

УДК 512.548

А. М. ГАЛЬМАК

ЕДИНИЦЫ И ИХ АНАЛОГИ В n -АРНЫХ ГРУППАХ

Могилевский государственный университет продовольствия, Могилев, Беларусь,
e-mail: halm54@mail.ru

Основным результатом данной работы является теорема, утверждающая, что в универсальной обертывающей группе любой n -арной группы все классы эквивалентности Поста, определяемые m -нейтральными последовательностями, образуют $(k + 1)$ -арную группу, которая при $m = n$ изоморфна n -арной подгруппе всех единиц n -арной группы. Среди следствий этой теоремы находится известный результат, согласно которому в любой n -арной группе множество всех единиц, если оно не пусто, является характеристической n -арной подгруппой, лежащей в центре n -арной группы.

Ключевые слова: n -арная группа, единица, нейтральная последовательность.

A. M. GAL'MAK

IDENTITIES AND THEIR ANALOGUES IN n -ARY GROUPS

Mogilev State University of Food Technologies, Mogilev, Belarus,
e-mail: halm54@mail.ru

The main result of the article is the theorem stating that in the universal covering group of any n -ary group all classes of Post's equivalence determined as m -neutral sequences form the $(k + 1)$ -ary group that at $m = n$ is isomorphic to the n -ary subgroup of all identities of the n -ary group. Among the consequences of the theorem is a well-known result, according to which in any n -ary group the set of all the identities, if it is not empty, is a characteristic n -ary subgroup lying in the center of the n -ary group.

Keywords: n -ary group, identity, neutral sequence.

Введение. Известно [1, 2], что в любой n -арной группе множество всех единиц, если оно не пусто, является характеристической n -арной подгруппой, лежащей в центре n -арной группы. В бинарном случае ($n = 2$) – это тривиальное утверждение. Содержательным оно становится при $n > 2$, так как в этом случае в n -арной группе, в отличие от бинарного случая, может быть несколько единиц. Более того, существуют неоднородные n -арные группы, в которых все элементы являются единицами. Разнообразная информация о строении n -арной подгруппы всех единиц n -арной группы имеется в работах [3, 4]. В данной статье продолжается изучение полиадических аналогов единицы группы. В частности показано, что сформулированная выше теорема из [1, 2] может быть получена как следствие основного результата статьи.

1. Предварительные сведения. Информацию, приведенную в этом разделе, а также иную необходимую информацию об n -арных группах можно найти в работе [5].

Элемент e n -арной группы $\langle A, [] \rangle$ называется [6] *единицей* этой n -арной группы, если для любого $x \in A$ и любого $i = 1, 2, \dots, n$ верно

$$[\underbrace{xe \dots e}_{n-1}] = [\underbrace{exe \dots e}_{n-2}] = \dots = [\underbrace{e \dots exe}_{n-2}] = [\underbrace{e \dots ex}_{n-1}] = x.$$

З а м е ч а н и е 1. Можно показать, что для того чтобы элемент e n -арной группы $\langle A, [] \rangle$ являлся ее единицей, достаточно выполнения для любого $x \in A$ равенств

$$[\underbrace{xe \dots e}_{n-1}] = [\underbrace{exe \dots e}_{n-2}] = x.$$

Еще одним n -арным обобщением единицы группы является понятие нейтральной последовательности.

Согласно Э. Посту [7], последовательность $e_1 \dots e_{s(n-1)}$, где $s \geq 1$, элементов n -арной группы $\langle A, [] \rangle$ называется *нейтральной*, если

$$[e_1 \dots e_{s(n-1)}x] = [xe_1 \dots e_{s(n-1)}] = x$$

для любого $x \in A$.

З а м е ч а н и е 2. Можно показать, что для того чтобы последовательность $e_1 \dots e_{s(n-1)}$ являлась нейтральной в n -арной группе $\langle A, [] \rangle$, достаточно выполнения для любого $x \in A$ одного из следующих равенств

$$[e_1 \dots e_{s(n-1)}x] = x, [xe_1 \dots e_{s(n-1)}] = x.$$

Последовательность β элементов n -арной группы $\langle A, [] \rangle$ называется [7] *обратной* к последовательности α элементов этой же n -арной группы, если последовательности $\alpha\beta$ и $\beta\alpha$ являются нейтральными.

Пусть $\langle A, [] \rangle$ – n -арная группа, F_A – свободная полугруппа над алфавитом A , θ_A – отношение эквивалентности Поста [7], определенное на F_A по правилу $(\alpha, \beta) \in \theta_A$ тогда и только тогда, когда существуют последовательности γ и δ из F_A такие, что $[\gamma\alpha\delta] = [\gamma\beta\delta]$. Легко проверяется, что θ_A – конгруэнция на полугруппе F_A , а полугруппа $A^* = F_A / \theta_A$ является группой, которую называют универсальной обертывающей группой для n -арной группы $\langle A, [] \rangle$. Единицей этой n -арной группы является класс $\theta_A(\varepsilon)$, где ε – любая нейтральная последовательность, а обратным элементом для класса $\theta_A(\alpha)$ является класс $\theta_A(\beta)$, где β – любая обратная последовательность для последовательности α .

Далее для сокращения записей вместо символа θ_A будем использовать символ θ без нижнего индекса.

Для всякого $i = 1, \dots, n-1$ определим множество

$$A^{(i)} = \{\theta(\alpha) \in A^* \mid l(\alpha) = s(n-1) + i, s \geq 0\},$$

где $\theta(\alpha)$ – класс конгруэнции θ , содержащий последовательность α ; $l(\alpha)$ – длина последовательности α .

Ясно, что $A^{(i)} = \{\theta(\alpha) \in A^* \mid l(\alpha) = i\}$. В частности, $A' = \{\theta(a) \mid a \in A\}$.

