УДК 511.42

А. С. КУДИН

ОБ ОЦЕНКЕ СНИЗУ КОЛИЧЕСТВА ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ МНОГОЧЛЕНОВ ЗАДАННОЙ СТЕПЕНИ С МАЛОЙ ПРОИЗВОДНОЙ В КОРНЕ

Институт математики НАН Беларуси

(Поступила в редакцию 19.11.2014)

Оценки расстояний действительного числа до алгебраических чисел имеют важное значение в метрической теории диофантовых приближений. С их помощью В. Г. Спринджуком [1] была доказана известная проблема Малера, а В. И. Берником [2] найдена размерность Хаусдорфа множества действительных чисел с заданной мерой трансцендентности. Если производная многочлена в ближайшем корне мала, то оценка сверху расстояния до него оказывается грубой, и важно как можно точнее оценить сверху количество таких многочленов. В данной статье получена оценка снизу количества целочисленных многочленов заданной степени и ограниченной высоты с малой производной в корне, что позволяет более точно судить об оценке сверху их количества.

Для положительных действительных чисел Q и S введем обозначения

$$P_n(Q)=\{P\in\mathbb{Z}[x]\mid \deg P\le n\wedge H(P)\le Q\},$$
$$P_n(Q,S)=\{P\in P_n(Q)\mid \exists\alpha\in\mathbb{C}: P(\alpha)=0\wedge 0<|P'(\alpha)|<S\}.$$

В работе будет доказана следующая

Теорема. *Если* $0\le v\le\frac{n+1}{3}$, *то существуют такие положительные* $b_1(n)$, $b_2(n)$, $Q_0(n)$, *что при* $Q>Q_0$ *выполняется неравенство*

$$\#P_n\left(Q,b_1Q^{1-v}\right)\ge b_2Q^{n+1-2v}. \tag{1}$$

В доказательстве теоремы будут использованы две леммы.

Лемма 1. *Пусть* $v_0,\dots,v_n$ *– вещественные числа, такие что*

$$\begin{cases} v_0\ge v_1\ge\ldots\ge v_n\ge -1,\\ v_0+\ldots+v_n=0.\end{cases} \tag{2}$$

Тогда существуют такие положительные $\delta_0(n),c_0(n)$, *что для любого интервала* $J\subset\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ *можно найти* $Q_0(n,J)$ *такое, что для всех* $Q>Q_0(n,J)$ *найдется измеримое множество* $G_J\subseteq J$ *с мерой* $|G_J|\ge \frac{3}{4}|J|$ *такое, что для каждого* $x\in G_J$ *имеется* $n+1$ *линейно независимых, неприводимых и примитивных полиномов* $P\in\mathbb{Z}[x]$ *степени ровно n, для которых выполняется следующая система неравенств:*

$$\begin{cases} \delta_0Q^{-v_0}\le|P(x)|\le c_0Q^{-v_0},\\ \delta_0Q^{-v_j}\le\left|P^{(j)}(x)\right|\le c_0Q^{-v_j}\quad (1\le j\le n).\end{cases} \tag{3}$$

Лемма 1 является частным случаем леммы 4 из [3].

Л е м м а 2. *Пусть* $\delta_0(n), c_0(n), v_j$ *– те же, что и в лемме* 1. *Пусть для величин* $d_j = v_{j-1} - v_j$ $(1 \le j \le n)$ *выполняется условие*

$$d_1 \ge d_2 \ge \ldots \ge d_n \ge 0. \qquad (4)$$

Тогда, если для некоторых $x \in \mathbb{C}, Q > 1$, *полинома* $P = a_n x^n + \ldots + a_0 \in \mathbb{C}[x]$ *степени n верна система* (3), *то для корней* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ *полинома P справедливы оценки*

$$|x - \alpha_j| \le c_j Q^{-d_j} \quad (1 \le j \le n), \qquad (5)$$

где c_j *– некоторые константы, зависящие от* n, δ_0, c_0.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 2. Занумеруем корни α_i в порядке удаления от x:

