УДК 517.968

Ф. В. ЧУМАКОВ[1], *С. И. ВАСИЛЕЦ*[2]

ОБ ОДНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ПЕРВОГО РОДА С ПОЛЯРНО-ЛОГАРИФМИЧЕСКИМ ЯДРОМ

[1]*Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь,*
e-mail: fchumakov@tut.by
[2]*Белорусский государственный педагогический университет им. Максима Танка,*
Минск, Беларусь, e-mail: svasilets@tut.by

Интегральное уравнение первого рода с полярно-логарифмическим ядром с помощью предельных значений надлежащим образом выбранной регулярной ветви многозначной аналитической функции и формул Сохоцкого для интеграла Коши сводится к последовательному решению характеристического особого уравнения и обращению интеграла Коши. Решение выписывается в замкнутой форме.

Ключевые слова: интегральное уравнение, многозначная аналитическая функция, регулярная ветвь многозначной аналитической функции, формулы Сохоцкого, характеристическое особое интегральное уравнение, интеграл Коши.

F. V. CHYMAKOV[1], *S. I. VASILETS*[2]

FIRST-KIND INTEGRAL EQUATION WITH POLAR-LOGARITHMIC KERNEL

[1]*Belarusian State University, Minsk, Belarus, e-mail: fchumakov@tut.by*
[2]*Belarusian State Pedagogical University named after Maxim Tank, Minsk, Belarus,*
e-mail: svasilets@tut.by

The first-kind integral equation with polar-logarithmic kernel reduces to successive solution of the characteristic singular equation and to inversion of the Cauchy integral using limiting values of the appropriately selected regular branch of the multi-valued analytic function and the Sokhotskii formulas for the Cauchy integral. The solution is written in closed form.

Keywords: integral equation, many-valued analytic function, regular branch of multi-valued analytic function, Sokhotskii formulas, characteristic singular integral equation, Cauchy integral.

Дадим в замкнутой форме решение уравнения

$$a(x)\varphi(x)+b(x)\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-x}+\frac{a(x)}{\pi^2}\int_{\alpha}^{\beta}\ln\left(\frac{(x-\alpha)(\beta-\tau)}{(\beta-x)(\tau-\alpha)}\right)\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-x}=f(x), \tag{1}$$

где $\alpha < x < \beta$, $\varphi(x)$ – искомое решение, $a(x)$, $b(x)$, $f(x)$ – заданные на отрезке $[\alpha, \beta]$ гельдеровские функции [1]. Для решения этого уравнения применим метод аналитического продолжения. Для этого введем вспомогательную аналитическую в комплексной плоскости функцию вида

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha}^{\beta}\ln\left(\frac{(z-\alpha)(\beta-\tau)}{(z-\beta)(\tau-\alpha)}\right)\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-z}, \tag{2}$$

которая является многозначной аналитической функцией. Выберем однозначную ветвь этой функции. Для этого сделаем разрез в плоскости, соединяющий точки ветвления, и зададим правило вычисления значений выбранной ветви по формуле $\ln z=\ln|z|+i\arg z$, где $-\pi<\arg z\le\pi$.

© Чумаков Ф. В., Василец С. И., 2016

Выбранная ветвь будет однозначной аналитической функцией в плоскости с указанным разрезом и будет обращаться в бесконечности в нуль порядка единицы. На верхнем $\Phi^+(x)$ и нижнем $\Phi^-(x)$ берегах разреза она будет принимать различные предельные значения. Найдем эти предельные значения, записав формулу (2) в виде суммы двух интегралов

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\alpha^\beta \ln\left(\frac{(z-\alpha)(\beta-\tau)}{(z-\beta)(\tau-\alpha)}\right)\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-z}=\frac{1}{2\pi i}\int_\alpha^\beta \ln\left(\frac{\beta-\tau}{\tau-\alpha}\right)\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-z}+\frac{1}{2\pi i}\ln\left(\frac{z-\alpha}{z-\beta}\right)\int_\alpha^\beta\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-z}.$$