Если зафиксировать элементы $a_1, \dots, a_{i-1} \in A$, то

$$A^{(i)} = \{\theta(aa_1 \dots a_{i-1}) \mid a \in A\} = \{\theta(a_1 \dots a_{i-1}a) \mid a \in A\}.$$

Для сокращения записей множество $A^{(n-1)}$ будем обозначать распространенным в литературе по n -арным группам символом A_0 , т. е. $A_0 = A^{(n-1)}$.

З а м е ч а н и е 3. Если $n = k(m-1) + 1$, где $n \geq 3, m \geq 2$, то легко проверяется, что множество $A^{(m-1)}$ является $(k+1)$ -арной группой относительно $(k+1)$ -арной операции

$$[\theta(\alpha_1)\theta(\alpha_2) \dots \theta(\alpha_{k+1})]_{k+1} = \theta(\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_{k+1}).$$

Если $m = 2$, то $k = n-1$ и получаем n -арную операцию

$$[\theta(a_1)\theta(a_2) \dots \theta(a_n)]_n = \theta(a_1a_2 \dots a_n) = \theta([a_1a_2 \dots a_n]), a_1, a_2, \dots, a_n \in A.$$

При этом, как несложно установить, отображение $\varphi: a \rightarrow \theta(a)$ является изоморфизмом n -арной группы $\langle A, [] \rangle$ на n -арную группу $\langle A', []_n \rangle$.

Если $m = n$, то $k = 1$, и получаем бинарную операцию

$$[\theta(a_1a_2 \dots a_{n-1})\theta(b_1b_2 \dots b_{n-1})]_2 = \theta(a_1a_2 \dots a_{n-1}b_1b_2 \dots b_{n-1}),$$

где $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, b_1, b_2, \dots, b_{n-1} \in A$.

2. Вспомогательные результаты. Понятия нейтральной последовательности и единицы n -арной группы можно объединить следующим определением из [3].

Определение 1. Если $n = k(m - 1) + 1$, $k \geq 1$, то последовательность

$$\alpha = e_1 \dots e_{t(n-1)+m-1}$$

элементов n -арной группы $\langle A, [] \rangle$, где $t \geq 0$, называется t -нейтральной, если для любого $x \in A$ и любого $j = 1, \dots, k + 1$ верно равенство

$$[\underbrace{\alpha \dots \alpha}_{j-1} x \underbrace{\alpha \dots \alpha}_{k-j+1}] = x.$$

Ясно, что n -нейтральные последовательности элементов n -арной группы – это в точности ее нейтральные последовательности. Понятно также, что в n -арной группе любая единица является 2-нейтральной последовательностью, а любая 2-нейтральная последовательность $e_1 \dots e_{t(n-1)+1}$ либо является ($t = 0$) единицей, либо отождествляется ($t \geq 1$) с единицей $[e_1 \dots e_{t(n-1)+1}]$.

Справедливость следующего критерия устанавливается простой проверкой.

Предложение 1. Если $\langle A, [] \rangle$ – n -арная группа, $n = k(m - 1) + 1$, то последовательность α ее элементов является t -нейтральной тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

1) для любого $x \in A$ последовательности αx и $x \alpha$ эквивалентны, что равносильно равенству $\theta(\alpha)\theta(x) = \theta(x)\theta(\alpha)$;

2) последовательность $\underbrace{\alpha \dots \alpha}_k$ является нейтральной.

Из предложения 1 вытекает

Следствие 1. Для любой t -нейтральной последовательности α n -арной группы $\langle A, [] \rangle$ и любой последовательности β элементов из A последовательности $\alpha\beta$ и $\beta\alpha$ эквивалентны, что равносильно равенству $\theta(\alpha)\theta(\beta) = \theta(\beta)\theta(\alpha)$.

Следствие 2. Если α – t -нейтральная последовательность n -арной группы $\langle A, [] \rangle$, γ – любая обратная для α последовательность, β – любая последовательность элементов из A , то последовательности $\gamma\beta$ и $\beta\gamma$ эквивалентны, что равносильно равенству $\theta(\gamma)\theta(\beta) = \theta(\beta)\theta(\gamma)$.

Доказательство. Пусть δ – любая обратная последовательность для последовательности β . По следствию 1 $\theta(\alpha)\theta(\delta) = \theta(\delta)\theta(\alpha)$, откуда, работая в группе A^* , последовательно получаем

$$(\theta(\alpha)\theta(\delta))^{-1} = (\theta(\delta)\theta(\alpha))^{-1}, (\theta(\delta))^{-1}(\theta(\alpha))^{-1} = (\theta(\alpha))^{-1}(\theta(\delta))^{-1}, \theta(\beta)\theta(\gamma) = \theta(\gamma)\theta(\beta).$$

Следствие доказано.

Лемма 1. Для любых t -нейтральных последовательностей $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k+1}$ n -арной группы $\langle A, [] \rangle$ последовательность $\alpha = \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_{k+1}$ также является t -нейтральной.

Доказательство. Пусть $l(\alpha_j) = t_j(n - 1) + m - 1$ – длина последовательности α_j , где $j = 1, \dots, k + 1$. Тогда $l(\alpha) = t(n - 1) + m - 1$ – длина последовательности α , где

$$t = (t_1 + \dots + t_{k+1} + 1)(n - 1) + m - 1.$$

Кроме того, для любого $x \in A$ и любого $j = 1, \dots, k + 1$, используя следствие 1 и определение t -нейтральной последовательности, получим

$$\begin{aligned} [\underbrace{\alpha \dots \alpha}_{j-1} x \underbrace{\alpha \dots \alpha}_{k-j+1}] &= [\underbrace{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{k+1} \dots \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{k+1}}_{j-1} x \underbrace{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{k+1} \dots \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{k+1}}_{k-j+1}] = \\ &= [\underbrace{\alpha_{k+1} \dots \alpha_{k+1}}_{j-1} \dots [\underbrace{\alpha_2 \dots \alpha_2}_{j-1} [\underbrace{\alpha_1 \dots \alpha_1}_{j-1} x \underbrace{\alpha_1 \dots \alpha_1}_{k-j+1}] \underbrace{\alpha_2 \dots \alpha_2}_{k-j+1}] \dots \underbrace{\alpha_{k+1} \dots \alpha_{k+1}}_{k-j+1}] = \\ &= [\underbrace{\alpha_{k+1} \dots \alpha_{k+1}}_{j-1} \dots [\underbrace{\alpha_2 \dots \alpha_2}_{j-1} x \underbrace{\alpha_2 \dots \alpha_2}_{k-j+1}] \dots \underbrace{\alpha_{k+1} \dots \alpha_{k+1}}_{k-j+1}] = \dots \\ &\dots = [\underbrace{\alpha_{k+1} \dots \alpha_{k+1}}_{j-1} x \underbrace{\alpha_{k+1} \dots \alpha_{k+1}}_{k-j+1}] = x, \end{aligned}$$

