ФІЗІКА

УДК 530.12

Ю. А. КУРОЧКИН[1], Д. В. ШЕЛКОВЫЙ[1], И. П. БОЯРИНА[2]

О ПЕРЕМЕННЫХ ЦЕНТРА МАСС И ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ В ТРЕХМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ С РАДИУСОМ КРИВИЗНЫ, ЗАВИСЯЩИМ ОТ ВРЕМЕНИ

[1]Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
e-mail: yukuroch@dragon.bas-net.by, Shoukavy@dragon.bas-net.by
[2]Белорусский государственный аграрный технический университет, Минск, Беларусь,
e-mail: ipboyarina@mail.ru

В работе с использованием бикватернионов определены выражения для координат центра масс и относительного движения двух материальных частиц в трехмерном пространстве Лобачевского и на трехмерной сфере. Построено нерелятивистское действие для двух материальных точек в этих пространствах. Показано, что подынтегральное выражение данного действия только слагаемым, представляющим собой квадрат производной радиуса кривизны, по времени отличается от действия для случая пространств с радиусом кривизны, не зависящим от времени. Таким образом, задача разделения переменных центра масс системы двух частиц и их относительного движения сводится к тому же результату, что и в пространствах с постоянным радиусом, т. е. переменные не разделяются.

Ключевые слова: координаты центра масс, координаты относительного движения, бикватернионы, трехмерная сфера, трехмерное пространство Лобачевского, действие, разделение переменных.

Yu. A. KUROCHKIN[1], Dz. V. SHOUKOVY[1], I. P. BOYURINA[2]

MASS CENTER AND RELATIVE MOTION VARIABLES IN THREE- DIMENSIONAL SPACES WITH A TIME-DEPENDENT CURVATURE RADIUS

[1]B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus,
e-mail: yukuroch@dragon.bas-net.by, Shoukavy@dragon.bas-net.by
[2]Belarusian State Agrarian Technical University, Minsk, Belarus,
e-mail: ipboyarina@mail.ru

Expressions for the variables of the mass center and the relative motion of two material particles in the three-dimensional Lobachevsky space and in the three-dimensional sphere with a time-dependent radius curvature are defined in terms of biquaternions. By using the action of the two particles in the above spaces, we have found that the problem of separation of the mass center and relative motion coordinates of this system reduces to the problem in the spaces of a completely constant curvature.

Keywords: mass center coordinates, relative motion coordinates; biquaternions, three-dimensional sphere, Lobachevsky space; action, separation of variables.

Введение. Проблема взаимодействия двух частиц в пространствах постоянной кривизны достаточно сложная. Это, в частности, связано с тем, что разделение переменных относительного движения и центра масс, вообще говоря, невозможно ни в классических уравнениях, ни в уравнении Шредингера. Причиной неразделимости переменных в задачах механики нескольких материальных точек в пространствах постоянной кривизны является, в общем случае, невыполнение в них принципа относительности Галилея. Вызывает трудности уже определение самого центра масс в пространствах постоянной кривизны (см. [1–3]).

В работе [4] с использованием методов, предложенных в [5], определены ковариантные выражения для координат центра масс двух материальных частиц и относительные координаты на трехмерной сфере и в трехмерном пространстве Лобачевского. Рассмотрены также некоторые частные случаи, в которых разделение переменных центра масс и относительного движения в упомянутых задачах возможно [6]. В развитие данных результатов (здесь – в терминах бикватернионов) нами введены выражения координат центра масс и относительного движения в трехмерных пространствах Лобачевского и Римана с радиусом кривизны, зависящим от времени, в отличие от случаев, рассмотренных в предыдущих работах. Как известно, такие пространства являются моделями А. А. Фридмана нашей Вселенной. Построено нерелятивистское действие для двух материальных точек в этих пространствах. Показано, что подынтегральное выражение данного действия только слагаемым, представляющим собой квадрат производной радиуса кривизны по времени, отличается от действия для случая пространств с радиусом кривизны, не зависящим от времени. Следовательно, задача разделения переменных центра масс системы двух частиц и их относительного движения сводится к тому же результату, что и в пространствах с постоянным радиусом, т. е. переменные не разделяются.

