УДК 539.12

Е. М. ОВСИЮК[1], А. Н. РЕДЬКО[2], В. М. РЕДЬКОВ[2]

ЧАСТИЦА ДИРАКА – КЭЛЕРА В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО, НЕРЕЛЯТИВИСТСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ, БОЗОННАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

*[1]Мозырский государственный педагогический университет им. И. П. Шамякина, Мозырь, Беларусь,
e-mail: e.ovsiyuk@mail.ru*
*[2]Институт физики им. Б. И. Степанова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь,
e-mail: v.redkov@dragon.bas-net.by*

В работе построены точные решения для уравнения Дирака – Кэлера в нерелятивистском приближении для случая простейшей неевклидовой геометрической модели – гиперболического пространства Лобачевского. Для случая минимального значения общего сохраняющегося углового момента, $j = 0$, радиальные уравнения приведены к решаемым в элементарных функциях уравнениям. В случае ненулевых значений углового момента, $j = 1, 2, 3, ...$, радиальные уравнения сводятся к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям четвертого порядка. С применением метода факторизации построено общее решение этих уравнений, включающее четыре фундаментальных решения; последние представлены в виде комбинаций из гипергеометрических функций. Найденные решения уравнения Дирака – Кэлера на фоне пространства Лобачевского не раскладываются в линейные функции, отвечающие решениям уравнений Паули в этом пространстве, что указывает на невозможность фермионной интерпретации поля Дирака – Кэлера.

Ключевые слова: частица Дирака – Кэлера, уравнение Паули, точные решения, метод факторизации, бозонная интерпретация.

E. M. OVSIYUK[1], A. N. RED'KO[2], V. M. RED'KOV[2]

DIRAC – KAHLER PARTICLE IN THE LOBACHEVSKY SPACE, NON-RELATIVISTIC APPROXIMATION, BOSON INTERPRETATION

*[1]Mozyr State Pedagogical University named after I. P. Shamyakin, Mozyr, Belarus,
e-mail:e.ovsiyuk@mail.ru*
*[2]B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus,
e-mail: v.redkov@dragon.bas-net.by*

The article is concerned with constructing the exact solutions for the Dirac – Kahler wave equation in the non-relativistic approximation for the simplest non-Euclidean geometrical model – hyperbolic Lobachevsky space. For the minimum value of the conserved angular momentum $j = 0$, the radial equations reduce to those solved in the elementary function. For greater values $j = 1, 2, 3, ...,$ the radial equations reduce to a couple of the four-order differential equations that are solved with the help of the factorization method. The general solution to each four-order order equation, involving four fundamental solutions, is constructed. The obtained solutions of the Dirac – Kahler wave equation cannot be solved in terms of the Pauli solutions on the background of Lobachevsky space, therefore any fermion interpretation for the Dirac – Kahler particle cannot be used.

Keywords: Dirac – Kahler particle, Pauli equation, exact solutions, factorization method, boson interpretation.

Введение. Частица Дирака – Кэлера является активно исследуемым в научной литературе физическим объектом. Она представляет собой сложный (составной) бозон; описывается 16-компонентным набором полей (скаляр, псевдоскаляр, истинный 4-вектор, псевдо 4-вектор, антисимметричный тензор второго ранга). Частными случаями частицы Дирака – Кэлера являются четыре более простые системы: два типа частиц со спином нуль с противоположными внутренними четностями, два типа частиц со спином единица с противоположными внутренними четностями. Литература по теории поля Дирака – Кэлера обширна (см. библиографию в работах [1–3]). Волновое уравнение для этого поля может быть представлено как формально несвязанные друг с другом четыре уравнения дираковского вида.

Однако упомянутая несвязанность четырех уравнений Дирака, вовлеченных в теорию Дирака – Кэлера, имеет место только в случае плоского пространства-времени Минковского, и это свойство не сохраняется в присутствии внешних гравитационных полей, описываемых с привлечением пространственно-временных моделей с неевклидовой геометрией. Этот аспект тесно связан с вопросом о физической интерпретации поля Дирака – Кэлера: является ли оно сложным бозоном или же эта система эквивалентна набору из четырех фермионов.

В пространстве Минковского частица Дирака – Кэлера описывается 16-компонентной волновой функцией $U(x)$, биспинором второго ранга, или эквивалентным набором тензорных полей: $\{\Phi(x), \Phi_i(x), \tilde{\Phi}(x), \tilde{\Phi}_i(x), \Phi_{mn}(x)\}$, где $\Phi(x)$ – скаляр, $\Phi_i(x)$ – вектор, $\tilde{\Phi}(x)$ – псевдоскаляр, $\tilde{\Phi}_i(x)$ – псевдовектор, $\Phi_{mn}(x)$ – антисимметричный тензор. Связь между этими величинами задается соотношением [3]

$$U = \left(-i\Phi + \gamma^l \Phi_l + i\sigma^{mn}\Phi_{mn} + \gamma^5\tilde{\Phi} + i\,\gamma^l\gamma^5\tilde{\Phi}_l\right)E^{-1}\,, \tag{1}$$

где $\gamma^5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, $\sigma^{ab} = \frac{1}{4}(\gamma^a\gamma^b - \gamma^b\gamma^a)$, E – биспинорная метрическая матрица [3].

