УДК 517.958;517.956.32

В. И. КОРЗЮК[1,2]*, С. И. ПУЗЫРНЫЙ*[1]

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С НЕГЛАДКИМИ УСЛОВИЯМИ КОШИ

[1]*Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь,*
korzyuk@bsu.by, serg.p94@gmail.com
[2]*Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь,*
korzyuk@bsu.by

Изучается классическое решение задачи Коши и граничной задачи для одномерного неоднородного волнового уравнения. Уравнения в задачах задаются в полуплоскости и полуполосе двух независимых переменных. На нижнем основании задаются условия Коши, негладкие в точке. В граничной задаче на боковых границах области задаются гладкие условия первого рода. Решение задачи строится методом характеристик. Доказывается единственность, устанавливаются условия, при которых существует кусочно-гладкое решение.

Ключевые слова: одномерное волновое уравнение, неоднородное уравнение, смешанная задача, негладкие начальные условия.

V. I. KORZYUK[1,2]*, S. I. PUZYRNYI*[1]

CLASSICAL SOLUTION OF MIXED PROBLEMS FOR THE ONE-DIMENSIONAL WAVE EQUATION WITH CAUCHY NONSMOOTH CONDITIONS

[1] *Belarusian State University, Minsk, Belarus,*
korzyuk@bsu.by, serg.p94@gmail.com
[2]*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus,*
korzyuk@bsu.by

The article is concerned with studying the classical solution of the Cauchy problem and the boundary problem for the one-dimensional nonhomogeneous wave equation. Equations in the problems under consideration are defined in the half-plane and in the half-band of two independent variables. The Cauchy nonsmooth conditions are assigned at the bottom of the region. First-kind smooth conditions are defined at the side boundaries of the region. Analytical solutions of problems are obtained using the method of characteristics. The uniqueness of the solution is proved, and the conditions, under which the piecewise smooth solution exists, are determined.

Keywords: one-dimensional wave equation, nonhomogeneous equation, mixed problem, nonsmooth initial conditions.

Введение. В теории дифференциальных уравнений с частными производными особое место занимают результаты, полученные методом характеристик. Построение классических решений этим методом для доказательства существования и единственности рассматриваемых задач зависит не только от правильного выбора вида граничных условий для дифференциальных уравнений с частными производными, но и от выполнения условий согласования заданных функций в угловых точках области. Как показывают результаты, от вида условий согласования зависят гладкость решений и постановка задач (см. [1–6] и др.). Как правило, условия согласования являются необходимыми и достаточными при доказательстве сответствующих утверждений. Аналогичные условия согласования возникают при решении задач, для которых задаются граничные условия с помощью негладких функций. Физическим процессом, который моделируется граничной задачей для одномерного волнового уравнения с негладкими условиями Коши, является процесс малых колебаний тонкой струны, оттянутой в начальный момент времени с помощью силы, приложенной только в одной точке.

Основное явление в теории механического удара – это распространение волн смещений в твердых телах. Экспериментальное изучение почти всех явлений удара весьма затруднительно. Наибольшая сложность состоит в том, что время, в течение которого протекает процесс удара, – относительно короткое. Основы волновой теории механического удара были созданы Б. Сен-Венаном [7–10] и другими исследователями [11–15]. При аналитическом изучении вызванных ударом колебаний интерес представляют задачи, в которых груз после удара остается в соприкосновении с ударяемым телом, в котором рассматриваются и описываются колебательные процессы [16–18].

Метод характеристик позволяет выписывать решения в явном аналитическом виде для многих задач, что дает возможность эффективно использовать при этом и численные методы. Близкими к изучаемым задачам в данной статье в случае гладких функций в граничных условиях для волнового уравнения являются задачи, представленные в работах [19, 20].

Постановка задачи. Найдем решение одномерного волнового уравнения

$$\left(\partial_t^2 u - a^2 \partial_x^2 u\right)(t,x) = f(t,x) \tag{1}$$

в области $Q = (0,\infty)\times(0,l)$ двух независимых переменных $(t,x)\in Q$, где $l\in\mathbb{R}$, $0<l<+\infty$, $\partial_t^2 = \partial^2/\partial t^2$, $\partial_x^2 = \partial^2/\partial x^2$. К уравнению (1) на нижней границе ∂Q области Q присоединяются условия Коши

$$u(0,x) = \varphi(x), \qquad (\partial_t u)(0,x) = \psi(x), \qquad x\in[0,l], \tag{2}$$

а на боковых частях границы ∂Q – граничные условия Дирихле

$$u(t,0) = \mu^{(1)}(t), \qquad u(t,l) = \mu^{(2)}(t), \qquad t\in[0,\infty]. \tag{3}$$