Отметим, что использование векторов пространств постоянной кривизны, определенных в [7, 8], с законом сложения, совпадающим с законом композиции Ф. И. Федорова групп движений в соответствующих трехмерных пространствах постоянной кривизны (см. [9], связь данных векторов с кватернионами (бикватернионами)), подсказывает возможность введения упомянутых переменных по аналогии с пространством 4-скоростей (4-импульсов) в релятивистской кинематике [5]. Такой подход обнаруживает очевидные методические достоинства и облегчает поиск некоторых частных случаев, в которых разделение переменных центра масс и относительного движения все-таки возможно, что важно в практическом смысле.

1. Координаты частиц на трехмерной сфере и в трехмерном пространстве Лобачевского. Реализуем трехмерное риманово и Лобачевского пространства как гиперповерхности, вложенные в четырехмерные евклидово и псевдоевклидово пространства соответственно, которые будем описывать с помощью бикватернионов частного вида

$$X = iX_0 + \underline{X}, \tag{1}$$

определенных над двойными числами $i^2 = 1$ в случае евклидового и комплексными числами $i^2 = -1$ в случае псевдоевклидового пространства, для которых согласно стандартным правилам умножения имеет место

$$Y = (iX'_0 + \underline{X}')(iX_0 + \underline{X}) = \pm X'_0 X_0 - (\underline{X}'\,\underline{X}) + iX'_0\,\underline{X} + iX_0\,\underline{X}' + [\underline{X}'\,\underline{X}]. \tag{2}$$

Здесь черточка снизу обозначает трехмерный вектор, в правой части (2) круглые скобки – скалярное произведение трехмерных векторов, а квадратные – их векторное произведение.

Отметим, что использование бикватернионов вида (1), определенных над двойными числами, а не кватернионов, позволит легко перенести результаты, полученные для трехмерного пространства Римана постоянной положительной кривизны, на пространство Лобачевского. При этом уравнения трехмерной сферы S_3, на которой реализуется риманово пространство постоянной положительной кривизны, и двуполостного гиперболоида, на верхнее поле которого реализуется трехмерное пространство Лобачевского с радиусом кривизны, зависящим от времени $R(t)$ с помощью бикватернионов (1), запишется как

$$X\overline{X} = R(t)\hat{X}R(t)\overline{\hat{X}} = \pm R(t)^2,\ \hat{X}\overline{\hat{X}} = \pm 1, \tag{3}$$

где знак «плюс» относится к евклидову пространству и трехмерной сфере, знак минус – к гиперболоиду псевдоевклидового пространства, $\overline{X} = iX_0 - \underline{X}$ – бикватернион, кватернионно сопряженный бикватерниону X.

Рассмотрим движение двух невзаимодействующих частиц на трехмерной сфере. Их координаты в объемлющем четырехмерном пространстве будут представлять собой составляющие бикватернионов:

$$X^{(1)} = iX_0{}^{(1)} + \underline{X}^{(1)}, \quad X^{(2)} = iX_0{}^{(2)} + \underline{X}^{(2)}. \tag{4}$$

В силу условия (3)

$$X^{(1)}\overline{X}^{(1)} = \pm R(t)]^2,\; X^{(2)}\;\overline{X}^{(2)} = \pm R(t)]^2, \tag{5}$$

данные координаты частиц не являются независимыми. В качестве независимых координат, как будет показано ниже, удобно использовать бельтрамиевы координаты, являющиеся составляющими векторов на сфере [5, 7, 8]

$$\underline{q}^{(1)} = \pm i\frac{\underline{X}^{(1)}}{X_0^{(1)}},\; \underline{q}^{(2)} = \pm i\frac{\underline{X}^{(2)}}{X_0^{(2)}} \tag{6}$$

с законом сложения (вычитания)

$$\underline{q} = \left\langle \underline{q} \pm \underline{q}' \right\rangle = \frac{\underline{q} \pm \underline{q}' \pm \left[\underline{q}\,\underline{q}'\right]}{1 \mp \left(\underline{q}\,\underline{q}'\right)}, \tag{7}$$

совпадающим с законом композиции Ф. И. Федорова [9].

Отметим, что определение векторов (6) автоматически ведет к отождествлению противоположных точек на сфере, и, следовательно, введенные векторы принадлежат эллиптическому пространству и их использование для описания движения на сфере требует учета данного свойства. Использование непосредственно самих бикватернионов (4) позволяет избежать указанных трудностей. Тем не менее параллельно с кватернионными переменными будем применять векторы типа (6), так как задача для эллиптического пространства имеет самостоятельное значение.