В искривленном пространстве-времени общековариантное тетрадное уравнение Дирака – Кэлера в 4-спинорной форме имеет вид [3]

$$[\,i\gamma^\alpha(x)\,(\partial/\partial x^\alpha + B_\alpha(x)) - m\,]\,U(x) = 0\,, \tag{2}$$

где $B_\alpha = \frac{1}{2}J^{ab}e^\beta_{(a)}\nabla_\alpha(e_{(b)\beta})$ – 2-биспинорная связность, $J^{ab} = \sigma^{ab}\otimes I + I\otimes\sigma^{ab}$ – генераторы и тензоры второго ранга относительно группы Лоренца. Это спинорное уравнение эквивалентно общековариантной системе тензорных уравнений [3]:

$$\begin{gathered}
\nabla^\alpha\Psi_\alpha + m\Psi = 0\,, \qquad \nabla^\alpha\tilde{\Psi}_\alpha + m\tilde{\Psi} = 0\,,\\
\nabla_\alpha\Psi + \nabla^\beta\Psi_{\alpha\beta} - m\Psi_\alpha = 0\,,\\
\nabla_\alpha\tilde{\Psi} - \frac{1}{2}\varepsilon_\alpha{}^{\beta\rho\sigma}(x)\nabla_\beta\Psi_{\rho\sigma} - m\tilde{\Psi}_\alpha = 0\,,\\
\nabla_\alpha\Psi_\beta - \nabla_\beta\Psi_\alpha + \varepsilon_{\alpha\beta}{}^{\rho\sigma}(x)\nabla_\rho\tilde{\Psi}_\sigma - m\Psi_{\alpha\beta} = 0\,.
\end{gathered} \tag{3}$$

Ковариантные тензорные полевые переменные связаны локальными тетрадными переменными соотношениями

$$\Psi_\alpha = e^{(i)}_\alpha\Psi_i\,, \qquad \tilde{\Psi}_\alpha = e^{(i)}_\alpha\tilde{\Psi}_i\,, \qquad \Psi_{\alpha\beta} = e^{(m)}_\alpha e^{(n)}_\beta\Psi_{mn}\,, \tag{4}$$

Леви-Чивита тензор определяется равенством

$$\varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma}(x) = \varepsilon^{abcd}e^\alpha_{(a)}e^\beta_{(b)}e^\rho_{(c)}e^\sigma_{(d)}\,.$$

Поля Ψ, Ψ_α, $\Psi_{\alpha\beta}$ являются тетрадными скалярами, поля $\tilde{\Psi}$, $\tilde{\Psi}_\alpha$ – тетрадными псевдоскалярами, тензор $\varepsilon^{\alpha\beta\rho\sigma}(x)$ – общековариантным тензором и тетрадным псевдоскаляром.

Бо́льшая часть имеющихся работ по теории поля Дирака – Кэлера посвящена в основном исследованию свойств симметрии и других фундаментальных связей с обычными полями Дирака. При этом фактически нет каких-либо нетривиальных рассмотрений вопроса о решениях уравнения Дирака – Кэлера на фоне пространства с неевклидовой геометрией. Однако случаи неевклидовых пространственно-временных моделей являются важными, поскольку искривленный геометрический фон однозначно допускает только бозонную интерпретацию для поля Дирака – Кэлера. Кроме того, до настоящего времени не было работ по исследованию нерелятивистского приближения для частицы Дирака – Кэлера даже в случае плоского пространства Минковского. В настоящей работе мы строим точное общее решение для уравнения Дирака – Кэлера в нерелятивистском приближении для случая простейшей неевклидовой геометрической модели – гиперболического пространства Лобачевского.

Для случая минимального значения общего сохраняющегося углового момента, $j=0$, радиальные уравнения приведены к тривиальным дифференциальным уравнениям второго порядка, которые решаются в элементарных функциях. В случае ненулевых значений углового момента, $j=1,2,3,...$, радиальные уравнения сводятся к двум сложным обыкновенным дифференциальным уравнениям четвертого порядка. С применением метода факторизации найдено общее решение этих уравнений, включающее четыре фундаментальных решения, последние представлены в виде комбинаций из гипергеометрических функций. Полученные решения нерелятивистского уравнения Дирака – Кэлера не раскладываются в линейные функции, отвечающие решениям уравнений Паули.

1. Разделение переменных, нерелятивистское приближение. Рассмотрим вопрос о решениях уравнения Дирака – Кэлера в гиперболическом пространстве Лобачевского (спектры всех физических величин в рамках квантовой механики могут быть дискретными только из-за дополнительного присутствия запирающих потенциалов, влияние геометрии Лобачевского ведет, как правило, к конечности числа дискретных уровней энергии).