$$|x - \alpha_1| \le |x - \alpha_2| \le \ldots |x - \alpha_n|. \qquad (6)$$

При $0 \le j \le n$ обозначим $S_j = (x - \alpha_{j+1}) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_n)$. В соответствии с леммой 2 из [1, с. 19] выполняется $|x - \alpha_1| \le n|P(x)||P'(x)|^{-1}$, откуда $|x - \alpha_1| \le nc_0\delta_0^{-1}Q^{-v_0+v_1} = c_1Q^{-d_1}$, что доказывает (5) для $j = 1$. Далее по индукции предположим, что (5) истинно при $j < n$, и докажем это при $j + 1 \le n$. Очевидно, что $P^{(j)}(x) = a_n \sum\limits_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_{n-j} \le n} (j!)(x - \alpha_{i_1})(x - \alpha_{i_2}) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_{i_{n-j}})$ при $0 \le j \le n$, откуда и из (6) следует

$$\left|P^{(j)}(x)\right| \le P_n^j |a_n S_j|, \qquad (7)$$

где $P_n^j = \dfrac{n!}{(n-j)!}$. Если $|x - \alpha_j| > \dfrac{1}{2}\left(P_n^j\right)^{-1}|x - \alpha_{j+1}|$, то

$$|x - \alpha_{j+1}| < 2P_n^j|x - \alpha_j| \le 2P_n^j c_j Q^{-d_j} = c_{j+1}Q^{-d_j} \le c_{j+1}Q^{-d_{j+1}},$$

так как $d_j \ge d_{j+1}$. Если же $|x - \alpha_j| \le \dfrac{1}{2}\left(P_n^j\right)^{-1}|x - \alpha_{j+1}|$, то

$$\left|P^{(j)}(x) - a_n S_j\right| = \left|a_n \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_{n-j} \le n} (j!)(x - \alpha_{i_1}) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_{i_{n-j}}) - a_n S_j\right| \le$$

$$\le |a_n| \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_{n-j} \le n} (j!)\frac{1}{2}\left(P_n^j\right)^{-1}|S_j| \le |a_n|\left(P_n^j\right)\frac{1}{2}\left(P_n^j\right)^{-1}|S_j| = \frac{1}{2}|a_n S_j|,$$

откуда $\left|P^{(j)}(x)\right| \ge \dfrac{1}{2}|a_n S_j| = \dfrac{1}{2}|a_n S_{j+1}||x - \alpha_{j+1}|$, из чего и из (7) вытекает

$$\left|P^{(j)}(x)\right| \ge \frac{1}{2}|a_n S_{j+1}||x - \alpha_{j+1}| \ge \frac{1}{2}\left(P_n^{j+1}\right)^{-1}\left|P^{(j+1)}(x)\right||x - \alpha_{j+1}|.$$

Следовательно, $|x - \alpha_{j+1}| \le 2P_n^{j+1}\dfrac{\left|P^{(j)}(x)\right|}{\left|P^{(j+1)}(x)\right|} \le 2P_n^{j+1}c_0\delta_0^{-1}Q^{-v_j+v_{j+1}} = c_{j+1}Q^{-d_{j+1}}$, что и завершает доказательство леммы.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы. Зафиксируем некоторые $v_0, \ldots, v_n$, удовлетворяющие условиям (2) и (4). Конкретные значения $v_0, \ldots, v_n$ будут указаны позже. Зафиксируем интервал $J = \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$. По лемме 1 существуют такие $\delta_0(n), c_0(n), Q_0(n, J)$, что при $Q > Q_0(n, J)$ найдется измеримое множество $G_J \subseteq J, |G_J| \ge \frac{3}{4}|J|$ такое, что для каждого $x \in G_J$ имеется неприводимый полином $P \in \mathbb{Z}[x]$

степени n, для которого выполняется система (3). Зафиксируем $Q > Q_0(n, J)$. Тем самым зафиксировано множество $G_J \subseteq J$. Возьмем $x \in G_J$ и соответствующий ему полином $P = a_n x^n + ... + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$. Отметим, что для x и P также выполняется лемма 2.