2. Переменные центра масс и относительные координаты для системы двух частиц. Для двух частиц масс m_1 и m_2 соответственно координаты их центра масс в четырехмерной (бикватернионной) форме определим как

$$X_c = \frac{R(t)(m_1\widehat{X}^{(1)} + m_2\widehat{X}^{(2)})}{\sqrt{\pm\left(m_1\widehat{X}^{(1)} + m_2\widehat{X}^{(2)}\right)\left(m_1\overline{\widehat{X}}^{(1)} + m_2\overline{\widehat{X}}^{(2)}\right)}} = R(t)\widehat{X}_c,\; \widehat{X}_c\overline{\widehat{X}}_c = \pm 1, \tag{8}$$

при этом трехмерными координатами центра масс будут составляющие вектора

$$\underline{q}_c = \pm i\frac{\underline{X}_c}{X_{0c}} = \pm i\frac{m_1\underline{X}^{(1)} + m_2\underline{X}^{(2)}}{m_1X_0^{(1)} + m_2X_0^{(2)}}. \tag{9}$$

В переменных (6) данное выражение имеет вид

$$\underline{q}_c = \frac{m_1\underline{q}^{(1)}/\sqrt{1+\left(\underline{q}^{(1)}\right)^2} + m_2\underline{q}^{(2)}/\sqrt{1+\left(\underline{q}^{(2)}\right)^2}}{m_1/\sqrt{1+\left(\underline{q}^{(1)}\right)^2} + m_2/\sqrt{1+\left(\underline{q}^{(2)}\right)^2}}. \tag{10}$$

Нетрудно видеть, что выражение (10) для координат центра масс по форме совпадает с аналогичным выражением для координат центра масс в трехмерном плоском пространстве, в котором выражения постоянных масс m_1, m_2 заменяются на выражения масс с зависимостью их от координат $m_1/\sqrt{1+\left(\underline{q}^{(1)}\right)^2}$, $m_2/\sqrt{1+\left(\underline{q}^{(2)}\right)^2}$. В работе [10] вероятно впервые было показано, что модель, предложенная для объяснения проблемы запирания кварков, основанная на пространстве с конформно плоской геометрией, интерпретируемая в терминах геометрии трехмерного плоского пространства, эффективно приводит к зависимости массы от координаты. Квантово-механическая модель на основе геометрии эллиптического пространства и трехмерной сферы S_3 для описания возбуждений в квантово размерной точке, предложенная в [11] и обеспечивающая запирание квазичастиц, интерпретировалась в терминах геометрии трехмерного плоского евклидового пространства именно в переменных векторов, что также можно, как видно из (10), рассматривать как учет зависимости массы от координат.

Бикватернионным аналогом относительной переменной для двух данных частиц будет оператор

$$Y_{12} = \hat{X}^{(2)} \; \bar{\hat{X}}^{(1)}, \tag{11}$$

вытекающий из определения

$$\hat{X}^{(2)} = Y_{12} \hat{X}^{(1)}. \tag{12}$$

Независимые трехмерные координаты относительного движения определяются как составляющие вектора относительного движения

$$q_y = \frac{Y_{12} - \bar{Y}_{12}}{Y_{12} + \bar{Y}_{12}} = \left\langle \pm i \frac{\underline{X}^{(2)}}{X_0^{(2)}}, \mp i \frac{\underline{X}^{(1)}}{X_0^{(1)}} \right\rangle = \left\langle \underline{q}^{(2)}, -\underline{q}^{(1)} \right\rangle = \frac{\underline{q}^{(2)} - \underline{q}^{(1)} - \left[\underline{q}^{(2)} \underline{q}^{(1)} \right]}{1 + \left(\underline{q}^{(2)} \underline{q}^{(1)} \right)}. \tag{13}$$

Введем также четырехмерные Y_1, Y_2 и трехмерные $q_y^{(1)}, q_y^{(2)}$ координаты точек относительно центра масс, определяемые аналогично (11) и (12), а именно

$$\hat{X}^{(1)} = Y_1 \; \hat{X}_c, \; \bar{\hat{X}}^{(1)} = \bar{\hat{X}}_c \, \bar{Y}_1, \tag{14}$$