Выбираем метрику и тетраду в гиперболическом пространстве:

$$dS^2 = dt^2 - dr^2 - \sinh^2 r(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2),$$
$$e^{\alpha}_{(0)} = (1,0,0,0), \qquad e^{\alpha}_{(1)} = (0,0,\sinh^{-1} r, 0),$$
$$e^{\alpha}_{(2)} = (0,0,0,\sinh^{-1} r \sin^{-1}\theta), \qquad e^{\alpha}_{(3)} = (0,1,0,0); \tag{5}$$

для уравнения Дирака – Кэлера получим представление

$$\left[i\gamma^0 \partial_t + i\left(\gamma^3 \partial_r + \frac{\gamma^1 j^{31} + \gamma^2 j^{32}}{\tanh r}\right) + \frac{1}{\sinh r}\Sigma_{\theta,\phi} - m \right] U(x) = 0, \tag{6}$$

где зависящий от угловых переменных оператор имеет вид

$$\Sigma_{\theta,\phi} = i\gamma^1 \partial_\theta + \gamma^2 \frac{i\partial_\phi + iJ^{12}\cos\theta}{\sin\theta}, \qquad j^{12} = (\sigma^{12} \otimes I + I \otimes \sigma^{12}). \tag{7}$$

Диагонализируя на решениях уравнения (6) операторы квадрата и третьей проекции полного момента (в базисе сферической тетрады) поля Дирака – Кэлера

$$j_1 = l_1 + \frac{ij^{12}\cos\phi}{\sin\theta}, \; j_2 = l_2 + \frac{ij^{12}\sin\phi}{\sin\theta}, \; j_3 = l_3, \tag{8}$$

для волновой функции получаем общую подстановку, зависящую от 16 радиальных функций $f_{ab} = f_{ab}(r)$:

$$U_{\varepsilon JM}(t,r,\theta,\phi) = \frac{e^{-i\varepsilon t}}{r} \begin{vmatrix} f_{11} D_{-1} & f_{12} D_0 & f_{13} D_{-1} & f_{14} D_0 \\ f_{21} D_0 & f_{22} D_{+1} & f_{23} D_0 & f_{24} D_{+1} \\ f_{31} D_{-1} & f_{32} D_0 & f_{33} D_{-1} & f_{34} D_0 \\ f_{41} D_0 & f_{42} D_{+1} & f_{43} D_0 & f_{44} D_{+1} \end{vmatrix}, \tag{9}$$

$D_\sigma = D^{j}_{-m,\sigma}(\phi,\theta,0)$ – функции Вигнера [4]; квантовое число j принимает значения $0,1,2,...$. При вычислении $\Sigma_{\theta,\phi}\, U_{\varepsilon jm}$ необходимо воспользоваться рекуррентными соотношениями [4]:

$$\partial_\theta D_{-1} = \frac{1}{2}(b D_{-2} - a D_0), \qquad [(-m+\cos\theta)/\sin\theta] D_{-1} = \frac{1}{2}(-b D_{-2} - a D_0),$$
$$\partial_\theta D_{+1} = \frac{1}{2}(a D_0 - b D_{+2}), \qquad [(-m-\cos\theta)/\sin\theta] D_{+1} = \frac{1}{2}(-a D_0 - b D_{+2}),$$
$$\partial_\theta D_0 = \frac{1}{2}(a D_{-1} - a D_{+1}), \qquad [-m/\sin\theta] D_0 = \frac{1}{2}(-a D_{-1} - a D_{+1}),$$
$$a = \sqrt{j(j+1)}, \qquad b = \sqrt{(j-1)(j+1)}. \tag{10}$$

Угловой оператор $\Sigma_{\theta,\phi}$ действует на волновую функцию согласно

$$\Sigma_{\theta,\phi}\, U = i\sqrt{j(j+1)} \begin{vmatrix} -f_{41}\, D_{-1} & -f_{42}\, D_0 & -f_{43}\, D_{-1} & -f_{44}\, D_0 \\ f_{31}\, D_0 & f_{32}\, D_{+1} & f_{33}\, D_0 & f_{34}\, D_{+1} \\ f_{21}\, D_{-1} & f_{22}\, D_0 & f_{23}\, D_{-1} & f_{24}\, D_0 \\ -f_{11}\, D_0 & -f_{12}\, D_{+1} & -f_{13}\, D_0 & -f_{14}\, D_{+1} \end{vmatrix}. \tag{11}$$