т. е. верно равенство из определения 1. Следовательно, α – m -нейтральная последовательность. Лемма доказана.

Л е м м а 2. Если α – m -нейтральная последовательность n -арной группы $\langle A, [] \rangle$, γ – любая обратная для нее последовательность, то для любого $x \in A$ и любого $j = 1, \dots, k + 1$ верно равенство

$$[\underbrace{\gamma \dots \gamma}_{j-1} x \underbrace{\gamma \dots \gamma}_{k-j+1}] = x.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как, согласно определению 1,

$$[\underbrace{\alpha \dots \alpha}_{j-1} x \underbrace{\alpha \dots \alpha}_{k-j+1}] = x,$$

то

$$[\underbrace{\gamma \dots \gamma}_{j-1} [\underbrace{\alpha \dots \alpha}_{j-1} x \underbrace{\alpha \dots \alpha}_{k-j+1}] \underbrace{\gamma \dots \gamma}_{k-j+1}] = [\underbrace{\gamma \dots \gamma}_{j-1} x \underbrace{\gamma \dots \gamma}_{k-j+1}],$$

откуда, используя взаимную обратность последовательностей α и γ , получаем доказываемое равенство. Лемма доказана.

Обозначим через $\mathbf{N}(A, m)$ множество всех m -нейтральных последовательностей n -арной группы $\langle A, [] \rangle$.

В $(k + 1)$ -арной группе $\langle A^{(m-1)}, [] \rangle$ выделим подмножество

$$\mathbf{N}(A^{(m-1)}) = \{\theta(\alpha) \mid \alpha \in \mathbf{N}(A, m)\}.$$

Ясно, что $\mathbf{N}(A') = \mathbf{E}(A')$.

Так как в любой n -арной группе существуют нейтральные последовательности, то множество $\mathbf{N}(A_0)$ не пусто, а так как любые две нейтральные последовательности эквивалентны в смысле Поста, то множество $\mathbf{N}(A_0)$ состоит из единственного класса $\theta(\alpha)$, определяемого любой нейтральной последовательностью α , который является единицей универсальной обертывающей группы A^* , т. е. в этом случае $\mathbf{N}(A_0) = \mathbf{E}(A_0)$.

Так как для любого элемента $\theta(\alpha)$ непустого множества $\mathbf{N}(A^{(m-1)})$ в качестве последовательности α можно выбрать последовательность длины $m - 1$, то

$$\mathbf{N}(A^{(m-1)}) = \{\theta(\alpha) \mid \alpha \in \mathbf{N}(A, m), l(\alpha) = m - 1\}.$$

Л е м м а 3. Пусть $\langle A, [] \rangle$ – n -арная группа, $U \in \mathbf{N}(A^{(m-1)})$, $V \in A^{(m-1)}$. Тогда для любого $j = 1, \dots, k + 1$ верно равенство

$$[\underbrace{U \dots U}_{j-1} V \underbrace{U \dots U}_{k-j+1}]_{k+1} = V.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $U = \theta(\alpha)$, $V = \theta(\beta)$. Так как последовательность α – m -нейтральная, то по следствию 1 $\theta(\alpha)\theta(\beta) = \theta(\beta)\theta(\alpha)$, а согласно утверждению 2) предложения 1, последовательность $\underbrace{\alpha \dots \alpha}_k$ является нейтральной. Поэтому

$$\begin{aligned} [\underbrace{U \dots U}_{j-1} V \underbrace{U \dots U}_{k-j+1}]_{k+1} &= [\underbrace{\theta(\alpha) \dots \theta(\alpha)}_{j-1} \theta(\beta) \underbrace{\theta(\alpha) \dots \theta(\alpha)}_{k-j+1}]_{k+1} = \underbrace{\theta(\alpha) \dots \theta(\alpha)}_{j-1} \theta(\beta) \underbrace{\theta(\alpha) \dots \theta(\alpha)}_{k-j+1} = \\ &= \underbrace{\theta(\alpha) \dots \theta(\alpha)}_k \theta(\beta) = \theta(\underbrace{\alpha \dots \alpha}_k) \theta(\beta) = \theta(\beta) = V, \end{aligned}$$

т. е. верно равенство из формулировки леммы. Лемма доказана.

Равенство из леммы 3 позволяет сформулировать предложение, устанавливающее связь между m -нейтральными последовательностями n -арной группы $\langle A, [] \rangle$ и единицами $(k + 1)$ -арной группы $\langle A^{(m-1)}, []_{k+1} \rangle$.

Предложение 2. Если последовательность α элементов n -арной группы $\langle A, [] \rangle$ является m -нейтральной, то класс $\theta(\alpha)$ является единицей $(k+1)$ -арной группы $\langle A^{(m-1)}, []_{k+1} \rangle$ и верно включение $\mathbf{N}(A^{(m-1)}) \subseteq \mathbf{E}(A^{(m-1)})$.

Возникает естественный вопрос: верно ли обратное включение?