Будем предполагать, что функции $f, \psi, \mu^{(j)}$ $(j=1,2)$ достаточно гладкие, а именно: $f\in C^1\left(\overline{Q}\right)$, $\psi\in C^1([0,l])$, $\mu^{(j)}\in C^2([0,\infty])$, где $\overline{Q}=[0,\infty]\times[0,l]$ – замыкание области Q. Функция φ является кусочно гладкой и определяется формулой

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi^{(1)}(x), & x\in[0,x^*), \\ A, & x = x^*, \\ \varphi^{(2)}(x), & x\in(x^*,l], \end{cases} \tag{4}$$

где $\varphi^{(1)}\in C^2([0,x^*))$, $\varphi^{(2)}\in C^2((x^*,l])$, $x^*\in[0,l]$.

Задача состоит в нахождении функции $u:\overline{Q}\ni(t,x)\to u(t,x)\in\mathbb{R}$, удовлетворяющей уравнению (1) на $\overline{Q}$ и условиям (2), (3). Такое решение имеется не всегда. Его существование и единственность зависят от выполения условий согласования в угловых точках (0, 0), (0, l) и в особой точке (0, x^*), которые будут выписаны ниже в явном виде.

Задача для однородного уравнения. Для начала в (1) положим $f(t,x)=0$, $(t,x)\in\overline{Q}$ и рассмотрим граничную задачу для однородного уравнения

$$\left(\partial_t^2 u - a^2 \partial_x^2 u\right)(t,x) = 0, \quad (t,x)\in Q = (0,\infty)\times(0,l), \tag{5}$$

с указанными выше начальными условиями (2) и граничными условиями (3).

Для построения решения задачи (5), (2)–(4) применим метод характеристик. Выпишем общее решение рассматриваемого уравнения. Оно определено, например, в [20] и имеет вид

$$u(t,x)=g_1(x+at)+g_2(x-at),\quad (t,x)\in\bar{Q}, \tag{6}$$

где $g_j\ (j=1,2)$ – произвольные достаточно гладкие функции, определенные в $\mathbb{R}$.

Чтобы найти функции g_1 и g_2 и определить таким образразом решение расматриваемой задачи, используем начальные и граничные условия.

Введем функции

$$\begin{gathered} g_1^{(k)}(z),\quad z\in(kl,(k+1)l),\\ g_2^{(k)}(z),\quad z\in(-kl,-(k-1))l, \end{gathered} \tag{7}$$

$k=0,1,2,\ldots$. Эти функции определяют g_1 и g_2 на соответствующих промежутках по формулам

$$\begin{gathered} g_1(z)=g_1{}^{(k)}(z),\quad z\in(kl,(k+1)l),\\ g_2(z)=g_2{}^{(k)}(z),\quad z\in(-kl,-(k-1)l). \end{gathered} \tag{8}$$

Разобьем Q на подобласти

$$Q^{(i,j)}=\{(t,x)\in Q\,|\,il<x+at<(i+1)l,\ -jl<x-at<-(j-1)l\},\quad i,j=0,1,2,\ldots, \tag{9}$$

характеристиками уравнения (5):

$$\begin{gathered} x+at=il,\quad i\in\mathbb{N},\\ x-at=-jl,\quad j\in\mathbb{N}_0. \end{gathered} \tag{10}$$

Причина, по которой вводились функции (7) и подобласти (9), будет указана ниже. Учитывая введенные обозначения, общее решение запишется в виде

$$u(t,x)=g_1^{(i)}(x+at)+g_2^{(j)}(x-at),\quad (t,x)\in Q^{(i,j)},\quad i,j=0,1,2,\ldots\ . \tag{11}$$

Таким образом, для нахождения решения задачи (5), (2)–(4) необходимо определить функции $g_1^{(i)}$, $g_2^{(j)}$ $i,j=0,1,2,\ldots$.

Сформулируем и докажем лемму о виде функций g_1 и g_2.

