

КАРОТКІЯ ПАВЕДАМЛЕННІ

УДК 511.42

М. В. ЛАМЧАНОВСКАЯ

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ЧИСЛА ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ НА КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

*Институт информационных технологий Белорусского государственного университета
информатики и радиоэлектроники*

(Поступила в редакцию 24.10.2014)

Теория диофантовых приближений берет свое начало с теоремы Дирихле о приближении действительных чисел рациональными [1]. Естественным образом эта задача была обобщена на задачу о приближении действительных и комплексных чисел алгебраическими числами [2]. В настоящей работе рассматривается метрическая задача о приближении нуля значениями модулей многочленов третьей степени в кругах комплексной плоскости малого радиуса. Из нее следует существование алгебраических чисел в таких кругах.

Пусть задано натуральное число $Q > 1$ и некоторый круг $K \subset \mathbb{C}$, $K = K(z_0, r)$ с центром в точке z_0 радиусом r , где $r \geq c_1 Q^{-\mu}$, $0 < \mu \leq 1$, $\operatorname{Im} z > \frac{\delta}{2}$.

Рассмотрим множество многочленов третьей степени $P(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ с целыми коэффициентами. Обозначим через $H(P)$ высоту многочлена, равную модулю максимального коэффициента многочлена $H(P) = \max_{0 \leq i \leq 3} |a_i|$.

Далее, $\mu(B)$ – мера Лебега измеримого множества $B \subset \mathbb{C}$. Введем множество

$$\mathcal{P}_3(Q) = \{P(z) \in \mathbb{Z}[z] : \deg P = 3, H(P) \leq Q\}.$$

Нетрудно доказать с помощью принципа ящиков Дирихле, что для любого $z \in K$ выполняется следующее неравенство:

$$|P(z)| < 8Q^{-1}. \quad (1)$$

При $z \in K$ имеем $|P'| = |3a_3 z^2 + 2a_2 z + a_1| \leq 6Q$. Поэтому для любого $z \in K$ верна система неравенств

$$\begin{cases} |P(z)| < c_2 Q^{-1}, \\ |P'(z)| < 6Q. \end{cases} \quad (2)$$

Оказывается [3], что систему неравенств (2) практически нельзя улучшить, т. е. поставить меньшие правые части.

Справедлива следующая

Т е о р е м а. Пусть $\mathcal{L}(Q, \delta_0, K)$ обозначает множество $z \in K(z_0, r)$, для которых система неравенств

$$\begin{cases} |P(z)| < c_3 Q^{-1}, \\ |P'(z)| < \delta_0 Q \end{cases} \quad (3)$$

имеет решение в полиномах $P(z) \in \mathcal{P}_3(Q)$. Тогда при достаточно малой величине δ_0 имеем $\mu \mathcal{L}(Q, \delta_0, K) < \frac{1}{4} \mu K$ для всех кругов K с условием $r \geq c_1 Q^{-\mu}$, $0 \leq \mu \leq 1$.

Из теоремы следует, что для множества $\mathcal{B} = K \setminus \mathcal{L}(Q, \delta_0, K)$ справедливо неравенство

$$\mu \mathcal{B} \geq \frac{3}{4} \mu K \quad (4)$$

и на множестве $\mathcal{B}$ выполняется система неравенств (3), в которой $|P'(z)| > \delta_0 Q$. Из (4) и леммы 2 можно дать оценку $|z - \alpha_1|$ и получить наличие алгебраических чисел в круге K .

Л е м м а 1 [3]. Если многочлен $P(z)$ удовлетворяет условию $|a_n| > cH$, $H = H(P)$, то $\max_{1 \leq i \leq n} |\alpha_i| \leq \frac{n}{c}$, $0 < c \leq 1$, где α_i – какой-либо корень многочлена $P(z)$.

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – корни многочлена $P(z)$. Обозначим $S(\alpha_i)$ множество комплексных чисел z , удовлетворяющих условию $|z - \alpha_i| = \min_{1 \leq j \leq n} |z - \alpha_j|$. Далее полагаем, что $i = 1$ и корни многочлена $P(z)$ упорядочены относительно $\alpha_1 : |\alpha_1 - \alpha_2| < |\alpha_1 - \alpha_3| < \dots < |\alpha_1 - \alpha_n|$.

Л е м м а 2. Пусть $z \in S(\alpha_1)$. Тогда

$$|z - \alpha_1| \leq n \frac{|P(z)|}{|P'(z)|}, \quad (5)$$

$$|z - \alpha_1| \leq 2^{n-1} \frac{|P(z)|}{|P'(\alpha_1)|}. \quad (6)$$

Неравенство (5) следует из тождества $\frac{P(z)}{P'(z)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{z - \alpha_i}$, а неравенство (6) доказано в [3].

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы. Многочлен нечетной степени всегда имеет действительный корень. Обозначим через α_1 действительный корень многочлена $P(z) \in \mathcal{P}_3(Q)$, $\alpha_2, \alpha_3 = \bar{\alpha}_2$ – комплексные корни.