Далее имеем

$$\Phi^+(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)\ln\left(\frac{\beta-x}{x-\alpha}\right)+\frac{1}{2\pi i}\int_\alpha^\beta \ln\left(\frac{\beta-\tau}{\tau-\alpha}\right)\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-x}+\left(\ln\frac{x-\alpha}{\beta-x}-\pi i\right)\left(\frac{1}{2}\varphi(x)+\frac{1}{2\pi i}\int_\alpha^\beta\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-x}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\varphi(x)\ln\left(\frac{\beta-x}{x-\alpha}\right)+\frac{1}{2}\varphi(x)\ln\frac{x-\alpha}{\beta-x}-\frac{\pi i}{2}\varphi(x)-\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-x}+\frac{1}{2\pi i}\int_\alpha^\beta \ln\left(\frac{(x-\alpha)(\beta-\tau)}{(\beta-x)(\tau-\alpha)}\right)\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-z}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\Phi^+(x)=-\frac{\pi i}{2}\varphi(x)-\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-x}+\frac{1}{2\pi i}\int_\alpha^\beta \ln\left(\frac{(x-\alpha)(\beta-\tau)}{(\beta-x)(\tau-\alpha)}\right)\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-x}.$$

Аналогично находим

$$\Phi^-(x)=-\frac{1}{2}\varphi(x)\ln\left(\frac{\beta-x}{x-\alpha}\right)+\frac{1}{2\pi i}\int_\alpha^\beta \ln\left(\frac{\beta-\tau}{\tau-\alpha}\right)\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-x}+\left(\ln\frac{x-\alpha}{\beta-x}+\pi i\right)\times$$

$$\times\left(-\frac{1}{2}\varphi(x)+\frac{1}{2\pi i}\int_\alpha^\beta\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-x}\right)=-\frac{\pi i}{2}\varphi(x)+\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-x}+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_\alpha^\beta \ln\left(\frac{(x-\alpha)(\beta-\tau)}{(\beta-x)(\tau-\alpha)}\right)\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-x}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\Phi^-(x)=-\frac{\pi i}{2}\varphi(x)+\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-x}+\frac{1}{2\pi i}\int_\alpha^\beta \ln\left(\frac{(x-\alpha)(\beta-\tau)}{(\beta-x)(\tau-\alpha)}\right)\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-x}.$$

Здесь мы учли, что на верхнем берегу разреза предельное значение функции $\ln\left(\frac{z-\alpha}{z-\beta}\right)$ равно $\ln\frac{x-\alpha}{(\beta-x)e^{\pi i}}=-\pi i+\ln\frac{x-\alpha}{\beta-x}$, а на нижнем разрезе $-\ln\frac{(x-\alpha)e^{2\pi i}}{(\beta-x)e^{\pi i}}=\pi i+\ln\frac{x-\alpha}{\beta-x}$. Находим разность и сумму предельных значений функции $\Phi(z)$:

$$\Phi^+(x)-\Phi^-(x)=-\int_\alpha^\beta\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-x},\tag{3}$$

$$\Phi^+(x)+\Phi^-(x)=-\pi i\varphi(x)+\frac{1}{\pi i}\int_\alpha^\beta \ln\left(\frac{(x-\alpha)(\beta-\tau)}{(\beta-x)(\tau-\alpha)}\right)\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-x}.\tag{4}$$

Заметим, что введенная функция $\Phi(z)$ обладает свойствами интеграла типа Коши, что дает нам основание представить ее в виде некоторого интеграла типа Коши $\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\alpha^\beta\frac{\psi(\tau)}{\tau-z}d\tau$. По формулам Сохоцкого находим разность и сумму предельных значений введенного интеграла типа Коши

$$\Phi^{+}(x)-\Phi^{-}(x)=\psi(x), \tag{5}$$

$$\Phi^{+}(x)+\Phi^{-}(x)=\frac{1}{\pi i}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\psi(\tau)}{\tau-x}d\tau. \tag{6}$$

Сравнивая сначала формулы (3) и (5), а затем формулы (4) и (6), придем к равенствам

$$\psi(x)=-\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-x}, \tag{7}$$

$$\frac{1}{\pi i}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\psi(\tau)d\tau}{\tau-x}=-\pi i\varphi(x)+\frac{1}{\pi i}\int_{\alpha}^{\beta}\ln\left(\frac{(x-\alpha)(\beta-\tau)}{(\beta-x)(\tau-\alpha)}\right)\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-x}. \tag{8}$$

Подставляя в уравнение (1) значения интегралов из формул (7), (8), придем к характеристическому особому уравнению вида

$$b(x)\psi(x)-\frac{a(x)}{\pi^2}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\psi(\tau)}{\tau-x}d\tau=-f(x), \tag{9}$$

решение которого приведено в монографии [2, § 47]. Мы воспользуемся здесь решением, которое приведено в [3, § 30]. Решение $\varphi(x)$ исходного уравнения (1) найдем путем обращения особого интеграла (7) после того, как будет определено решение $\psi(x)$ уравнения (9). Заметим, что уравнение (7) является частным случаем уравнения (9).