Л е м м а. *Функции* g_1 *и* g_2 *из соотношения* (6) *согласно* (8) *определяются по формулам* (12) *и* (13):

$$\begin{gathered} g_1^{(0)}(z)=\frac{1}{2a}\int_0^z\psi(\xi)d\xi+\begin{cases}\frac{1}{2}\varphi^{(1)}(z)+C_1, & z\in(0,x^*),\\ \frac{1}{2}\varphi^{(2)}(z)+C_2, & z\in(x^*,l),\end{cases}\\ g_2^{(0)}(z)=-\frac{1}{2a}\int_0^z\psi(\xi)d\xi+\begin{cases}\frac{1}{2}\varphi^{(1)}(z)-C_1, & z\in(0,x^*),\\ \frac{1}{2}\varphi^{(2)}(z)-C_2, & z\in(x^*,l);\end{cases} \end{gathered} \tag{12}$$

$$g_1^{(k+1)}(z)=\mu_2\left(\frac{z-l}{a}\right)-g_2^{(k)}(2l-z),\quad (k+1)l<z<(k+2)l,$$

$$g_2^{(k+1)}(z) = \mu_1\left(-\frac{z}{a}\right) - g_1^{(k)}(-z), \quad -(k+1)l < z < -kl, \tag{13}$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Доказательство. Формулы (12) получаем, удовлетворяя условиям Коши. Оставшиеся функции (7) определяются из граничных условий. Запишем условия (3) для общего решения в областях $Q^{(0,1)}$ и $Q^{(1,0)}$:

$$\begin{gathered} u(t,0) = g_1^{(0)}(at) + g_2^{(1)}(-at) = \mu_1(t), \quad 0 < at < l, \; -l < -at < 0, \\ u(t,l) = g_1^{(1)}(l+at) + g_2^{(0)}(l-at) = \mu_2(t), \quad l < l+at < 2l, \; 0 < l-at < l. \end{gathered} \tag{14}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{gathered} g_1^{(1)}(z) = \mu_2\left(\frac{z-l}{a}\right) - g_2^{(0)}(2l-z), \quad l < z < 2l, \\ g_2^{(1)}(z) = \mu_1\left(-\frac{z}{a}\right) - g_1^{(0)}(-z), \quad -l < z < 0. \end{gathered} \tag{15}$$

Теперь докажем формулы (13) методом математической индукции. Запишем граничные условия в областях $Q^{(k,k+1)}$ и $Q^{(k+1,k)}$:

$$\begin{gathered} u(t,0) = g_1^{(k)}(at) + g_2^{(k+1)}(-at) = \mu_1(t), \quad (t,0) \in Q^{(k,k+1)}, \\ u(t,l) = g_1^{(k+1)}(l+at) + g_2^{(k)}(l-at) = \mu_2(t), \quad (t,l) \in Q^{(k+1,k)}. \end{gathered} \tag{16}$$

Выражая $g_1^{(k+1)}(z)$ и $g_2^{(k+1)}(z)$, получим формулы (13).

Таким образом, формулы (12) и (13) доказаны. С их помощью можно построить решение по формуле (11). Несложно заметить, что это решение будет содержать произвольные постоянные C_1 и C_2. Для того чтобы избавиться от них, проанализируем структуру решения. Оно определяется через сумму двух функций $g_1^{(i)}$ и $g_2^{(j)}$, заданных рекуррентно. Если расписать эти функции, становится понятно, что они будут состоять из суммы гладких μ_1 и μ_2 и негладких $g_1^{(0)}$ и $g_2^{(0)}$ функций. Из этого, используя формулы (13), делаем вывод, что функции $g_1^{(i)}$ и $g_2^{(j)}$ могут быть представлены в виде суммы

$$\begin{gathered} g_1^{(i)}(z) = s(z) + \begin{cases} -g_2^{(0)}((i+1)l - z), & i \text{ – нечетное число}, \\ g_1^{(0)}(z - il), & i \text{ – четное}, \end{cases} \\ g_2^{(j)}(z) = s(z) + \begin{cases} -g_1^{(0)}(-(j-1)l - z), & j \text{ – нечетное}, \\ g_2^{(0)}(jl + z), & j \text{ – четное}, \end{cases} \end{gathered} \tag{17}$$

где $s(z)$ – символическое обозначение любых дважды непрерывно дифференцируемых функций. Это обозначение вводится для упрощения рассуждений. Поскольку решение уже было построено выше, сейчас нас интересует только гладкость, а не точное выражение. Учитывая это, распишем функции $g_1^{(0)}$ и $g_2^{(0)}$, выделяя из них негладкие слагаемые:

$$g_1^{(i)}(z) = s(z) + \begin{cases} \begin{cases} -\dfrac{1}{2}\varphi^{(1)}\big((i+1)l - z\big) + C_1, & (i+1)l - x^* < z < (i+1)l, \\ -\dfrac{1}{2}\varphi^{(2)}\big((i+1)l - z\big) + C_2, & il < z < (i+1)l - x^*, \end{cases} & i - \text{нечетное}, \\ \begin{cases} \dfrac{1}{2}\varphi^{(1)}(z - il) + C_1, & il < z < il + x^*, \\ \dfrac{1}{2}\varphi^{(2)}(z - il) + C_2, & il + x^* < z < (i+1)l; \end{cases} & i - \text{четное}, \end{cases} \tag{18}$$