Найдем оценку сверху высоты P. Из (3) следует, что $\left|P^{(n)}(x)\right| = |n! a_n| \le c_0 Q^{-v_n} \ll Q$, откуда $|a_n| \ll Q$. Далее, из следует, что $\left|P^{(j)}(x)\right| = \left|\sum_{i=j}^{n} \frac{i!}{(i-j)!} a_i x^{i-j}\right| \le c_0 Q^{-v_j} \ll Q$ $(0 \le j \le n-1)$. По индукции и в силу того, что $|x| \le 1/2$, имеем $\left|\frac{i!}{(i-j)!} a_i x^{i-j}\right| \ll Q$ при $j+1 \le i \le n$, откуда $|a_j| \ll Q$ при $0 \le j \le n-1$. Таким образом, доказано, что

$$|P| \le b_3 Q. \tag{8}$$

Оценим $|P'(\alpha_1)|$, где α_1 – ближайший к x корень P. Из леммы 2 вытекает

$$|a_1 - \alpha_j| \le |x - \alpha_1| + |x - \alpha_j| \le c_1 Q^{-d_1} + c_j Q^{-d_j} \le (c_1 + c_j) Q^{-d_j} \ (2 \le j \le n),$$

откуда и из (8) имеем

$$|P'(\alpha_1)| = |a_n(\alpha_1 - \alpha_2)...(\alpha_1 - \alpha_n)| \le b_4 Q^{1-(d_2+...+d_n)} = b_4 Q^{1-v_1+v_n}. \tag{9}$$

В силу (1) нам нужно, чтобы для некоторой величины b_1 выполнялось $|P'(\alpha_1)| < b_1 Q^{1-v}$. Вследствие для этого достаточно, чтобы $b_1 = b_4 + 1$ и $1 - v \ge 1 - v_1 + v_n$, откуда получаем следующее ограничение на v_i:

$$v_1 - v_n \ge v. \tag{10}$$

Также из неприводимости P следует, что α_1 не может быть корнем P', откуда получаем $|P'(\alpha_1)| > 0$.

Оценим снизу количество таких $P \in \mathbb{Z}[x]$, которые для некоторого $x \in G_J$ удовлетворяют (3). Так как для x и P выполняется лемма 2, то выполняется неравенство $|x - \alpha_1| \le c_1 Q^{-d_1}$, откуда вытекает, что число таких различных α_1 не менее $2c_1 Q^{d_1} |G_J| \ge 3/4\, 2c_1 Q^{d_1} = b_5 Q^{d_1}$. Следовательно, количество $P \in \mathbb{Z}[x]$, которые для некоторого $x \in G_J$ удовлетворяют (3), не менее $b_5/n\, Q^{d_1} = b_6 Q^{d_1} = b_6 Q^{v_0 - v_1}$.

Таким образом, доказано, что, если для $v_0, ..., v_n$ выполняются ограничения (2), (4) и (10), т. е. выполняется

$$\begin{cases} v_0 \ge v_1 \ge ... \ge v_n \ge -1, \\ v_0 + ... + v_n = 0, \\ v_0 - v_1 \ge v_1 - v_2 \ge ... \ge v_{n-1} - v_n \ge 0, \\ v_1 - v_n \ge v, \end{cases} \tag{11}$$

то существуют такие положительные $b_1(n), b_3(n), b_6(n)$, что $\# P_n(b_3 Q, b_1 Q^{1-v}) \ge b_6 Q^{v_0 - v_1}$. Найдем значения $v \ge 0$, при которых система (11) разрешима относительно $(v_0, ..., v_n)$, и максимальное значение $v_0 - v_1$, которое может быть достигнуто при фиксированном $v \ge 0$. Заметим, что $v_0 + ... + v_n = d_1 + 2d_2 + ... + nd_n + (n+1)v_n$ и перепишем (11) в следующем виде:

$$\begin{cases} v_n \ge -1, \\ d_1 \ge d_2 \ge ... \ge d_n \ge 0, \\ d_1 + 2d_2 + ... + nd_n + (n+1)v_n = 0, \\ d_2 + ... + d_n \ge v. \end{cases} \tag{12}$$