Итак, сначала найдем решение характеристического особого уравнения (9). Обозначим $G(x)=\dfrac{\pi b(x)+a(x)i}{\pi b(x)-a(x)i}$. Так как модуль этой функции $|G(x)|=\left|\dfrac{\pi b(x)+a(x)i}{\pi b(x)-a(x)i}\right|=1,$ то можно записать $G(x)=e^{\theta(x)i}$, где $\theta(x)=\arg G(x)$. Выберем аргумент так, чтобы выполнялось неравенство $0\le\theta(x)<2\pi$. Число $\chi=\operatorname{ind}\dfrac{\pi b(x)+a(x)i}{\pi b(x)-a(x)i}$ называется индексом уравнения (9). Далее заметим, что разрешимость особого уравнения (9), количество его решений и их вид зависят от индекса χ. Величина же индекса зависит от того, в каком классе ищутся решения уравнения. Будем предполагать, что имеет место нормальный случай уравнения (9), т. е. коэффициенты уравнения $a(x)$,$b(x)$ одновременно не обращается ни в нуль, ни в бесконечность на отрезке интегрирования. Другими словами, $(\pi b(x)+a(x)i)(\pi b(x)-a(x)i)=\pi^2b^2(x)+a^2(x)=A(x)\ne 0.$

Решение уравнения (9) будем искать в одном из классов функций: $H([\alpha,\beta])$ – функции, удовлетворяющие условию Гельдера на $[\alpha,\beta]$); $H^*([\alpha,\beta])$ – гельдеровские функции с интегрируемыми особенностями на концах; $H_\alpha^*([\alpha,\beta))$ – гельдеровские функции, ограниченные в α и неограниченные в β); $H_\alpha^*((\alpha,\beta])$ – гельдеровские функции, ограниченные в β и неограниченные в α. Обозначим через X одно из вышеназванных пространств. Индекс уравнения (9) в пространстве X вычисляется по формуле $\chi=\left[\dfrac{\theta(\beta)}{2\pi}\right]+n_\alpha+n_\beta-1,$ где числа n_α,n_β вычисляются по следующему правилу: $n_\alpha=0$, если ищется ограниченное решение при $x\to\alpha$, и $n_\alpha=1$, если ищется неограниченное решение при $x\to\alpha$. Аналогично определяется n_β. Другими словами, индекс χ равен

$$\chi=\left[\frac{\theta(\beta)}{2\pi}\right]+\begin{cases}1 \quad \text{в случае класса } H^*(\alpha,\beta),\\ 0 \quad \text{в случае класса } H^*{}_\alpha \text{ или } H^*{}_\beta,\\ -1 \quad \text{в случае класса } H.\end{cases} \tag{10}$$

Далее приведем формулы

$$\mu_\alpha = 1 - n_\alpha - \frac{\theta(\alpha)}{2\pi},\ \mu_\beta = \frac{\theta(\beta)}{2\pi} - \left[\frac{\theta(\beta)}{2\pi}\right] - n_\beta, \quad -1 < \mu_\alpha \mu_\beta < 1. \tag{11}$$

Если выполняются условия $\chi \geq 0$ в пространстве X, то уравнение (9) безусловно разрешимо в X и его общее решение дается формулой

$$\psi(x) = \frac{a(x)}{A(x)} Z_0(x)(x-\alpha)^{\mu_\alpha} (\beta - x)^{\mu_\beta} P_{\chi-1}(x) - \pi^2 \frac{b(x)}{A(x)} f(x) -$$

$$- \frac{a(x)}{A(x)} Z_0(x) \int_\alpha^\beta \left(\frac{x-\alpha}{t-\alpha}\right)^{\mu_\alpha} \left(\frac{\beta - x}{\beta - t}\right)^{\mu_\beta} \frac{f(t)}{Z_0(t)} \frac{dt}{(t-x)}, \tag{12}$$