$$g_2^{(j)}(z) = s(z) + \begin{cases} \begin{cases} -\dfrac{1}{2}\varphi^{(1)}\big(-(j-1)l - z\big) - C_1, & -(j-1)l - x^* < z < -(j-1)l, \\ -\dfrac{1}{2}\varphi^{(2)}\big(-(j-1)l - z\big) - C_2, & -jl < z < -(j-1)l - x^*, \end{cases} & j - \text{нечетное}, \\ \begin{cases} \dfrac{1}{2}\varphi^{(1)}(jl + z) - C_1, & -jl < z < -jl + x^*, \\ \dfrac{1}{2}\varphi^{(2)}(jl + z) - C_2, & -jl + x^* < z < -(j-1)l. \end{cases} & j - \text{четное}, \end{cases} \tag{19}$$

Как видим, произвольные постоянные C_1 и C_2. входят в функции $g_1^{(i)}$ и $g_2^{(j)}$ с разными знаками. Это означает, что построенное решение u, которое является суммой этих функций, либо не будет зависеть от произвольных постоянных, когда они взаимоуничтожаются, либо будет зависеть от их разности $C_2 - C_1$.

Для определения разности произвольных постоянных используем начальные условия в точке x^*. Возьмем $(t,x) \in Q^{(0,0)}$ и будем устремлять ее к $(0, x^*)$:

$$u(t,x) = g_1^{(0)}(x+at) + g_2^{(0)}(x-at) =$$
$$= \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\,d\xi + \frac{1}{2}\varphi^{(2)}(x+at) + C_2 + \frac{1}{2}\varphi^{(1)}(x-at) -$$
$$- C_1 \xrightarrow[t \to 0]{} \frac{1}{2}\Big(\varphi^{(1)}(x^*) + \varphi^{(2)}(x^*)\Big) + C_2 - C_1 = u(0,x^*) = \varphi(x^*) = A. \tag{20}$$

Из формулы (20) следует, что

$$C_2 - C_1 = A - \frac{\varphi^{(1)}(x^*) + \varphi^{(2)}(x^*)}{2}. \tag{21}$$

Итак, мы доказали следующее.

Т е о р е м а 1. *Решение задачи для уравнения* (5) *с условиями* (2), (3) *существует, единственно и находится с помощью формул* (11), (12), (13).

Поскольку классическое решение – кусочно дважды непрерывно дифференцируемая в области Q функция, в дальнейшем займемся исследованием гладкости построенного решения. Отметим также тот факт, что в случае, когда $C_1 \neq C_2$, формула построения решения будет отличаться от формулы для решения задачи с гладкими условиями Коши (см. [1]).

Условия согласования. На предыдущем этапе рассматриваемая область Q разбивалась на подобласти, в каждой из которых решение $u(t,x)$ определялось по-разному. Потребуем, чтобы построенное решение было дважды непрерывно дифференцируемо при переходе через границы подобластей $Q^{(i,j)}$. Для этого выписываются скачки функции u и ее производных на этих границах и они полагаются равными нулю. Это проделано, например, в работе [1]. В результате получены следующие условия согласования:

$$
\begin{aligned}
&\varphi(0)=\mu_1(0), && \varphi(l)=\mu_2(0),\\
&\psi(0)=\mu_1'(0), && \psi(l)=\mu_2'(0),\\
&a^2\varphi''(0)=\mu_1''(0), && a^2\varphi''(l)=\mu_2''(0),
\end{aligned}
\tag{22}
$$

при выполнении которых построенное выше решение будет дважды непрерывно дифференцируемо в окрестности границ подобластей $Q^{(i,j)}$, не совпадающих с границей области Q. Если эти условия выполняться не будут, то решение не будет гладким при переходе через данные характеристики.

