1\le$$
$$\le C|b|^{m+1}\cdot\|\beta\|^{m+1}\exp\big((t-s)|b|\cdot\|\beta\|\big)\frac{(t-s)^{m+1}}{(m+1)!}.$$

То есть $\lim_{m\to\infty}\|\overline{R}_m\|=0.$ Теорема доказана.

2. Численные результаты. В качестве примера рассмотрим вычисление интеграла

$$I(t)=\int\exp\left(\int_s^t f(\tau)dx(\tau)\right)\mathrm{d}\,\mu(\mathrm{x}). \qquad (8)$$

Для этого интеграла при некоторых функциях f можно получить точное значение, так как интеграл $I(t)$ равен $\overline{T}\exp\left(\int_s^t(-a\alpha f\ \ (\tau)+b\beta)d\tau\right)$ и удовлетворяет уравнению

$$\frac{dI(t)}{dt}=\big(-a\alpha f(\tau)+b\beta\big)I(t),\quad I(s)=E. \qquad (9)$$

При $\alpha=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $f(\tau)=-\frac{1}{a\tau}$ решение уравнения (9) имеет вид

$$I_{11}(t)=\frac{bs+1}{2bs}\exp\{b(t-s)\}+\frac{bs-1}{2bs}\exp\{-b(t-s)\},$$
$$I_{21}(t)=\frac{b^2st+b(t-s)-1}{2b^2st}\exp\{b(t-s)\}+\frac{-b^2st+b(t-s)+1}{2b^2st}\exp\{-b(t-s)\},$$
$$I_{12}(t)=\frac{1}{2}\exp\{b(t-s)\}-\frac{1}{2}\exp\{-b(t-s)\},$$
$$I_{22}(t)=\frac{bt-1}{2bt}\exp\{b(t-s)\}+\frac{bt+1}{2bt}\exp\{-b(t-s)\}.$$

Рассмотрим приближенное вычисление интеграла (8) с помощью формулы (4). При $m=2$ получим

$$I(t)\approx\exp\left(-a\alpha\int_s^t f(\tau)d\tau\right)+\int_{\mathrm{s}}^{\mathrm{t}}\exp\left(-a\alpha\left(\int_s^{\tau_1}(-1)f(\tau)d\tau+\int_{\tau_1}^{t}f(\tau)d\tau\right)\right)d\tau_1 b\beta+$$
$$+\int_{\mathrm{s}}^{\mathrm{t}}\int_s^{\tau_1}\exp\left(-a\alpha\left(\int_s^{\tau_2}f(\tau)d\tau+\int_{\tau_2}^{\tau_1}(-1)f(\tau)d\tau+\int_{\tau_1}^{t}f(\tau)d\tau\right)\right)d\tau_2 d\tau_1(b\beta)^2.$$

При $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $f(\tau) = -\dfrac{1}{a\tau}$ получаем:

$$I(t) \approx \exp\left(\alpha \ln\left(\frac{t}{s}\right)\right) + \int\limits_{s}^{t} \exp\left(\alpha \ln\left(\frac{st}{\tau_1^2}\right)\right) d\tau_1 b\beta + \int\limits_{s}^{t}\int\limits_{s}^{\tau_1} \exp\left(\alpha \ln\left(\frac{t\tau_2^2}{s\tau_1^2}\right)\right) d\tau_2 d\tau_1 (b\beta)^2 =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{t}{s} & 0 \\ 0 & \dfrac{s}{t} \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & t-s \\ \dfrac{t^2}{3s} - \dfrac{s^2}{3t} & 0 \end{pmatrix} + b^2 \begin{pmatrix} \dfrac{t^3}{6s} - \dfrac{ts}{2} + \dfrac{s^2}{3} & 0 \\ 0 & \dfrac{t^2}{3} + \dfrac{s^3}{6t} - \dfrac{st}{2} \end{pmatrix}.$$

При $s = 1,\ t = 2,\ b = 0{,}1$ приближенное значение интеграла $I(t)$ равно $\begin{pmatrix} 2{,}00666 & 0{,}1 \\ 0{,}11666 & 0{,}50416 \end{pmatrix}$, точное значение равно $\begin{pmatrix} 2{,}00670 & 0{,}10017 \\ 0{,}11667 & 0{,}50415 \end{pmatrix}$.