где $P_{\chi-1}(x)$ – многочлен степени $\chi - 1$ с произвольными коэффициентами, причем $P_{\chi-1}(x) \equiv 0$ при $\chi = 0$,

$$Z_0(x) = \exp \frac{1}{2\pi} \left[\int_\alpha^\beta \frac{\theta(t)\,dt}{t-x} + \theta(\alpha) \ln(x-\alpha) - \theta(\beta) \ln(\beta - x) \right] \tag{13}$$

является гельдеровскай функцией и нигде не обращается в нуль. Для сокращения записи формулу (12) будем записывать в виде

$$\psi(x) = Rf(x) + \sum_{k=1}^{\chi} c_k \psi_k(x), \tag{14}$$

где

$$Rf(x) = -\frac{\pi^2 b(x)}{A(x)} f(x) - \frac{a(x)}{A(x)} Z_0(x) \int_\alpha^\beta \left(\frac{x-\alpha}{t-\alpha}\right)^{\mu_\alpha} \left(\frac{\beta - x}{\beta - t}\right)^{\mu_\beta} \frac{f(t)}{Z_0(t)} \frac{dt}{(t-x)},$$

$$\psi_k(x) = \frac{a(x)}{A(x)} Z_0(x)(x-\alpha)^{\mu_\alpha} (\beta - x)^{\mu_\beta} x^{k-1}.$$

Если же $\chi < 0$, то для разрешимости уравнения (9) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\int_\alpha^\beta \frac{(x-\alpha)^{k-1} f(x)\,dx}{Z_0(x)(x-\alpha)^{\mu_\alpha} (\beta - x)^{\mu_\beta}} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, |\chi|. \tag{15}$$

При выполнении этих условий уравнение (9) имеет единственное решение в пространстве X, причем в формуле (12) следует считать $P_{\chi-1}(x) \equiv 0$. Далее, для получения решения уравнения (1) надо обратить интеграл

$$\frac{1}{\pi} \int_\alpha^\beta \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau - x} = -\frac{1}{\pi} \psi(x) = -\frac{1}{\pi} Rf(x) - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\chi} c_k \psi_k(x), \tag{16}$$

применяя формулы обращения уравнения (16), приведенные в монографии [2, § 42]. Индекс χ уравнения (9) в пространстве X будем называть также индексом исходного уравнения (1). Для получения решения $\varphi(x)$ уравнения (1) в классе X необходимо при обращении интеграла типа Коши (16) рассматривать решения $\psi(x)$ уравнения (9) только в классе ограниченных функций, так как в противном случае могут появляться при обращении интеграла (16) функции, обращающиеся на концах отрезка в бесконечность порядка не меньшего единицы. Итак, пусть решение уравнения (9) в классе ограниченных функций дается формулой (14) при $\chi \geq 0$. Решение уравнения (16) будем искать в одном из классов X.

1. Решение уравнения (1) в классе функций, ограниченных на обоих концах отрезка (класс $H([\alpha,\beta])$). Интеграл (16) рассматриваем как особое характеристическое уравнение, решение которого $\varphi(x)$ ищем в классе ограниченных функций. Индекс уравнения (16) в классе ограниченных функций, определяемый по формуле (10), равен $\chi_1 = -1$, так как $n_\alpha = n_\beta = 0,\ \ \mu_\alpha = \mu_\beta = \frac{1}{2}$. Уравнение (16) в этом случае разрешимо лишь при выполнении условия

$$\int_\alpha^\beta \frac{\psi(\tau)}{\sqrt{(\tau-\alpha)(\beta-\tau)}}\frac{d\tau}{\tau - x} = 0 \Leftrightarrow \int_\alpha^\beta \frac{Rf(\tau)d\tau}{\sqrt{(\tau-\alpha)(\beta-\tau)}} + \sum_{k=1}^{\chi} c_k \int_\alpha^\beta \frac{\psi_k(\tau)d\tau}{\sqrt{(\tau-\alpha)(\beta-\tau)}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_\alpha^\beta \frac{Rf(\tau)d\tau}{\sqrt{(\tau-\alpha)(\beta-\tau)}} = 0, \int_\alpha^\beta \frac{\psi_k(\tau)d\tau}{\sqrt{(\tau-\alpha)(\beta-\tau)}} = 0, \quad k = 1,2,\ldots,\chi. \tag{17}$$