Исследование гладкости решения граничной задачи. Для исследования построенного решения на гладкость будем записывать его в конкретных областях $Q^{(i,j)}$ и определять скачки функции $u(t,x)$ и ее производных на характеристиках, на которых возможна негладкость решения из-за негладкости начальных условий в точке x^*:

$$
\begin{aligned}
x+at&=il+x^*, \quad i\in\mathbb{N},\\
x-at&=-jl+x^*, \quad j\in\mathbb{N}_0.
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Возьмем некоторое четное неотрицательное число k и запишем решение в области $Q^{(k,k)}$:

$$
u(t,x)=g_1^{(k)}(x+at)+g_2^{(k)}(x-at)=
$$

$$
=s(t,x)+\begin{cases}
\frac{1}{2}\left(\varphi^{(1)}(x+at-kl)+\varphi^{(1)}(x-at+kl)\right),\\
\qquad kl<x+at<kl+x^*,\quad -kl<x-at<-kl+x^*,\\
\frac{1}{2}\left(\varphi^{(1)}(x+at-kl)+\varphi^{(2)}(x-at+kl)\right)+(C_2-C_1),\\
\qquad kl<x+at<kl+x^*,\quad -kl+x^*<x-at<-(k-1)l,\\
\frac{1}{2}\left(\varphi^{(2)}(x+at-kl)+\varphi^{(1)}(x-at+kl)\right)-(C_2-C_1),\\
\qquad kl+x^*<x+at<(k+1)l,\quad -kl<x-at<-kl+x^*,\\
\frac{1}{2}\left(\varphi^{(2)}(x+at-kl)+\varphi^{(2)}(x-at+kl)\right),\\
\qquad kl+x^*<x+at<(k+1)l,\quad -kl+x^*<x-at<-(k-1)l.
\end{cases}
\tag{24}
$$

Для упрощения выкладок введем оператор

$$
\Delta_{\{z(t,x)\}}u(t,x)=\lim_{z(t,x)\to x^*+0}u(t,x)-\lim_{z(t,x)\to x^*-0}u(t,x).
\tag{25}
$$

Здесь $z:(t,x)\to z(t,x)\in\mathbb{R}$ – произвольная линейная функция. Вообще говоря, такое определение некорректно. Но в нашем случае в качестве $z(t,x)$ будут выступать суммы $x+at$ или $x-at$ и некоторых чисел. А поскольку решение $u(t,x)$ – зависит от $x+at$ и $x-at$, то пределы будут определяться однозначно.

Используем введенный оператор для записи скачков в области $Q^{(k,k)}$:

$$\begin{aligned} \Delta_{\{x+at-kl\}} u(t,x) &= \frac{1}{2}\left(\varphi^{(2)}(x^*) - \varphi^{(1)}(x^*)\right) + (C_2 - C_1) = A - \varphi^{(1)}(x^*), \\ \Delta_{\{x-at+kl\}} u(t,x) &= \frac{1}{2}\left(\varphi^{(2)}(x^*) - \varphi^{(1)}(x^*)\right) - (C_2 - C_1) = \varphi^{(1)}(x^*) - A. \end{aligned} \tag{26}$$

Теперь запишем для $Q^{(k+1,k)}$:

$$u(t,x) = g_1^{(k+1)}(x+at) + g_2^{(k)}(x-at) =$$

$$= s(t,x) + \begin{cases} \frac{1}{2}\left(-\varphi^{(1)}\left((k+2)l - (x+at)\right) + \varphi^{(1)}(x-at+kl)\right), \\ \qquad (k+2)l - x^* < x+at < (k+2)l, \quad -kl < x-at < -kl + x^*, \\ \frac{1}{2}\left(-\varphi^{(2)}\left((k+2)l - (x+at)\right) + \varphi^{(1)}(x-at+kl)\right) + (C_2 - C_1), \\ \qquad (k+1)l < x+at < (k+2)l - x^*, \quad -kl < x-at < -kl + x^*, \\ \frac{1}{2}\left(-\varphi^{(2)}\left((k+2)l - (x+at)\right) + \varphi^{(2)}(x-at+kl)\right), \\ \qquad (k+1)l < x+at < (k+2)l - x^*, \quad -kl + x^* < x-at < -(k-1)l. \end{cases} \tag{27}$$

Скачки в области $Q^{(k+1,k)}$:

$$\begin{aligned} \Delta_{\{(k+2)l-(x+at)\}} u(t,x) &= -\frac{1}{2}\left(\varphi^{(2)}(x^*) - \varphi^{(1)}(x^*)\right) + (C_2 - C_1) = A - \varphi^{(2)}(x^*), \\ \Delta_{\{(x-at)+kl\}} u(t,x) &= \frac{1}{2}\left(\varphi^{(2)}(x^*) - \varphi^{(1)}(x^*)\right) - (C_2 - C_1) = \varphi^{(2)}(x^*) - A. \end{aligned} \tag{28}$$