Следствием положительного ответа на этот вопрос было бы равенство

$$\mathbf{N}(A^{(m-1)}) = \mathbf{E}(A^{(m-1)}).$$

В следующем разделе будет приведен пример, показывающий, что существуют полиадические группы, для которых ответ на сформулированный выше вопрос является отрицательным. Следовательно, указанное равенство в таких полиадических группах невозможно.

Предложение 3. Пусть $\langle A, [] \rangle$ – n -арная группа, $U \in \mathbf{N}(A^{(m-1)})$, $V \in A^{(m-1)}$, φ – автоморфизм $(k+1)$ -арной группы $\langle A^{(m-1)}, []_{k+1} \rangle$. Тогда для любого $j = 1, \dots, k+1$ справедливо равенство

$$\underbrace{[U^\varphi \dots U^\varphi]_{j-1}}_{j-1} \underbrace{V U^\varphi \dots U^\varphi]_{k-j+1}}_{k-j+1} = V$$

и верно включение $\mathbf{N}^\varphi(A^{(m-1)}) \subseteq \mathbf{E}(A^{(m-1)})$.

Доказательство. Так как $V^{\varphi^{-1}} \in A^{(m-1)}$, то по лемме 3

$$\underbrace{[U \dots U V^{\varphi^{-1}} U \dots U]_{k+1}}_{j-1} = V^{\varphi^{-1}},$$

откуда последовательно получаем

$$\begin{aligned} & (\underbrace{[U \dots U V^{\varphi^{-1}} U \dots U]_{k+1}}_{j-1})^\varphi = (V^{\varphi^{-1}})^\varphi, \\ & \underbrace{[U^\varphi \dots U^\varphi (V^{\varphi^{-1}})^\varphi U^\varphi \dots U^\varphi]_{k+1}}_{j-1} = V, \\ & \underbrace{[U^\varphi \dots U^\varphi V U^\varphi \dots U^\varphi]_{k+1}}_{j-1} = V. \end{aligned}$$

Последнее равенство означает, что U^φ – единица $(k+1)$ -арной группы $\langle A^{(m-1)}, []_{k+1} \rangle$. Следовательно, верно включение из формулировки предложения. Предложение доказано.

Включение из формулировки предложения 3 можно рассматривать и как следствие включения из формулировки предложения 2, так как любой автоморфизм полиадической группы переводит единицу в единицу.

Покажем, что всякий автоморфизм $(k+1)$ -арной группы $\langle A^{(m-1)}, []_{k+1} \rangle$ с непустым центром «переводит» любую m -нейтральную последовательность n -арной группы $\langle A, [] \rangle$ в ее же m -нейтральную последовательность.

Лемма 4. Пусть α – m -нейтральная последовательность n -арной группы $\langle A, [] \rangle$ с непустым центром, φ – автоморфизм $(k+1)$ -арной группы $\langle A^{(m-1)}, []_{k+1} \rangle$, $U = \theta(\alpha)$, $U^\varphi = \theta(\delta)$. Тогда δ – m -нейтральная последовательность n -арной группы $\langle A, [] \rangle$.

Доказательство. Пусть x – произвольный элемент из A , $c_1, \dots, c_{m-2}$ – фиксированные элементы из центра n -арной группы $\langle A, [] \rangle$, и положим $V = \theta(xc_1 \dots c_{m-2})$. Так как $U = \theta(\alpha) \in \mathbf{N}(A^{(m-1)})$, $V \in A^{(m-1)}$, то, согласно предложению 3, имеем

$$\underbrace{[U^\varphi \dots U^\varphi]_{j-1}}_{j-1} \underbrace{V U^\varphi \dots U^\varphi]_{k-j+1}}_{k-j+1} = V.$$

Тогда, учитывая принадлежность элементов $c_1, \dots, c_{m-2}$ центру n -арной группы $\langle A, [] \rangle$, последовательно получаем

$$\underbrace{[(\theta(\delta)) \dots (\theta(\delta)) \theta(xc_1 \dots c_{m-2})]_{k+1}}_{j-1} = \theta(xc_1 \dots c_{m-2}),$$

$$\begin{aligned}
\theta(\underbrace{\delta \dots \delta}_{j-1} x c_1 \dots c_{m-2} \underbrace{\delta \dots \delta}_{k-j+1}) &= \theta(x c_1 \dots c_{m-2}), \\
\theta(\underbrace{\delta \dots \delta}_{j-1} x \underbrace{\delta \dots \delta}_{k-j+1} c_1 \dots c_{m-2}) &= \theta(x c_1 \dots c_{m-2}), \\
\theta(\underbrace{\delta \dots \delta}_{j-1} x \underbrace{\delta \dots \delta}_{k-j+1}) \theta(c_1 \dots c_{m-2}) &= \theta(x) \theta(c_1 \dots c_{m-2}), \\
\theta(\underbrace{\delta \dots \delta}_{j-1} x \underbrace{\delta \dots \delta}_{k-j+1}) &= \theta(x), \\
\theta([\underbrace{\delta \dots \delta}_{j-1} x \underbrace{\delta \dots \delta}_{k-j+1}]) &= \theta(x), \\
[\underbrace{\delta \dots \delta}_{j-1} x \underbrace{\delta \dots \delta}_{k-j+1}] &= x.
\end{aligned}$$

Следовательно, δ – m -нейтральная последовательность n -арной группы $\langle A, [] \rangle$. Лемма доказана.

3. Основной результат. Начнем с примеров.

Пример 1. Пусть $\mathbf{B}_3 = \{(12), (13), (23)\}$ – множество всех нечетных подстановок множества $\{1, 2, 3\}$, $\langle \mathbf{B}_3, [] \rangle$ – 7-арная группа с 7-арной операцией, производной от операции в симметрической группе $\mathbf{S}_3$.

Равенство $7 = 3(3 - 1) + 1$ показывает, что в $\langle \mathbf{B}_3, [] \rangle$ можно рассматривать 3-нейтральные последовательности. Кроме того, согласно замечанию 3, существует 4-арная группа $\langle \mathbf{B}_3^{(2)}, []_4 \rangle$.