После проведения необходимых вычислений находим радиальные уравнения:

$$\begin{gathered}
\varepsilon f_{24} - i\frac{d}{dr} f_{24} + \frac{i}{\tanh r} 0 - \frac{ia}{\sinh r} f_{14} - m f_{11} = 0\,, \\
\varepsilon f_{23} - i\frac{d}{dr} f_{23} - \frac{i}{\tanh r} f_{14} - \frac{ia}{\sinh r} f_{13} - m f_{12} = 0\,, \\
\varepsilon f_{14} + i\frac{d}{dr} f_{14} + \frac{i}{\tanh r} f_{23} + \frac{ia}{\sinh r} f_{24} - m f_{21} = 0\,, \\
\varepsilon f_{13} + i\frac{d}{dr} f_{13} + \frac{i}{\tanh r} 0 + \frac{ia}{\sinh r} f_{23} - m f_{22} = 0\,, \\
\varepsilon f_{22} - i\frac{d}{dr} f_{22} + \frac{i}{\tanh r} 0 - \frac{ia}{\sinh r} f_{12} - m f_{13} = 0\,, \\
\varepsilon f_{21} - i\frac{d}{dr} f_{21} - \frac{i}{\tanh r} f_{12} - \frac{ia}{\sinh r} f_{11} - m f_{14} = 0\,, \\
\varepsilon f_{12} + i\frac{d}{dr} f_{12} + \frac{i}{\tanh r} f_{21} + \frac{ia}{\sinh r} f_{22} - m f_{23} = 0\,, \\
\varepsilon f_{11} + i\frac{d}{dr} f_{11} + \frac{i}{\tanh r} 0 + \frac{ia}{\sinh r} f_{21} - m f_{24} = 0\,.
\end{gathered} \tag{12}$$

Будем использовать следующие обозначения:

$$\begin{gathered}
F_+ = f_{11} + f_{24}, \quad G_+ = f_{22} + f_{13}, \quad K_+ = f_{12} + f_{23}, \quad N_+ = f_{21} + f_{14}, \\
iF_- = f_{11} - f_{24}, \quad iG_- = f_{22} - f_{13}, \quad iK_- = f_{12} - f_{23}, \quad iN_- = f_{21} - f_{14}.
\end{gathered} \tag{13}$$

Комбинируя уравнения (12), получим:

$$\begin{gathered}
\varepsilon F_+ - \frac{d}{dr} F_- - \frac{a}{\sinh r} N_- - m F_+ = 0\,, \qquad -\varepsilon F_- - \frac{d}{dr} F_+ - \frac{a}{\sinh r} N_+ - m F_- = 0\,; \\
\varepsilon G_+ + \frac{d}{dr} G_- + \frac{a}{\sinh r} K_- - m G_+ = 0\,, \qquad -\varepsilon G_- + \frac{d}{dr} G_+ + \frac{a}{\sinh r} K_+ - m G_- = 0\,; \\
\varepsilon K_+ - \frac{d}{dr} K_- - \frac{1}{\tanh r} N_- - \frac{a}{\sinh r} G_- - m K_+ = 0\,, \\
-\varepsilon K_- - \frac{d}{dr} K_+ - \frac{1}{\tanh r} N_+ - \frac{a}{\sinh r} G_+ - m K_- = 0\,; \\
\varepsilon N_+ + \frac{d}{dr} N_- + \frac{1}{\tanh r} K_- + \frac{a}{\sinh r} F_- - m N_+ = 0\,, \\
-\varepsilon N_- + \frac{d}{dr} N_+ + \frac{1}{\tanh r} K_+ + \frac{a}{\sinh r} F_+ - m N_- = 0\,.
\end{gathered}$$

Осуществим в полученных уравнениях нерелятивистское приближение. Формальной заменой $\varepsilon \Rightarrow m + E$ выделяем энергию покоя. При этом после приведения подобных членов находим

$$\begin{gathered}
E F_+ - \frac{d}{dr} F_- - \frac{a}{\sinh r} N_- = 0\,, \quad - E F_- - \frac{d}{dr} F_+ - \frac{a}{\sinh r} N_+ - 2m F_- = 0\,; \\
E G_+ + \frac{d}{dr} G_- + \frac{a}{\sinh r} K_- = 0\,, \quad - E G_- + \frac{d}{dr} G_+ + \frac{a}{\sinh r} K_+ - 2m G_- = 0\,;
\end{gathered}$$

$$EK_+ - \frac{d}{dr}K_- - \frac{1}{\tanh r}N_- - \frac{a}{\sinh r}G_- = 0\,,$$
$$-EK_- - \frac{d}{dr}K_+ - \frac{1}{\tanh r}N_+ - \frac{a}{\sinh r}G_+ - 2mK_- = 0\,;$$
$$EN_+ + \frac{d}{dr}N_- + \frac{1}{\tanh r}K_- + \frac{a}{\sinh r}F_- = 0\,,$$
$$-EN_- + \frac{d}{dr}N_+ + \frac{1}{\tanh r}K_+ + \frac{a}{\sinh r}F_+ - 2mN_- = 0\,.$$