Аналогично для $Q^{(k,k+1)}$:

$$u(t,x) = g_1^{(k)}(x+at) + g_2^{(k+1)}(x-at) =$$

$$= s(x) + \begin{cases} \frac{1}{2}\left(-\varphi^{(1)}(x+at-kl) + \varphi^{(1)}\left(-kl - (x-at)\right)\right), \\ \qquad kl < x+at < kl + x^*, \quad -kl - x^* < x-at < -kl, \\ \frac{1}{2}\left(-\varphi^{(2)}(x+at-kl) + \varphi^{(1)}\left(-kl - (x-at)\right)\right) + (C_2 - C_1), \\ \qquad kl < x+at < kl + x^*, \quad -(k+1)l < x-at < -kl - x^*, \\ \frac{1}{2}\left(-\varphi^{(2)}(x+at-kl) + \varphi^{(2)}\left(-kl - (x-at)\right)\right), \\ \qquad kl + x^* < x+at < (k+1)l, \quad -(k+1)l < x-at < -kl - x^*, \end{cases} \tag{29}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{\{x+at-kl\}} u(t,x) &= \frac{1}{2}\left(\varphi^{(2)}(x^*) - \varphi^{(1)}(x^*)\right) + (C_2 - C_1) = A - \varphi^{(1)}(x^*), \\ \Delta_{\{-kl-(x-at)\}} u(t,x) &= -\frac{1}{2}\left(\varphi^{(2)}(x^*) - \varphi^{(1)}(x^*)\right) - (C_2 - C_1) = \varphi^{(1)}(x^*) - A. \end{aligned} \tag{30}$$

Теперь предположим, что k – нечетное. Рассуждая аналогично, получаем:

$$Q^{(k,k)}:\quad \begin{aligned} &\Delta_{\{(k+1)l-(x+at)\}}u(t,x) = -\frac{1}{2}\left(\varphi^{(2)}(x^*)-\varphi^{(1)}(x^*)\right)+(C_2-C_1) = A-\varphi^{(2)}(x^*),\\ &\Delta_{\{(k-1)l-(x-at)\}}u(t,x) = -\frac{1}{2}\left(\varphi^{(2)}(x^*)-\varphi^{(1)}(x^*)\right)-(C_2-C_1) = \varphi^{(2)}(x^*)-A; \end{aligned} \tag{31}$$

$$Q^{(k,k+1)}:\quad \begin{aligned} &\Delta_{\{(k+1)l-(x+at)\}}u(t,x) = -\frac{1}{2}\left(\varphi^{(2)}(x^*)-\varphi^{(1)}(x^*)\right)+(C_2-C_1) = A-\varphi^{(2)}(x^*),\\ &\Delta_{\{(k+1)l+(x-at)\}}u(t,x) = \frac{1}{2}\left(\varphi^{(2)}(x^*)-\varphi^{(1)}(x^*)\right)-(C_2-C_1) = \varphi^{(2)}(x^*)-A; \end{aligned} \tag{32}$$

$$Q^{(k+1,k)}:\quad \begin{aligned} &\Delta_{\{x+at-(k+1)l\}}u(t,x) = \frac{1}{2}\left(\varphi^{(2)}(x^*)-\varphi^{(1)}(x^*)\right)+(C_2-C_1) = A-\varphi^{(1)}(x^*),\\ &\Delta_{\{-(k-1)l-(x-at)\}}u(t,x) = -\frac{1}{2}\left(\varphi^{(2)}(x^*)-\varphi^{(1)}(x^*)\right)-(C_2-C_1) = \varphi^{(1)}(x^*)-A. \end{aligned} \tag{33}$$

На основании этих формул можем сделать вывод, что решение не будет непрерывным в случае разрывности φ. Сформулируем полученные результаты в виде теоремы.

Т е о р е м а 2. *Решение задачи для однородного волнового уравнения* (5) *с негладкими начальными условиями* (2), (4) *и гладкимим граничными условиями* (3) *в случае, когда они удовлетворяют условиям согласования* (22), *не будет гладким во всей области постановки задачи Q. На характеристиках* (23) *решение или его производные терпят разрыв, скачки решения при переходе через характеристики линейно зависят от скачков функции* φ *и ее производных, определяются по формулам* (26), (28), (30)–(33).

Следует отметить, что скачки решения и его производных постоянны, зависят от числа A и пропорциональны скачкам функции φ, описывающей профиль струны в начальный момент времени, и соответствующих ее производных в точке x^*.

Рассмотрим три частных случая задания негладких начальных условий.

1. $\varphi(x^*-0)=\varphi(x^*+0)=A.$

Из формул (26), (28), (30)–(33) видно, что в таком случае решение из класса $C(\overline{Q})$ и находится по формуле Даламбера в $Q^{(0,0)}$.