Так как любая последовательность длины 2, составленная из элементов 7-арной группы $\langle \mathbf{B}_3, [] \rangle$, эквивалентна одной из последовательностей

$$\lambda = (12)(12), \mu = (12)(13), \nu = (12)(23),$$

то

$$\mathbf{B}_3^{(2)} = \{\theta(\lambda), \theta(\mu), \theta(\nu)\}.$$

Проведя соответствующие вычисления, можно убедиться в том, что в 4-арной группе $\langle \mathbf{B}_3^{(2)}, []_4 \rangle$ все элементы являются единицами, т. е. $\mathbf{E}(\mathbf{B}_3^{(2)}) = \mathbf{B}_3^{(2)}$, а также в том, что множество $\mathbf{N}(\mathbf{B}_3^{(2)})$ является одноэлементным, так как $\mathbf{N}(\mathbf{B}_3^{(2)}) = \{\theta(\lambda)\}$. Таким образом, $\mathbf{N}(\mathbf{B}_3^{(2)}) \neq \mathbf{E}(\mathbf{B}_3^{(2)})$.

Пример 1 показывает, что равенство $\mathbf{N}(A^{(m-1)}) = \mathbf{E}(A^{(m-1)})$ возможно не всегда.

Пример 2. Пусть $\langle \mathbf{B}_3, [] \rangle$ – та же 7-арная группа, что и в примере 1.

Равенство $7 = 2(4 - 1) + 1$ показывает, что в $\langle \mathbf{B}_3, [] \rangle$ можно рассматривать 4-нейтральные последовательности. Кроме того, согласно замечанию 3, существует тернарная группа $\langle \mathbf{B}_3^{(3)}, []_3 \rangle$.

Так как любая последовательность длины 3, составленная из элементов 7-арной группы $\langle \mathbf{B}_3, [] \rangle$, эквивалентна одной из последовательностей

$$\lambda = (12)(12)(12), \mu = (12)(12)(13), \nu = (12)(12)(23),$$

то

$$\mathbf{B}_3^{(3)} = \{\theta(\lambda), \theta(\mu), \theta(\nu)\}.$$

Проведя соответствующие вычисления, можно убедиться в том, что в тернарной группе $\langle \mathbf{B}_3^{(3)}, []_3 \rangle$ нет единиц, пустым является и множество $\mathbf{N}(\mathbf{B}_3^{(3)})$. Таким образом,

$$\mathbf{N}(\mathbf{B}_3^{(3)}) = \mathbf{E}(\mathbf{B}_3^{(3)}) = \emptyset.$$

Приведем еще один пример, показывающий, что равенство $\mathbf{N}(A^{(m-1)}) = \mathbf{E}(A^{(m-1)})$ возможно и для непустых множеств $\mathbf{N}(A^{(m-1)})$ и $\mathbf{E}(A^{(m-1)})$.

Пример 3. Пусть $\mathbf{B}_3$ – то же множество, что и в примере 1, $\langle \mathbf{B}_3, [] \rangle$ – 5-арная группа с 5-арной операцией, производной от операции в симметрической группе $\mathbf{S}_3$.

Равенство $5 = 2(3 - 1) + 1$ показывает, что в $\langle B_3, [] \rangle$ можно рассматривать 3-нейтральные последовательности. Кроме того, согласно замечанию 3, существует тернарная группа $\langle B_3^{(2)}, []_3 \rangle$.

Как и в примере 1, $B_3^{(2)} = \{\theta(\lambda), \theta(\mu), \theta(\nu)\}$.

Соответствующие вычисления убеждают в том, что

$$N(B_3^{(2)}) = E(B_3^{(2)}) = \{\theta(\lambda)\}.$$

Приведенные примеры позволяют предположить, что все элементы множества $N(A^{(m-1)})$, если оно не пусто, образуют в $(k + 1)$ -арной группе $\langle A^{(m-1)}, []_{k+1} \rangle$ $(k + 1)$ -арную подгруппу, совпадающую в некоторых случаях с $(k + 1)$ -арной подгруппой $\langle E(A^{(m-1)}), []_{k+1} \rangle$. Следующая теорема, являющаяся основным результатом данной статьи, подтверждает это предположение.

Теорема 1. Пусть $\langle A, [] \rangle$ – n -арная группа, $N(A^{(m-1)}) \neq \emptyset$. Тогда:

1) $\langle N(A^{(m-1)}), []_{k+1} \rangle$ – $(k + 1)$ -арная подгруппа $(k + 1)$ -арной группы $\langle A^{(m-1)}, []_{k+1} \rangle$, лежащая в ее центре;

2) если центр n -арной группы $\langle A, [] \rangle$ непустой, то $\langle N(A^{(m-1)}), []_{k+1} \rangle$ – характеристична в $\langle A^{(m-1)}, []_{k+1} \rangle$ и совпадает с $\langle E(A^{(m-1)}), []_{k+1} \rangle$.

Доказательство. 1) Пусть $\theta(\alpha_1), \theta(\alpha_2), \dots, \theta(\alpha_{k+1})$ – любые элементы из $N(A^{(m-1)})$. Положим

$$\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{k+1}, U = [\theta(\alpha_1) \theta(\alpha_2) \dots \theta(\alpha_{k+1})]_{k+1}.$$

Так как

$$[\theta(\alpha_1) \theta(\alpha_2) \dots \theta(\alpha_{k+1})]_{k+1} = \theta(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{k+1}) = \theta(\alpha),$$

то $U = \theta(\alpha)$. А так как $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k+1}$ – m -нейтральные последовательности, то по лемме 1 последовательность α также является m -нейтральной. Поэтому $U = \theta(\alpha) \in N(A^{(m-1)})$. Следовательно, множество $N(A^{(m-1)})$ замкнуто относительно $(k + 1)$ -арной операции $[]_{k+1}$.