При выполнении условий (17) решение $\varphi(x)$ уравнения (16), а значит, и уравнения (1) в классе $H([\alpha,\beta])$, дается формулой

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \sum_{k=1}^{\chi} c_k \varphi_k(x), \tag{18}$$

где

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\pi^2}\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}\int_\alpha^\beta \frac{Rf(\tau)}{\sqrt{(\tau-\alpha)(\beta-\tau)}}\frac{d\tau}{\tau-x}, \tag{19}$$

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{\pi^2}\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}\int_\alpha^\beta \frac{\psi_k(\tau)}{\sqrt{(\tau-\alpha)(\beta-\tau)}}\frac{d\tau}{\tau-x}, \quad k = 1,2,\ldots,\chi.$$

Здесь $\varphi_0(x)$ – решение неоднородного уравнения (1), а $\varphi_k(x)$ (k =1,2,…,χ) – система линейно независимых решений однородного уравнения (1). Если же $\chi = 0$, то решение дается формулой (19). В случае $\chi < 0$ при выполнении условий (15), а также условия

$$\int_\alpha^\beta \frac{Rf(\tau)d\tau}{\sqrt{(\tau-\alpha)(\beta-\tau)}} = 0, \tag{20}$$

решение уравнения (1) дается формулой (19).

2. Решение уравнения (1) в классе функций $H_\alpha^*([\alpha,\beta])$. В этом случае индекс уравнения (16) $\chi_1 = 0$, так как $n_\alpha = 0$, $n_\beta = 1$, $\theta(x) = \pi$. Имеем $\mu_\alpha = \frac{1}{2},\ \mu_\beta = -\frac{1}{2}$. Решение уравнения (16), а следовательно, и уравнения (1), при $\chi > 0$ дается формулой (18), где

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\pi^2}\sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-x}}\int_\alpha^\beta \sqrt{\frac{\beta-\tau}{\tau-\alpha}}\frac{Rf(\tau)}{\tau-x}d\tau,$$

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{\pi^2}\sqrt{\frac{x-\alpha}{\beta-x}}\int_\alpha^\beta \sqrt{\frac{\beta-\tau}{\tau-\alpha}}\frac{\psi_k(\tau)}{\tau-x}d\tau, \quad k = 1,2,\ldots,\chi. \tag{21}$$

При $\chi = 0$ решение уравнения (1) дается формулой (21). Если же $\chi < 0$, то уравнение (1) при выполнении условий (15) и условия $\int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\frac{\beta - \tau}{\tau - \alpha}} Rf(\tau) d\tau = 0$ имеет единственное решение (21).

3. Решение уравнения (1) в классе функций $H^*(\alpha,\beta)$. В этом случае индекс уравнения (16) $\chi_1 = 1$, так как $n_\alpha = 0$, $n_\beta = 1$, $\theta(x) = \pi$. Имеем $\mu_\alpha = -\frac{1}{2}$, $\mu_\beta = -\frac{1}{2}$. Решение уравнения (16), а следовательно, и уравнения (1), при $\chi > 0$ дается формулой (18), где

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta - x)}} \left(c_0 + \frac{1}{\pi^2} \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{Rf(\tau)}{\sqrt{(\tau - \alpha)(\beta - \tau)}} \frac{d\tau}{\tau - x} \right),$$
$$\varphi_k(x) = \frac{1}{\pi^2 \sqrt{(x-\alpha)(\beta - x)}} \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{\psi_k(\tau)}{\sqrt{(\tau - \alpha)(\beta - \tau)}} \frac{d\tau}{\tau - x}. \qquad (22)$$

При $\chi = 0$ решение уравнения (1) дается формулой (22). Если же $\chi < 0$, то уравнение (1) при выполнении условий (15) имеет единственное решение, которое дается формулой (22).

Список использованной литературы

1. *Чумаков, Ф. В.* Интегральные уравнения с логарифмическим ядром / Ф. В. Чумаков // Дифференц. уравнения. – 1968. – Т. 4, № 2. – С. 336–346.
2. *Гахов, Ф. Д.* Краевые задачи / Ф. Д. Гахов.– М.: Наука, 1977.
3. *Самко, С. Г.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. – Минск: Наука и техника, 1987.

Поступила в редакцию 15.04.2016