2. $\varphi(x^*-0)\neq\varphi(x^*+0),\quad A=\frac{1}{2}\left(\varphi(x^*-0)+\varphi(x^*+0)\right).$

В таком случае решение уже не будет непрерывным, но разность $C_2-C_1=0$ и решение можно найти по формуле Даламбера $Q^{(0,0)}$.

3. $\varphi(x^*-0)\neq\varphi(x^*+0),\quad A\neq\frac{1}{2}\left(\varphi(x^*-0)+\varphi(x^*+0)\right).$

Решение $Q^{(0,0)}$ будет разрывным и отличаться от решения, получаемого по формуле Даламбера, на константу $C_2-C_1\neq 0$.

Решение граничной задачи для неоднородного уравнения. Итак, решение граничной задачи для однородного уравнения нами построено. Используем его для нахождения решения задачи для неоднородного уравнения (1) с начальными условиями (2) и граничными условиями (3).

Решение этой задачи будем искать в виде

$$u(t,x)=\tilde{u}(t,x)+v(t,x),\qquad (t,x)\in Q, \tag{34}$$

где $\tilde{u}$ – решение задачи для однородного уравнения, найденное выше, а v – решение неоднородного уравнения (1) с однородными начальными условиями:

$$v(0,x)=0, \qquad v_t(0,x)=0. \tag{35}$$

Для нахождения функции v воспользуемся методом Дюамеля (более подробное его описание можно найти в работе [1]), в соответствии с которым частное решение v имеет следующую формулу:

$$v(t,x)=\int_0^t w(t-\tau,\tau,x)\,d\tau, \tag{36}$$

где $w(t, \tau, x)$ – решение уравнения

$$\left(\partial_t^2 w - a^2\partial_x^2 w\right)(t,\tau,x)=0, \qquad t,\tau\in(0,\infty), \quad x\in[0,l], \tag{37}$$

удовлетворяющее условиям Коши

$$w(0,\tau,x)=0, \quad w_t(0,\tau,x)=f(\tau,x). \tag{38}$$

Решение данной задачи определяется по формулам (11), (8), (12), (13), (21).

Для определения условий согласования воспользуемся представлением решения (34). Выразим из него решение однородного уравнения

$$\tilde{u}(t,x)=u(t,x)-v(t,x), \qquad (t,x)\in Q, \tag{39}$$

которое, с учетом условий (35) для функции v, является решением задачи вида (2), (3), (5):

$$\left(\partial_t^2\tilde{u} - a^2\partial_x^2\tilde{u}\right)(t,x)=0, \quad (t,x)\in Q=(0,\infty)\times(0,l),$$

$$\tilde{u}(0,x)=u(0,x)-v(0,x)=\varphi(x), \qquad \tilde{u}_t(0,x)=u_t(0,x)-v_t(0,x)=\psi(x), \qquad x\in(0,l), \tag{40}$$

$$\tilde{u}(t,0)=u(t,0)-v(t,0)=\tilde{\mu}_1(t), \qquad \tilde{u}(t,l)=u(t,l)-v(t,l)=\tilde{\mu}_2(t), \qquad t>0.$$

Для этой задачи имеем условия согласования (22). Для задачи (1)–(4) однородные условия согласования в угловых точках (0,0), (0, l) имеют вид, указанный в [1]. Следовательно, к (22) необходимо добавить

$$a^2\varphi^{(1)}{}''(0)-\mu_1''(0)+f(0,0)=0, \quad \mu_2''(l)-a^2\varphi^{(2)}{}''(l)-f(0,l)=0. \tag{41}$$

Как было показано выше, если выполняются условия согласования, то w дважды непрерывно дифференцируема. В таком случае и функция v, определяемая по формуле (36), также обладает необходимой гладкостью. В силу линейности оператора дифференцирования из этого следует, что изучение гладкости решения задачи для неоднородного уравнения сводится к исследованию гладкости решения задачи для однородного.

С учетом сказанного выше, сформулируем полученные результаты в виде теоремы.

Т е о р е м а 3. *Решение задачи* (1), (2), (3) *существует, единственно и представляется в виде суммы* (34) *решения задачи для однородного уравнения* (5) *с условиями* (2), (3) *и решения задачи для неоднородного уравнения* (1) *с однородными условиями* (35).

Решение первой задачи находится по формулам (11)–(13) *и его гладкость зависит от гладкости начальных условий, скачки выражаются по формулам* (27)–(33). *Также для гладкости необходимо выполнение условия согласования* (22).

Решение второй задачи строится по формуле (36) *с помощью формул* (11)–(13) *и будет гладким при выполнении условий согласования* (42).