Покажем теперь, что для любого $i = 1, \dots, k + 1$ в $N(A^{(m-1)})$ разрешимо уравнение

$$[\theta(\alpha_1) \dots \theta(\alpha_{i-1}) X \theta(\alpha_{i+1}) \dots \theta(\alpha_{k+1})]_{k+1} = \theta(\beta).$$

Для этого положим $W = \theta_A(\gamma_{i-1} \dots \gamma_1 \beta \gamma_{k+1} \dots \gamma_{i+1})$, где

$$\theta(\alpha_1), \dots, \theta(\alpha_{i-1}), \theta(\alpha_{i+1}), \dots, \theta(\alpha_{k+1}), \theta(\beta) \in N(A^{(m-1)}),$$

$\gamma_1, \dots, \gamma_{i-1}, \gamma_{i+1}, \dots, \gamma_{k+1}$ – обратные последовательности соответственно для последовательностей $\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_{k+1}$. Ясно, что W – решение указанного уравнения. Осталось доказать, что $W \in N(A^{(m-1)})$.

Введя обозначение $\tau = \gamma_{i-1} \dots \gamma_1 \beta \gamma_{k+1} \dots \gamma_{i+1}$, и используя вначале следствие 2 для последовательностей $\gamma_1, \dots, \gamma_{k+1}$, после этого – m -нейтральность последовательности β , а затем лемму 2 для тех же последовательностей $\gamma_1, \dots, \gamma_{k+1}$, получим для любого $x \in A$

$$\begin{aligned} & [\underbrace{\tau \dots \tau}_{j-1} x \underbrace{\tau \dots \tau}_{k-j+1}] = \\ & = [\underbrace{\gamma_{i-1} \dots \gamma_1 \beta \gamma_{k+1} \dots \gamma_{i+1}}_{j-1} \underbrace{\gamma_{i-1} \dots \gamma_1 \beta \gamma_{k+1} \dots \gamma_{i+1}}_{k-j+1} x \underbrace{\gamma_{i-1} \dots \gamma_1 \beta \gamma_{k+1} \dots \gamma_{i+1}}_{k-j+1}] = \\ & = [\underbrace{\gamma_{k+1} \dots \gamma_{k+1}}_{j-1} \dots \underbrace{\gamma_2 \dots \gamma_2}_{j-1} [\underbrace{\gamma_1 \dots \gamma_1}_{j-1} [\underbrace{\beta \dots \beta}_{j-1} x \underbrace{\beta \dots \beta}_{k-j+1} \underbrace{\gamma_1 \dots \gamma_1}_{k-j+1} \underbrace{\gamma_2 \dots \gamma_2}_{k-j+1}]] \dots \underbrace{\gamma_{k+1} \dots \gamma_{k+1}}_{k-j+1}] = \\ & = [\underbrace{\gamma_{k+1} \dots \gamma_{k+1}}_{j-1} \dots \underbrace{\gamma_2 \dots \gamma_2}_{j-1} [\underbrace{\gamma_1 \dots \gamma_1}_{j-1} x \underbrace{\gamma_1 \dots \gamma_1}_{k-j+1} \underbrace{\gamma_2 \dots \gamma_2}_{k-j+1}]] \dots \underbrace{\gamma_{k+1} \dots \gamma_{k+1}}_{k-j+1}] = \\ & = [\underbrace{\gamma_{k+1} \dots \gamma_{k+1}}_{j-1} \dots \underbrace{\gamma_2 \dots \gamma_2}_{j-1} x \underbrace{\gamma_2 \dots \gamma_2}_{k-j+1} \dots \underbrace{\gamma_{k+1} \dots \gamma_{k+1}}_{k-j+1}] = \dots \\ & \dots = [\underbrace{\gamma_{k+1} \dots \gamma_{k+1}}_{j-1} x \underbrace{\gamma_{k+1} \dots \gamma_{k+1}}_{k-j+1}] = x, \end{aligned}$$

т. е.

$$[\underbrace{\tau \dots \tau}_{j-1} x \underbrace{\tau \dots \tau}_{k-j+1}] = x.$$

Следовательно, τ – m -нейтральная последовательность, $W = \theta(\tau) \in \mathbf{N}(A^{(m-1)})$, а универсальная алгебра $\langle \mathbf{N}(A^{(m-1)}), [\]_{k+1} \rangle$ является $(k+1)$ -арной подгруппой $(k+1)$ -арной группы $\langle A^{(m-1)}, [\]_{k+1} \rangle$.

Для любых

$$\theta(\alpha) \in \mathbf{N}(A^{(m-1)}), \theta(\beta_1), \dots, \theta(\beta_k) \in A^{(m-1)},$$

согласно следствию 1, имеем

$$\begin{aligned} [\theta(\alpha)\theta(\beta_1) \dots \theta(\beta_k)]_{k+1} &= \theta(\alpha\beta_1 \dots \beta_k) = \theta(\beta_1\alpha\beta_2 \dots \beta_k) = \\ &= \theta(\beta_1)\theta(\alpha)\theta(\beta_2) \dots \theta(\beta_k)]_{k+1} = \dots = [\theta(\beta_1) \dots \theta(\beta_k)\theta(\alpha)]_{k+1}. \end{aligned}$$

Следовательно, $\theta(\alpha)$ принадлежит центру $(k+1)$ -арной группы $\langle A^{(m-1)}, [\]_{k+1} \rangle$, т. е.

$$\mathbf{N}(A^{(m-1)}) \subseteq \mathbf{Z}(A^{(m-1)}).$$

2) Если $U \in \mathbf{N}(A^{(m-1)})$, то по лемме 4 $U^\varphi \in \mathbf{N}(A^{(m-1)})$ для любого автоморфизма φ $(k+1)$ -арной группы $\langle A^{(m-1)}, [\]_{k+1} \rangle$. Следовательно, $\mathbf{N}^\varphi(A^{(m-1)}) \subseteq \mathbf{N}(A^{(m-1)})$. В частности,

$$\mathbf{N}^{\varphi^{-1}}(A^{(m-1)}) \subseteq \mathbf{N}(A^{(m-1)}),$$

откуда

$$(\mathbf{N}^{\varphi^{-1}}(A^{(m-1)}))^\varphi \subseteq \mathbf{N}^\varphi(A^{(m-1)}), \mathbf{N}(A^{(m-1)}) \subseteq \mathbf{N}^\varphi(A^{(m-1)}).$$

Таким образом, $\mathbf{N}^\varphi(A^{(m-1)}) = \mathbf{N}(A^{(m-1)})$, т. е. $\langle \mathbf{N}(A^{(m-1)}), [\]_{k+1} \rangle$ – характеристична в $(k+1)$ -арной группе $\langle A^{(m-1)}, [\]_{k+1} \rangle$.