при этом

$$Y_1 = \hat{X}^{(1)} \, \bar{\hat{X}}_c, \tag{15}$$

и соответственно

$$\hat{X}^{(2)} = Y_2 \; \hat{X}_c, \; \bar{\hat{X}}^{(2)} = \bar{\hat{X}}_c \, \bar{Y}_2, \tag{16}$$

$$Y_2 = \hat{X}^{(2)} \, \bar{\hat{X}}_c. \tag{17}$$

Очевидно также, что

$$Y_{12} = Y_2 \; \bar{Y}_1. \tag{18}$$

Тогда для первой частицы

$$\underline{q}^{(1)} = \pm i \frac{\underline{X}^{(1)}}{X_0^{(1)}} = \left\langle \frac{\underline{q}_y}{1 + \frac{m_1}{m_2} \sqrt{1 + \underline{q}_y^2}}, \pm i \frac{\underline{X}_c}{X_{0c}} \right\rangle = \left\langle \frac{\underline{q}_y}{1 + \frac{m_1}{m_2} \sqrt{1 + \underline{q}_y^2}}, \underline{q}_c \right\rangle = \left\langle \underline{q}^{(1)}, \underline{q}_c \right\rangle, \tag{19}$$

а для второй частицы имеем

$$\underline{q}^{(2)} = \pm i \frac{\underline{X}^{(2)}}{X_0^{(2)}} = \left\langle \frac{\underline{q}_y}{1 + \frac{m_2}{m_1} \sqrt{1 + \underline{q}_y^2}}, \pm i \frac{\underline{X}_c}{X_{0c}} \right\rangle = \left\langle \frac{\underline{q}_y}{1 + \frac{m_2}{m_1} \sqrt{1 + \underline{q}_y^2}}, \underline{q}_c \right\rangle = \left\langle \underline{q}^{(2)}, \underline{q}_c \right\rangle, \tag{20}$$

где $\underline{q}^{(1)}$ и $\underline{q}^{(2)}$ определяются соответственно через Y_1 и Y_2 аналогично тому, как согласно формулам (13) выражаются через Y_{12}. В справедливости формул (19) и (20) легко убедиться непосредственным расчетом. Следует обратить внимание, что $\underline{q}^{(1)}$ и $\underline{q}^{(2)}$ и Y_1, Y_2 выражаются через относительные переменные q_y и Y_{12} соответственно.

Из формулы (18) вытекает

$$\underline{q}_y = < q_2, -q_1 > = \left\langle \underline{q}_y^{(2)}, -\underline{q}_y^{(1)} \right\rangle. \tag{21}$$

Введенные переменные подчиняются условиям

$$Y_{12} \bar{Y}_{12} = 1, \; Y_1 \bar{Y}_1 = 1, \; Y_2 \bar{Y}_2 = 1. \tag{22}$$

3. Классическая нерелятивистская задача. Разделение переменных в действии. Действие для задачи двух материальных точек на сфере S_3, взаимодействующих с силами, зависящими только от относительной переменной, запишем в виде

$$W_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{1}{2} \left(m_1 \dot{X}^{(1)} \dot{\bar{X}}^{(1)} + m_2 \dot{X}^{(2)} \dot{\bar{X}}^{(2)} \right) - V(Y_{12}) \right] dt. \quad (23)$$

Здесь сразу учтено, что операция дифференцирования и сопряжения перестановочны местами. Точка над буквами обозначает дифференцирование по времени.

Особенностью подхода является то, что в нем используется выражение (23) для действия, записанное в терминах четырехмерных бикватернионных переменных с учетом дополнительных условий (5) и (22).

С учетом определений (3) и (8) получим

$$W_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{R^2(t)}{2} (m_1 \dot{\hat{X}}^{(1)} \dot{\hat{\bar{X}}}^{(1)} + m_2 \dot{\hat{X}}^{(2)} \dot{\hat{\bar{X}}}^{(2)} \right] - V(R(t), Y_{12}) dt + (m_1 + m_2) \int_{t_1}^{t_2} \dot{R}^2(t) dt. \quad (24)$$

Здесь учтено, что $\hat{X}\dot{\hat{\bar{X}}} + \dot{\hat{X}}\bar{\hat{X}} = 0$.