Будем считать, что нерелятивистская энергия значительно меньше энергии покоя, тогда получаем:

$$EF_+ = \frac{d}{dr}F_- + \frac{a}{\sinh r}N_-\,, \quad F_- = -\frac{1}{2m}\left(\frac{d}{dr}F_+ + \frac{a}{\sinh r}N_+\right);$$
$$EG_+ = -\frac{d}{dr}G_- - \frac{a}{\sinh r}K_-\,, \quad G_- = \frac{1}{2m}\left(\frac{d}{dr}G_+ + \frac{a}{\sinh r}K_+\right);$$
$$EK_+ = \frac{d}{dr}K_- + \frac{1}{\tanh r}N_- + \frac{a}{\sinh r}G_-\,,$$
$$K_- = -\frac{1}{2m}\left(\frac{d}{dr}K_+ + \frac{1}{\tanh r}N_+ + \frac{a}{\sinh r}G_+\right);$$
$$EN_+ = -\frac{d}{dr}N_- - \frac{1}{\tanh r}K_- - \frac{a}{\sinh r}F_-\,,$$
$$N_- = \frac{1}{2m}\left(\frac{d}{dr}N_+ + \frac{1}{\tanh r}K_+ + \frac{a}{\sinh r}F_+\right).$$

Исключая малые компоненты (со знаком «минус»), найдем уравнения для больших компонент (со знаком «плюс»):

$$2mEF_+ = -\frac{d}{dr}\left(\frac{d}{dr}F_+ + \frac{a}{\sinh r}N_+\right) + \frac{a}{\sinh r}\left(\frac{d}{dr}N_+ + \frac{1}{\tanh r}K_+ + \frac{a}{\sinh r}F_+\right),$$
$$2mEG_+ = -\frac{d}{dr}\left(\frac{d}{dr}G_+ + \frac{a}{\sinh r}K_+\right) + \frac{a}{\sinh r}\left(\frac{d}{dr}K_+ + \frac{1}{\tanh r}N_+ + \frac{a}{\sinh r}G_+\right),$$
$$2mEK_+ = -\frac{d}{dr}\left(\frac{d}{dr}K_+ + \frac{1}{\tanh r}N_+ + \frac{a}{\sinh r}G_+\right) +$$
$$+\frac{1}{\tanh r}\left(\frac{d}{dr}N_+ + \frac{1}{\tanh r}K_+ + \frac{a}{\sinh r}F_+\right) + \frac{a}{\sinh r}\left(\frac{d}{dr}G_+ + \frac{a}{\sinh r}K_+\right),$$
$$2mEN_+ = -\frac{d}{dr}\left(\frac{d}{dr}N_+ + \frac{1}{\tanh r}K_+ + \frac{a}{\sinh r}F_+\right) +$$
$$+\frac{1}{\tanh r}\left(\frac{d}{dr}K_+ + \frac{1}{\tanh r}N_+ + \frac{a}{\sinh r}G_+\right) + \frac{a}{\sinh r}\left(\frac{d}{dr}F_+ + \frac{a}{\sinh r}N_+\right).$$

После упрощений система уравнений примет вид

$$\hat{\Delta}F_+ = +a\frac{\cosh r}{\sinh^2 r}N_+ + a\frac{\cosh r}{\sinh^2 r}K_+\,,$$
$$\hat{\Delta}G_+ = +a\frac{\cosh r}{\sinh^2 r}K_+ + a\frac{\cosh r}{\sinh^2 r}N_+\,,$$
$$\hat{\Delta}K_+ = +\frac{1}{\sinh^2 r}N_+ + \frac{\cosh^2 r}{\sinh^2 r}K_+ + a\frac{\cosh r}{\sinh^2 r}F_+ + a\frac{\cosh r}{\sinh^2 r}G_+\,,$$
$$\hat{\Delta}N_+ = +\frac{1}{\sinh^2 r}K_+ + \frac{\cosh^2 r}{\sinh^2 r}N_+ + a\frac{\cosh r}{\sinh^2 r}F_+ + a\frac{\cosh r}{\sinh^2 r}G_+\,; \qquad (14)$$

здесь символ $\hat{\Delta}$ представляет оператор второго порядка

$$\hat{\Delta} = \left(\frac{d^2}{dr^2} + 2mE - \frac{a^2}{\sinh^2 r} \right).$$

Введем обозначения

$$F_+ + G_+ = f_+, \quad F_+ - G_+ = f_-, \quad K_+ + N_+ = g_+, \quad K_+ - N_+ = g_- ,$$

тогда предыдущая система представляется короче:

$$\hat{\Delta} f_- = 0 , \qquad (\hat{\Delta} + 1) g_- = 0 , \tag{15}$$

$$\hat{\Delta} f_+ = 2a \frac{\cosh r}{\sinh^2 r} g_+ , \qquad \hat{\Delta} g_+ = \frac{1 + \cosh^2 r}{\sinh^2 r} g_+ + 2a \frac{\cosh r}{\sinh^2 r} f_+ . \tag{16}$$

Рассмотрим отдельно нерелятивистское приближение для состояний с минимальным значением квантового числа $j = 0$. Для этого достаточно учесть, что $a = \sqrt{j(j+1)} = 0$ и что среди нерелятивистских компонент волновой функции Дирака – Кэлера часть составляющих обращается в нуль: $F_+ = 0, \; G_+ = 0$. Так что вместо системы (15)–(16) получаем только два уравнения:

$$\hat{\Delta} f_- = 0 , \qquad (\hat{\Delta} + 1) g_- = 0 , \qquad \hat{\Delta} = \frac{d^2}{dr^2} + 2mE . \tag{17}$$

Уравнения (17) решаются очевидным образом.