Пусть x – произвольный элемент из A , $a_1, \dots, a_{m-1}$ – фиксированные элементы из центра n -арной группы $\langle A, [\] \rangle$. Если класс $U = \theta(\alpha)$ является единицей в $\langle A^{(m-1)}, [\]_{k+1} \rangle$, то

$$[\underbrace{U \dots U}_{j-1} \theta(xa_1 \dots a_{m-1}) \underbrace{U \dots U}_{k-j+1}]_{k+1} = \theta(xa_1 \dots a_{m-1})$$

для любого $j = 1, \dots, k+1$. Тогда, учитывая принадлежность элементов $a_1, \dots, a_{m-1}$ центру n -арной группы $\langle A, [\] \rangle$, последовательно получаем

$$\begin{aligned} [\underbrace{\theta(\alpha) \dots \theta(\alpha)}_{j-1} \theta(xa_1 \dots a_{m-1}) \underbrace{\theta(\alpha) \dots \theta(\alpha)}_{k-j+1}]_{k+1} &= \theta(xa_1 \dots a_{m-1}), \\ \theta(\underbrace{\alpha \dots \alpha}_{j-1} xa_1 \dots a_{m-1} \underbrace{\alpha \dots \alpha}_{k-j+1}) &= \theta(xa_1 \dots a_{m-1}), \\ \theta(\underbrace{\alpha \dots \alpha}_{j-1} \underbrace{\alpha x \alpha \dots \alpha}_{k-j+1} a_1 \dots a_{m-1}) &= \theta(xa_1 \dots a_{m-1}), \\ \theta(\underbrace{\alpha \dots \alpha}_{j-1} \underbrace{\alpha x \alpha \dots \alpha}_{k-j+1}) \theta(a_1 \dots a_{m-1}) &= \theta(x) \theta(a_1 \dots a_{m-1}), \\ \theta(\underbrace{\alpha \dots \alpha}_{j-1} \underbrace{\alpha x \alpha \dots \alpha}_{k-j+1}) &= \theta(x), \\ \theta([\underbrace{\alpha \dots \alpha}_{j-1} \underbrace{\alpha x \alpha \dots \alpha}_{k-j+1}]) &= \theta(x), \\ [\underbrace{\alpha \dots \alpha}_{j-1} \underbrace{\alpha x \alpha \dots \alpha}_{k-j+1}] &= x. \end{aligned}$$

Следовательно, α – m -нейтральная последовательность n -арной группы $\langle A, [\] \rangle$ и доказано включение $\mathbf{E}(A^{(m-1)}) \subseteq \mathbf{N}(A^{(m-1)})$, откуда и из предложения 2 следует равенство $\mathbf{N}(A^{(m-1)}) = \mathbf{E}(A^{(m-1)})$. Теорема доказана.

Согласно утверждению 2) теоремы 1, если центр n -арной группы $\langle A, [\] \rangle$ непустой, то $(k+1)$ -арные подгруппы $\langle \mathbf{N}(A^{(m-1)}), [\]_{k+1} \rangle$ и $\langle \mathbf{E}(A^{(m-1)}), [\]_{k+1} \rangle$ совпадают. Пример 3 показывает, что указанное совпадение возможно и в полиадических группах с пустым центром, так как центр тернарной группы $\langle B_3^{(2)}, [\]_3 \rangle$ пустой.

При $m = n$ из теоремы 1 вытекает тривиальное утверждение о единичной подгруппе группы $A_0 = A^{(n-1)}$.

Полагая в теореме 1 $m = 2$, получим

С л е д с т в и е 3. Пусть $\langle A, [] \rangle - n$ -арная группа, $N(A') \neq \emptyset$. Тогда:

- 1) $\langle N(A'), []_n \rangle - n$ -арная подгруппа n -арной группы $\langle A', []_n \rangle$, лежащая в ее центре;
- 2) если центр n -арной группы $\langle A, [] \rangle$ непустой, то $\langle N(A'), []_n \rangle -$ характеристична в $\langle A', []_n \rangle$ и совпадает с $\langle E(A'), []_n \rangle$.

Так как наличие единицы в n -арной группе влечет непустоту ее центра, а отображение $\psi: \theta(a) \rightarrow a$ является изоморфизмом n -арной группы $\langle A', []_n \rangle$ на n -арную группу $\langle A, [] \rangle$, при котором $(N(A'))^\psi = E(A)$, то из следствия 3 вытекает следующая теорема из [1, 2], которая отмечалась во введении.

Т е о р е м а 2 [1, 2]. Если $E(A) \neq \emptyset$, то $\langle E(A), [] \rangle -$ характеристическая n -арная подгруппа n -арной группы $\langle A, [] \rangle$, лежащая в ее центре.