В настоящей статье мы не выводим, как и в работах [4, 6, 12], уравнения для анализа проблемы, так как они нелинейны и их использование значительно усложняет проблему.

Выводы. Представление действия (23) в виде выражения (24) фактически показывает, что случай пространств с радиусом кривизны, зависящим только от времени (параметра), сводится к проблеме в пространствах с радиусом кривизны полностью постоянным, так как первое слагаемое с точностью до скалярного множителя совпадает с соответствующим выражением для действия в этих пространствах. Таким образом, задача разделения переменных центра масс системы двух частиц и их относительного движения приводит к тому же результату, что и в пространствах с постоянным радиусом, т. е. переменные не разделяются. Подробности можно найти в работе [12], где также рассмотрены некоторые приближения, допускающие разделение данных переменных.

Авторы благодарят участников семинара лаборатории теоретической физики Института физики НАН Беларуси за полезное обсуждение работы.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (грант № Ф14АРМ-029).

Список использованной литературы

1. *Щепетилов, А. В.* Квантово-механическая задача двух тел с центральным взаимодействием на односвязных поверхностях постоянной кривизны / А. В. Щепетилов // Теорет. и мат. физика. – 1999. – Т. 118, № 2. – С. 248–263

2. *Щепетилов, А. В.* Анализ и механика на двухточечно-однородных римановых пространствах: авт. пер. с англ. / А. В. Щепетилов. – М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»: Ижев. ин-т компьютер. исслед., 2008.

3. *Kurochkin, Yu.* Two-body problem on a sphere / Yu. Kurochkin, V. Otchik // Proc. of the Intern. Workshop on Quntum Systems: New Trends and Methods, 9–16 June 1999, Minsk, Belarus. – Minsk, 1999. – P. 99–103.

4. *Курочкин, Ю. А.* Об одном предельном случае разделения переменных в квантовомеханической задаче двух точек на трехмерной сфере S_3 / Ю. А. Курочкин, Д. В. Шёлковый // Ковариантные методы в теоретической физике: сб. тр. – Минск, 2005. – Вып. 6. – С. 91–94.

5. *Березин, А. В.* Кватернионы в релятивистской физике / А. В. Березин, Ю. А. Курочкин, Е. А. Толкачев. – М.: УРСС, 2003.

6. *Курочкин, Ю. А.* О частном случае разделения переменных центра масс и относительного движения в задаче двух тел на сфере / Ю. А. Курочкин, Д. В. Шёлковый, И. П. Боярина // Сб. науч. тр. IV конгр. физиков (24–26 апр. 2013 г., Минск). – Минск, 2013. – С. 68, 69.

7. *Богуш, А. А.* Вектор-параметры Федорова и аксиоматическое описание геометрии пространств постоянной кривизны S_3 и $^1S_3$ / А. А. Богуш, Ю. А. Курочкин // Вес. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 1995. – № 4. – С. 69–76.

8. *Богуш, А. А.* Кинематические модели трехмерных пространств постоянной кривизны / А. А. Богуш, Ю. А. Курочкин // Гравитация и электромагнетизм: сб. ст. / Бел. гос. ун-т. – Минск: Университетское, 1998. – С. 20–27.

9. *Федоров, Ф. И.* Группа Лоренца / Ф. И. Федоров. – М.: Едиториал УРСС, 2003.

10. *Горбацевич, А. К.* Уравнения движения частицы в комформно плоском пространстве и удержание кварков / А. К. Горбацевич, Л. М. Томильчик. – Минск, 1986. – 9 с. – (Препринт / Акад. наук БССР, Ин-т физики; № 415).

11. *Gritzev, V.* Model of excitations in quantum dots based on quantum mechanics in spaces of constant curvature / V. Gritzev, Yu. Kurochkin // Phys. Rev. B. – 2001. – Vol. 64, N 3. – P. 035308.

12. *Kurochkin, Yu.* On the separation of variables into relative and center of mass motion for two-bodysystem in three{dimensional spaces of constant curvature [Electronic resource] / Yu. Kurochkin, Dz. Shoukavy, I. Boyarina. – Mode of access: http// arXiv:1507.06610 v1 [math-ph] 22 Jul. 2015. – Date of access: 23.06.2015.

Поступила в редакцию 28.08.2015