Заметим, что выведенные системы нерелятивистских уравнений являются корректными при включении дополнительного сферически симметричного поля – это осуществляется формальной заменой $E \;\; \Rightarrow \;\; E + U(r)$.

2. Решение радиальных уравнений. Уравнения (15) решаются в терминах гипергеометрических функций. Обратимся к анализу связанных между собой уравнений (16). С использованием более простых обозначений

$$f_+(r) = K(r), \quad g_+(r) = M(r), \quad 2mE = p^2$$

они могут быть переписаны как

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + p^2 - \frac{a^2}{\sinh^2 r} \right) K = \frac{2a \cosh r}{\sinh^2 r} M ,$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + p^2 - 1 - \frac{a^2 + 2}{\sinh^2 r} \right) M = \frac{2a \cosh r}{\sin^2 r} K . \tag{18}$$

Уравнения (18) преобразуем к переменной $x = \cosh^2 r$:

$$\left[(1-x) 4x \frac{d^2}{dx^2} + 2(1-2x) \frac{d}{dx} - p^2 - \frac{a^2}{1-x} \right] K = \frac{2a\sqrt{x}}{1-x} M , \tag{19}$$

$$\left[(1-x) 4x \frac{d^2}{dx^2} + 2(1-2x) \frac{d}{dx} - p^2 + 1 - \frac{a^2 + 2}{1-x} \right] M = \frac{2a\sqrt{x}}{1-x} K . \tag{20}$$

Исключая $M(x)$, найдем уравнение 4-го порядка для функции $K(x)$:

$$\frac{d^4 K}{dx^4} + \left[\frac{2}{x} - \frac{5}{1-x} \right] \frac{d^3 K}{dx^3} +$$

$$+\left[-\frac{1}{4x^2}-\frac{a^2+p^2+13}{2x}+\frac{-2a^2+15}{4(1-x)^2}-\frac{a^2+p^2+13}{2(1-x)}\right]\frac{d^2K}{dx^2}+$$

$$+\left[\frac{1}{4x^3}+\frac{1}{2x^2}+\frac{a^2+3p^2+11}{4x}-\frac{a^2}{4(x-1)^3}+\frac{a^2+3p^2+9}{4(1-x)^2}+\frac{a^2+3p^2+11}{4(1-x)}\right]\frac{dK}{dx}+$$

$$+\left[-\frac{a^2+p^2}{8x^3}+\frac{(a^2+p^2)(a^2+p^2-4)}{16x^2}+\frac{2a^4+3a^2p^2+p^4-4a^2-3p^2}{8x}+\frac{a^2\left(a^2-2\right)}{16(x-1)^4}+\right.$$

$$\left.+\frac{a^2\left(a^2+p^2-1\right)}{8(1-x)^3}+\frac{3a^4+4a^2p^2+p^4-4a^2-2p^2}{16(1-x)^2}+\frac{2a^4+3a^2p^2+p^4-4a^2-3p^2}{8(1-x)}\right]K=0. \quad (21)$$

Аналогично, исключая $K(x)$, получим уравнение для $M(x)$:

$$\frac{d^4M}{dx^4}+\left[\frac{2}{x}-\frac{5}{1-x}\right]\frac{d^3M}{dx^3}+$$

$$+\left[-\frac{1}{4x^2}-\frac{a^2+p^2+13}{2x}+\frac{-2a^2+15}{4(1-x)^2}-\frac{a^2+p^2+13}{2(1-x)}\right]\frac{d^2M}{dx^2}+$$

$$+\left[\frac{1}{4x^3}+\frac{3}{4x^2}+\frac{a^2+3p^2+12}{4x}+\frac{a^2}{4(1-x)^3}+\frac{a^2+3p^2+9}{4(1-x)^2}+\frac{a^2+3p^2+12}{4(1-x)}\right]\frac{dM}{dx}+$$

$$+\left[-\frac{a^2+p^2+1}{8x^3}+\frac{(a^2+p^2+1)(a^2+p^2-5)}{16x^2}+\frac{2a^4+3a^2p^2+p^4-4a^2-3p^2-4}{8x}+\right.$$

$$+\frac{a^2(a^2-2)}{16(1-x)^4}+\frac{a^2\left(a^2+p^2-1\right)}{8(1-x)^3}+\frac{3a^4+4a^2p^2+p^4-4a^2-2p^2-3}{16(1-x)^2}+$$

$$\left.+\frac{2a^4+3a^2p^2+p^4-4a^2-3p^2-4}{8(1-x)}\right]M=0. \quad (22)$$

Полученные уравнения 4-го порядка можно решить, применив метод факторизации. Оба дифференциальных оператора 4-го порядка можно единственным способом разложить в произведения двух операторов 2-го порядка.