Рассмотрим круг $T(0, 1)$ с центром в точке нуль и радиусом единица. Пусть $K(z_0, r) \subset T(0, 1)$. Удалим из круга $T(0, 1)$ полосу шириной $\delta : |\operatorname{Im} z| < \frac{\delta}{2}$. Поэтому далее $|\operatorname{Im} z| > \frac{\delta}{2}$ и

$$|\alpha_i - \alpha_j| > \frac{\delta}{2}. \quad (7)$$

Согласно лемме 1, корни многочлена ограничены. Из леммы 2 получаем

$$|z - \alpha_1| < 2^2 |P(z)| |P'(\alpha_1)|^{-1}.$$

Поскольку $P'(\alpha_1) = a_3(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)$, то из (7) следует, что $|P'(\alpha_1)| > |a_3| \frac{\delta^2}{4}$. Ясно, что можно считать $a_3 > 0$. Так как $a_3 > c_4 H$, то $|P'(\alpha_1)| > \frac{\delta^2}{4} c_4 H$. Тогда $|z - \alpha_1| < 2^2 c_2 Q^{-1} c_5 Q^{-1}$.

Используя последнее неравенство, оценим площадь круга $K(z_0, r)$:

$$\mu K < \pi c_6^2 Q^{-4}. \quad (8)$$

Зафиксируем вектор $\bar{b} = (a_3, a_2)$, состоящий из коэффициентов многочлена $P(z) \in \mathcal{P}_3(Q)$, и обозначим через $\mathcal{P}_3(Q, \bar{b})$ подкласс многочленов из $\mathcal{P}_3(Q)$ с одним и тем же вектором $\bar{b}$.

Тогда для всех $z \in K(z_0, r)$

$$|P(z)| < c_7 Q^{1-\mu},$$

где $z = z_0 + \gamma Q^{-\mu}$, $|P(z_0)| < c_8 Q^{1-\mu}$.

Рассмотрим многочлены $P_1(z) \in \mathcal{P}_3(Q, \bar{b})$, $P_2(z) \in \mathcal{P}_3(Q, \bar{b})$,

$$\begin{aligned} P_1(z) &= a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_{11} z + a_{01}, \\ P_2(z) &= a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_{12} z + a_{02}. \end{aligned}$$

Найдем разность этих многочленов в точке и получим линейный многочлен

$$S(z) = P_2(z) - P_1(z) = (a_{12} - a_{11})z + (a_{02} - a_{01}).$$

Оценим значение этого многочлена в точке z_0 :

$$|S(z_0)| = |P_2(z_0) - P_1(z_0)| = |(a_{12} - a_{11})z_0 + (a_{02} - a_{01})| < c_8 Q^{1-\mu}.$$

Если $z_0 = t_0 + it_1$, то $\text{Im}(S(z_0)) = (a_{12} - a_{11})t_1$, поэтому

$$|a_{12} - a_{11}| < c_9 Q^{1-\mu}, \quad \text{Re}(S(z_0)) = (a_{12} - a_{11})t_0 + a_{02} - a_{01},$$

поэтому

$$|a_{02} - a_{01}| < c_{10} Q^{1-\mu}.$$

Оценим количество $\#\{(a_{1j}, a_{0j})\} < c_{11} Q^{2(1-\mu)}$, $j = 1, 2$.

Из (8) имеем $\pi c_6 Q^{-4} \cdot c_{11} Q^{2-2\mu} = c_{12} Q^{-2} \mu K$.

Из оценки производной имеем

$$|P_2'(z) - P_1'(z)| = |3(a_{32} - a_{31})z^2 + 2(a_{22} - a_{21})z + (a_{12} - a_{11})| < \delta_0 Q.$$

Тогда $\#\{(a_{3j}, a_{2j})\} < c_{13} \delta_0^2 Q^2$, откуда из (8) получаем

$$\sum_{\bar{b}} \sum_{P \in \mathcal{P}_3(Q, \bar{b})} \mu \mathcal{L}(Q, \delta_0, K) < \pi c_6^2 Q^{-4} \cdot c_{11} Q^{2-2\mu} \cdot c_{13} \delta_0^2 Q^2 < c_{14} \delta_0^2 \cdot \mu K.$$

Выберем δ_0 так, чтобы $c_{14} \delta_0^2 = \frac{1}{4}$. Тогда $\mu \mathcal{L}(Q, \delta_0, K) < \frac{1}{4} \mu K$, что и доказывает теорему.

Литература

1. *Baker A., Schmidt W. M.* // Proc. Lond. Math. Soc. 1970. Vol. 21 (3). P. 1–11.
2. *Bugeaud Y.* Approximation by Algebraic Numbers. Cambridge Univ. Press, 2004.
3. *Спринджук В. Г.* Проблема Малера в метрической теории чисел. Наука и техника. Минск, 1967.

M. V. LAMCHANOVSKAYA

ALGEBRAIC NUMBERS OF THIRD DEGREE ON THE COMPLEX PLANE

Summary

For each $Q > 1$, the existence of algebraic numbers of third degree is proved in circles of radius cQ^{-1} , where c is a sufficiently large constant.