Допустим, что существует хотя бы один вектор $\left(d_1,\ldots,d_n,v_n\right)$, который удовлетворяет (12) при заданном v. Очевидно, можно считать, что $v_n=-1$, иначе можно перейти к вектору $\left(\overline{d}_1,\ldots,\overline{d}_n,\overline{v}_n\right)=\left(d_1+(n+1)\left(v_n-(-1)\right),d_2,\ldots,d_n,-1\right)$, который также удовлетворяет (12), и $\overline{d}_1>d_1$. Далее допустим, что $d_i>0$ при некотором $i>2$ и $d_j=0$ при $i<j\le n$. Тогда мы можем перейти к вектору $\overline{d}_1=d_1+(i-2)d_i$, $\overline{d}_2=d_2+d_i$, $\overline{d}_j=d_j\ (2<j<i)$, $\overline{d}_j=0\ (i\le j\le n)$, который удовлетворяет (12), и $\overline{d}_1>d_1$. Применяя описанное пребразование несколько раз, получим вектор вида $\left(d_1,d_2,0,\ldots,0,-1\right)$. Далее, если $d_2>v$, можно перейти к вектору $\overline{d}_1=d_1+2\left(d_2-v\right)$, $\overline{d}_2=v$, который удовлетворяет (12), и $\overline{d}_1>d_1$. Таким образом, доказано, что если существует хотя бы один вектор $\left(d_1,\ldots,d_n,v_n\right)$, который удовлетворяет (12) при заданном v, то вектор $\left(n+1-2v,v,0,\ldots,0,-1\right)$ также удовлетворяет (12) и $\overline{d}_1=n+1-2v$ – максимально возможное значение. Также легко проверить, что $\left(n+1-2v,v,0,\ldots,0,-1\right)$ удовлетворяет (12) тогда и только тогда, когда $n+1\ge 3v$. Очевидно, что удовлетворяющему системе (12) вектору $\left(\overline{d}_1,\ldots,\overline{d}_n,\overline{v}_n\right)=\left(n+1-2v,v,0,\ldots,0,-1\right)$ соответствует удовлетворяющий системе (11) вектор $\left(v_0,\ldots,v_n\right)=\left(n-v,v-1,-1,\ldots,-1\right)$.

Итак, доказано, что при $0\le v\le\dfrac{n+1}{3}$ существуют такие положительные b_1,b_3,b_6,Q_0, что верно $\#P_n\left(b_3Q,b_1Q^{1-v}\right)\ge b_6Q^{n+1-2v}$ при $Q\ge Q_0$. Пусть $b_7=\max\{b_3,1\}$, тогда

$$\#P_n\left(b_7Q,b_1Q^{1-v}\right)\ge\#P_n\left(b_3Q,b_1Q^{1-v}\right)\ge b_6Q^{n+1-2v}. \tag{13}$$

Обозначив $M=b_7Q$ и выразив Q через M в (13), получаем $\#P_n\left(M,b_1{b_7}^{v-1}M^{1-v}\right)\ge b_6{b_7}^{2v-n-1}M^{n+1-2v}$.

Так как $b_7\ge 1$ и $0\le v\le\dfrac{n+1}{3}$, при $M\ge M_0(n)=b_7Q_0(n)$ справедливо

$$\#P_n\left(M,b_1{b_7}^{n}M^{1-v}\right)\ge\#P_n\left(M,b_1{b_7}^{v-1}M^{1-v}\right)\ge b_6{b_7}^{2v-n-1}M^{n+1-2v}\ge b_6{b_7}^{-n-1}M^{n+1-2v},$$

что завершает доказательство.

Литература

1. *Спринджук В. Г.* Проблема Малера в метрической теории чисел. Минск, 1967.
2. *Bernik V. I.* // Acta Arith. 1983. Vol 42, no 3. P. 219–253.
3. *Beresnevich V., Bernik V., Gotze F.* // Compos. Math. 2010. Vol 146, no 5. P. 1165–1179.

A. S. KUDIN

LOWER BOUND OF THE NUMBER OF INTEGRAL POLYNOMIALS OF A GIVEN DEGREE WITH A SMALL VALUE OF THE DERIVATIVE AT THE ROOT

Summary

In the article we obtain a lower bound of the number of integral polynomials of arbitrary degree and bounded height with small values of the derivative at any root of the polynomial.