Для полноты изложения приведем изоморфную копию теоремы 1, в формулировке которой присутствует $(k + 1)$ -арная группа, изоморфная $(k + 1)$ -арной группе $\langle A^{(m-1)}, []_{k+1} \rangle$. Для этого зафиксируем в n -арной группе $\langle A, [] \rangle$, где $n = k(m - 1) + 1$, элементы $c_1, \dots, c_{m-2}$ и определим на A $(k + 1)$ -арную операцию $[]_{k+1, c_1 \dots c_{m-2}}$ следующим образом:

$$[a_1 a_2 \dots a_{k+1}]_{k+1, c_1 \dots c_{m-2}} = [a_1 c_1 \dots c_{m-2} a_2 c_1 \dots c_{m-2} \dots a_k c_1 \dots c_{m-2} a_{k+1}].$$

Проведя несложные вычисления (см., напр., [3]), можно убедиться в том, что $\langle A, []_{k+1, c_1 \dots c_{m-2}} \rangle - (k + 1)$ -арная группа.

Л е м м а 5 [8]. Пусть $n = k(m - 1) + 1$, $\langle A, [] \rangle - n$ -арная группа, $c_1, \dots, c_{m-2} \in A$. Тогда отображение $\tau: A^{(m-1)} \rightarrow A$ по правилу

$$\tau: \theta(ac_1 \dots c_{m-2}) \rightarrow a$$

является изоморфизмом $(k + 1)$ -арной группы $\langle A^{(m-1)}, []_{k+1} \rangle$ на $(k + 1)$ -арную группу $\langle A, []_{k+1, c_1 \dots c_{m-2}} \rangle$.

Для фиксированных элементов $c_1, \dots, c_{m-2}$ n -арной группы $\langle A, [] \rangle$ выделим в A подмножество

$$N(A, c_1 \dots c_{m-2}) = \{a \in A \mid ac_1 \dots c_{m-2} \in N(A, m)\}.$$

Ясно, что

$$N(A, c_1 \dots c_{m-2}) = \{a \in A \mid \theta(ac_1 \dots c_{m-2}) \in N(A^{(m-1)})\},$$

а также

$$N(A^{(m-1)}) = \{\theta(ac_1 \dots c_{m-2}) \mid ac_1 \dots c_{m-2} \in N(A, m)\}.$$

Поэтому множество $N(A, c_1 \dots c_{m-2})$ является образом множества $N(A^{(m-1)})$ при изоморфизме τ из леммы 5:

$$N(A, c_1 \dots c_{m-2}) = N^\tau(A^{(m-1)}).$$

Обозначим через $E(A, c_1 \dots c_{m-2})$ множество всех единиц в $\langle A^{(m-1)}, []_{k+1} \rangle$.

Так как при изоморфизме n -арных групп образом единицы является единица, то образом множества $E(A^{(m-1)})$ всех единиц $(k + 1)$ -арной группы $\langle A^{(m-1)}, []_{k+1} \rangle$ при изоморфизме τ является множество $E(A, c_1 \dots c_{m-2})$:

$$E(A, c_1 \dots c_{m-2}) = E^\tau(A^{(m-1)}).$$

Лемма 5 позволяет сформулировать следующую изоморфную копию теоремы 1.

Т е о р е м а 3. Пусть $\langle A, [] \rangle - n$ -арная группа, $N(A, c_1 \dots c_{m-2}) \neq \emptyset$. Тогда:

- 1) $\langle N(A, c_1 \dots c_{m-2}), []_{k+1, c_1 \dots c_{m-2}} \rangle - (k + 1)$ -арная подгруппа $(k + 1)$ -арной группы $\langle A, []_{k+1, c_1 \dots c_{m-2}} \rangle$, лежащая в ее центре;

2) если центр n -арной группы $\langle A, [] \rangle$ не пустой, то $\langle N(A, c_1 \dots c_{m-2}), []_{k+1, c_1 \dots c_{m-2}} \rangle$ – характеристична в $\langle A, []_{k+1, c_1 \dots c_{m-2}} \rangle$ и совпадает с $\langle E(A, c_1 \dots c_{m-2}), []_{k+1, c_1 \dots c_{m-2}} \rangle$.

При $m = n$ из теоремы 3 вытекает тривиальное утверждение о единичной подгруппе группы $\langle A, []_{2, c_1 \dots c_{n-2}} \rangle$ с бинарной операцией

$$[a_1 a_2]_{2, c_1 \dots c_{n-2}} = [a_1 c_1 \dots c_{n-2} a_2].$$

Для обозначения операции $[]_{2, c_1 \dots c_{n-2}}$ используется также любой из символов $\odot$ или $\circ_c$, где элемент c определяется нейтральностью последовательности $cc_1 \dots c_{n-2}$. В этом случае полагают

$$a_1 \odot a_2 = a_1 \circ_c a_2 = [a_1 c_1 \dots c_{n-2} a_2].$$

Теорема 2, являющаяся следствием теоремы 1, вытекает также и из теоремы 3, если в последней последовательность $c_1 \dots c_{m-2}$ – пустая ($m = 2$).

Список использованной литературы

1. Гальмак, А. М. n -Арная подгруппа единиц / А. М. Гальмак. – Гомель: ГГУ, 1998. – 23 с. – (Препринт / Гомел. гос. ун-т; № 77).
2. Гальмак, А. М. n -Арная подгруппа единиц / А. М. Гальмак // Вес. Нац. акад. наук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2003. – № 2. – С. 25–30.
3. Гальмак, А. М. n -Арные группы: монография / А. М. Гальмак. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2003. – Ч. 1.
4. Гальмак, А. М. n -Арные группы: монография / А. М. Гальмак. – Минск: Изд. центр БГУ, 2007. – Ч. 2.
5. Русаков, С. А. Алгебраические n -арные системы: монография / С. А. Русаков. – Минск: Навука і тэхніка, 1992.
6. Dörnte, W. Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegriff / W. Dörnte // Math. Z. – 1928. – Bd. 29. – S. 1–19.
7. Post, E. L. Polyadic groups / E. L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, N 2. – P. 208–350.
8. Гальмак, А. М. К теореме Поста о смежных классах / А. М. Гальмак, Н. А. Щучкин // Чебышев. сб. – 2014. – Т. 15, вып. 2. – С. 6–20.

Поступила в редакцию 19.11.2015