Уравнение для $K(x)$ факторизуется следующим образом:

$$\left[\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{x}-\frac{7}{1-x}\right)\frac{d}{dx}+\frac{1}{4}\left(-\frac{p^2+a^2+10}{x}-\frac{p^2+a^2+10}{1-x}-\frac{a^2-6}{(1-x)^2}\right)\right]f(x)=0, \quad (23)$$

где

$$f(x)=\left[\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{3}{1-x}\right)\frac{d}{dx}+\frac{1}{4}\left(-\frac{p^2+a^2}{x}-\frac{p^2+a^2}{1-x}-\frac{a^2}{(1-x)^2}\right)\right]K. \quad (24)$$

Решим уравнение $f(x)=0$. Выполним подстановку $K(x)=x^A(1-x)^BF(x)$:

$$x(1-x)\frac{d^2F}{dx^2}+\left[\frac{1}{2}+2A-(2A+2B+2)x\right]\frac{dF}{dx}+$$

$$+\left[-\frac{p^2}{4}-(A+B)(A+B+1)+\frac{A(2A-1)}{2x}-\frac{a^2-2B(1+2B)}{4(1-x)}\right]F=0. \quad (25)$$

При $A,\ B$, выбранных согласно

$$A=0,\ \frac{1}{2},\qquad B=-\frac{1}{4}\pm\frac{1}{4}\sqrt{4a\quad+1}=\frac{-1\pm(2j+1)}{4}=+\frac{j}{2},\ -\frac{j+1}{2},$$

уравнение (25) упрощается

$$x(1-x)\frac{d^2F}{dx^2}+\left[\frac{1}{2}+2A-(2A+2B+2)x\right]\frac{dF}{dx}-\left[\frac{p^2}{4}+(A+B)(A+B+1)\right]F=0$$

и является уравнением для гипергеометрической функции с параметрами

$$a=A+B+\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\sqrt{p^2-1},\quad b=A+B+\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\sqrt{p^2-1},\quad c=\frac{1}{2}+2A.$$

Полученные две функции $K(x)=x^A(1-x)^BF(x)$ являются решениями уравнения 4-го порядка (21) для $K(x)$. Выберем

$$A=0,\quad B=+\frac{j}{2},\quad a=\frac{j-i\sqrt{p^2-1}}{2},\quad b=\frac{j+i\sqrt{p^2-1}}{2},\quad c=\frac{1}{2}.$$

Введем стандартные обозначения для двух линейно независимых решений Куммера

$$U_1(x)=F(a,b,c;x),\qquad U_5(x)=z^{1-c}F(a+1-c,b+1-c,2-c;x),$$
$$a=\frac{j+1-i\sqrt{2M\varepsilon-1}}{2},\quad b=\frac{j+1+i\sqrt{2M\varepsilon-1}}{2},\quad c=\frac{1}{2},$$

тогда линейно независимые решения уравнения (25) представляются как

$$\Psi_1^{\mathrm{I}}(x)=(1-x)^{(j-1)/2}U_1(x),\quad \Psi_1^{\mathrm{II}}(x)=(1-x)^{(j-1)/2}U_5(x).\tag{26}$$

Чтобы выделить решения с известным поведением около точки $r=0$ $(x=1)$, нужно использовать два линейно независимых решения, зависящих от аргумента $(1-x)$:

$$U_2(x)=F(a,b,a+b+1-c;1-x),$$
$$U_6(x)=(1-x)^{c-a-b}F(c-a,c-b,c+1-a-b;1-x).\tag{27}$$

В свою очередь уравнение для $M(x)$ факторизуется следующим образом:

$$\left[\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{x}-\frac{7}{1-x}\right)\frac{d}{dx}+\frac{1}{4}\left(\frac{-p^2-a^2-9}{x}+\frac{-p^2-a^2-9}{1-x}-\frac{a^2-6}{(1-x)^2}\right)\right]g(x)=0,\tag{28}$$

где

$$g(x)=\left[\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{3}{1-x}\right)\frac{d}{dx}+\frac{1}{4}\left(\frac{-p^2-a^2-1}{x}+\frac{-p^2-a^2-1}{1-x}-\frac{a^2}{(1-x)^2}\right)\right]M(x).\tag{29}$$

Уравнение $g(x)=0$ также решается в гипергеометрических функциях. С использованием подстановки $M(x)=x^C(1-x)^DF(x)$ получаем:

$$x(1-x)\frac{d^2F}{dx^2}+\left[\frac{1}{2}+2C-(2C+2D+2)x\right]\frac{dF}{dx}+$$
$$+\left[-\frac{p^2}{4}-\frac{1}{4}(1+2C+2D)^2+\frac{C(2C-1)}{2x}-\frac{a^2-2D(1+2D)}{4(1-x)}\right]F=0.\tag{30}$$