Список использованной литературы

1. *Далецкий, Ю. Л.* Континуальные интегралы, связанные с операторными эволюционными уравнениями / Ю. Л. Далецкий // Успехи мат. наук. – 1962. – Т. 17, № 5 (107). – С. 3–115.

2. *Далецкий, Ю. Л.* Обобщенные меры в функциональных пространствах / Ю. Л. Далецкий, С. В. Фомин // Теория вероятностей и ее применения. – 1965. – Т. 10, № 2. – С. 329–343.

3. *Давыдов, А. С.* Квантовая механика / А. С. Давыдов. – М.: Наука, 1973.

4. *Шифф, Л.* Квантовая механика / Л. Шифф; пер. с англ. Г. А. Зайцева. – М.: Изд-во иностр. лит., 1959.

5. *Ichinose, T.* Propagation of a Dirac particle. A path integral approach / T. Ichinose, H. Tamura // J. Math. Phys. – 1984. – Vol. 25 (6). – P. 1810–1819.

6. *Ichinose, T.* The zitterbewegung of a Dirac particle in two-dimensional space-time / T. Ichinose, H. Tamura // J. Math. Phys. – 1988. – Vol. 29 (1). – P. 103–109.

7. *Малютин, В. Б.* О вычислении некоторых матричнозначных функциональных интегралов / В. Б. Малютин // Тр. Ин-та математики Нац. акад. наук Беларуси. – 2011. – Т. 19, № 1. – С. 92–103.

8. *Малютин, В. Б.* Вычисление функциональных интегралов, порожденных уравнением Дирака со скалярными и векторными потенциалами специального вида / В. Б. Малютин // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2013. – № 3. – С. 13–16.

9. *Малютин, В. Б.* О приближенном вычислении континуальных интегралов по мере, порожденной системой дифференциальных уравнений параболического типа / В. Б. Малютин // Докл. Аакад. наук Беларуси. – 1991. – Т. 35, № 3. – С. 202–208.

10. *Малютин, В. Б.* О вычислении континуальных интегралов по матричнозначной мере / В. Б. Малютин // Вес. Акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 1993. – № 1. – С. 8–14.

11. *Малютин, В. Б.* Аппроксимации континуальных интегралов по мере, порожденной системой дифференциальных уравнений // Вес. Акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 1992. – № 5/6. – С. 7–13.

12. *Егоров, А. Д.* Приближенные методы вычисления континуальных интегралов / А. Д. Егоров, П. И. Соболевский, Л. А. Янович. – Минск: Наука и техника, 1985.

13. *Egorov, A. D.* Functional integrals: Approximate evaluation and Applications / A. D. Egorov, P. I. Sobolevsky, L. A. Yanovich. – Dordrecht: Kluwer Academic Pablishers, 1993.

14. *Егоров, А. Д.* Введение в теорию и приложения функционального интегрирования / А. Д. Егоров, Е. П. Жидков, Ю. Ю. Лобанов. – М.: Физматлит, 2006.

15. *Malyutin, V.* On approximation of matrix valued functional integrals / V. Malyutin // Monte Carlo methods and applications. – 2007. – Vol. 13, N 4. – P. 287–298.

16. *Айрян, Э. А.* Вычисление матричнозначных функциональных интегралов с помощью функциональных многочленов / Э. А. Айрян, В. Б. Малютин // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2014. – № 1. – С. 18–25.

17. *Ayryan, E. A.* Application of functional polynomials to approximation of matrix-valued functional integrals / E. A. Ayryan, V. B. Malyutin // Bull. of Peoples' Friendship University of Russia. Ser. Mathematics. Informatics. Physics. – 2014. – N 1. – P. 55–58.

18. *Фихтенгольц, Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т / Г. М. Фихтенгольц. – М.: Физматлит, 2003. – Т. 3.

19. *Боголюбов, Н. Н.* Введение в теорию квантованных полей / Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков. – М., 1976.

20. *Карасев, М. В.* Бесконечные произведения и Т-произведения экспонент / М. В. Карасев, М. В. Мосолова // Теор. и мат. физика. – 1976. – Т. 28, вып. 2. – С. 189–200.

21. *Назайкинский, В.* Методы некоммутативного анализа: авт. пер. с англ. / В. Назайкинский, Б. Стернин, В. Шаталов. – М.: Техносфера, 2002.

Поступила в редакцию 15.10.2015