При C, D, выбранных согласно

$$C=0,\frac{1}{2},\qquad D=-\frac{1}{4}\pm\frac{1}{4}\sqrt{4a^2+1},$$

уравнение (30) упрощается

$$x(1-x)\frac{d^2F}{dx^2}+\left[\frac{1}{2}+2C-(2C+2D+2)x\right]\frac{dF}{dx}+\left[-\frac{p^2}{4}-\frac{1}{4}(1+2C+2D)^2\right]F=0$$

и является уравнением для гипергеометрической функции с параметрами

$$\alpha=C+D+\frac{1}{2}-\frac{ip}{2},\qquad \beta=C+D+\frac{1}{2}+\frac{ip}{2},\qquad \gamma=\frac{1}{2}+2C;$$

выберем

$$C=0,\quad D=+\frac{j}{2},\quad \alpha=\frac{j+1-ip}{2},\quad \beta=\frac{j+1+ip}{2},\quad \gamma=\frac{1}{2}.$$

Введем стандартные обозначения для двух линейно независимых решений Куммера

$$U_1(x)=F(\alpha,\beta,\gamma;x),\qquad U_5(x)=z^{1-\gamma}F(\alpha+1-\gamma,\beta+1-\gamma,2-\gamma;x).$$

Тогда два линейно независимых решения уравнения (30) представляются как

$$\Psi_2^{\mathrm{III}}(x)=(1-x)^{j/2}U_1(x),\quad \Psi_2^{\mathrm{IV}}(x)=(1-x)^{j/2}U_5(x);\tag{31}$$

выбирая любую другую пару независимых решений Куммера, также будем получать линейно независимые решения уравнения (30). Чтобы выделить решения с известным поведением около точки $r=0$ $(x=1)$, нужно использовать решения гипергеометрического уравнения, зависящие от аргумента $(1-x)$:

$$\begin{gathered}U_2(x)=F(\alpha,\beta,\alpha+\beta+1-\gamma;1-x),\\ U_6(x)=(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma+1-\alpha-\beta;1-x),\end{gathered}\tag{32}$$

при этом получаем решения с регулярным и сингулярным поведением в точке $x=1$ $(r=0)$.

Используя уравнения (19)–(20), можно найти явный вид сопутствующих функций в виде комбинаций гипергеометрических функций

$$\Psi_2^{\mathrm{I}}(x),\qquad \Psi_2^{\mathrm{II}}(x),\qquad \Psi_1^{\mathrm{III}}(x),\qquad \Psi_1^{\mathrm{IV}}(x).\tag{33}$$

Далее можно убедиться, что вронскиан для четверки решений

$$\Psi_1^{\mathrm{I}}(x),\qquad \Psi_1^{\mathrm{II}}(x),\qquad \Psi_1^{\mathrm{III}}(x),\qquad \Psi_1^{\mathrm{IV}}(x)\tag{34}$$

отличен от нуля. То же самое справедливо для решений

$$\Psi_2^{I}(x),\qquad \Psi_2^{II}(x),\qquad \Psi_2^{III}(x),\qquad \Psi_2^{IV}(x).\tag{35}$$

Это означает, что найденные четверки функций являются линейно независимыми решениями уравнений 4-го порядка (21) и (22).

Заключение. Уравнение Дирака – Кэлера в нерелятивистском пределе решено точно на фоне пространства с геометрией Лобачевского. Для случая минимального значения общего сохраняющегося углового момента, $j=0$, радиальные уравнения приведены к тривиальным дифференциальным уравнениям второго порядка, которые решаются в элементарных функциях. В случае ненулевых значений углового момента, $j=1,2,3,...$, радиальные уравнения сводятся к двум сложным обыкновенным дифференциальным уравнениям четвертого порядка. С применением метода факторизации найдено общее решение этих уравнений, включающее четыре фундаментальных решения, последние представлены в виде комбинаций из гипергеометрических функций.

Найденные решения нерелятивистского уравнения Дирака – Кэлера на фоне пространства Лобачевского не раскладываются в линейные комбинации функций, отвечающих решениям уравнений Паули в пространстве Лобачевского, что указывает на невозможность фермионной интерпретации поля Дирака – Кэлера.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (грант № Ф14АРМ-021).

Список использованной литературы

1. *Стражев, В. И.* Уравнение Дирака – Кэлера, классическое поле / В. И. Стражев, И. А. Сатиков, В. А. Ционенко. – Минск: БГУ, 2007.

2. *Плетюхов, В. А.* Группа Лоренца и теория релятивистских волновых уравнений / В. А. Плетюхов, В. М. Редьков, В. И. Стражев. – Минск: Беларус. навука, 2015.

3. *Редьков, В. М.* Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца / В. М. Редьков. – Минск: Беларус. навука, 2009.

4. *Варшалович, Д. А.* Квантовая теория углового момента / Д. А. Варшалович, А. Н. Москалев, В. К. Херсонский. – Л.: Наука и техника, 1975.

5. *Red'kov, V. M.* Quantum mechanics in spaces of constant curvature / V. M. Red'kov, E. M. Ovsiyuk. – New York: Nova Science Publ, 2012.

Поступила в редакцию 08.08.2015