Заключение. В статье были сформулированы условия согласования, при выполнении которых существует классическое решение задачи в случае достаточной гладкости условий Коши. Построено классическое решение рассматриваемой граничной задачи и показана зависимость его гладкости от гладкости условий Коши. Важным является тот факт, что в случае негладких в точке начальных условий формула построения решения задачи отличается от формулы для построения решения задачи с гладкими начальными условиями.

Список использованной литературы

1. *Корзюк, В. И.* Об условиях согласования в граничных задачах для гиперболических уравнений / В. И. Корзюк, И. С. Козловская // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2013. – Т. 57, № 5. – С. 37–42.

2. *Корзюк, В. И.* Классическое решение первой смешанной задачи для уравнений Клейна – Гордона – Фока в криволинейной полуполосе / В. И. Корзюк, И. И. Столярчук // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2014. – Т. 58, № 3. – С. 9–15.

3. *Моисеев, Е. И.* Классическое решение задачи с интегральным условием для одномерного волнового уравнения / Е. И. Моисеев, В. И. Корзюк, И. С. Козловская // Дифференц. уравнения. – 2014. – Т. 50, № 10. – С. 1373–1385.

4. *Корзюк, В. И.* Граничные задачи для нестрого гиперболического уравнения третьего порядка / В. И. Корзюк, А. А. Мандрик // Дифференц. уравнения. – 2016. – Т. 52, № 2. – С. 209–219.

5. *Корзюк, В. И.* Первая смешанная задача в криволинейной полуполосе уравнения Клейна – Гордона – Фока с переменными коэффициентами / В. И. Корзюк, И. И. Столярчук // Дифференц. уравнения. – 2012. – Т. 48, № 5. – С. 700–709.

6. *Корзюк, В. И.* Классическое решение первой смешанной задачи одномерного волнового уравнения с условиями типа Коши / В. И. Корзюк, И. С. Козловская, С. Н. Наумовец // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2015. – № 1. – С. 7–20.

7. *Saint-Venant, B.* Choc longitudinal de deux barres elastiques dont l'une est extremement courte on extremement roide par rapport a l'autre / B. Saint-Venant // Comptes Rendus. – 1868. – Vol. 66, N 13. – P. 650–653.

8. *Saint-Venant, B.* Du choc longitudinal d'une barre elastique libre contre une barre elastique d'autre matiere on d'autre grosseur fixee au bout non heurte; consideration du cas extreme on la barre heurtante est tres raide et tres courte / B. Saint-Venant // Comptes Rendus. – 1882. – Vol. 95, N 8. – P. 359–365.

9. *Saint-Venant, B.* Solution en terms finis et simples, du probleme du choc longitudinal par un corps quelconque, d'une barre elqstique fixee a son extremite non heurtee / B. Saint-Venant // Comptes Rendus. – 1882. – Vol. 95, N 10. – P. 423–427.

10. *Saint-Venant, B.* Resistance vive on dynamique des soliders. Representation graphique des lois du choc longitudinal, subi a une de ses extremites par une tige ou barre prismatique assujetti a l'extremite opposee / B. Saint-Venant, M. Flamant // Comptes Rendus. – 1883. – N 3. – P. 127–133; N 4. – P. 214–222; N 5. – P. 281–290; N 6. – P. 444–447.

11. *Boussinesq, J.* Sur le choc d"une plague elastique plane, supposee indefinie en longueur et en largeur, par un solide qui vient la heurter perpendiculairement eu un de ses points et qui lui reste uni / J. Boussinesq // Comptes Rendus. – 1882. – Vol. 95, N 5. – P. 123–125.

12. *Boussinesq, J.* Du choc longitudinal d'une barre prismatique fixee a un bout et heurtee a l'aufre / J. Boussinesq // Comptes Rendus. – 1883. – Vol. 97, N 2. – P. 154–157.

13. *Sebert.* Sur les vibrations longitudinales des barres elastique don't les extremites sont soumises a des efforts quelconqes / Sebert, Hugonit // Comptes Rendus. – 1882. – Vol. 95, N 7. – P. 338–340.

14. *Sebert.* Sur le choc longitudinal d'une tige elastique fixee par l'une de ses extremites / Sebert, Hugonit // Comptes Rendus. – 1882. – Vol. 95, N 8. – P. 381–384.

15. *Sebert.* Sur les vibrations longitudinales des verges elastiques et le mouvement d'une tige portant a son extremite une masse additinelle / Sebert, Hugonit // Comptes Rendus. – 1882. – Vol. 95, N 18. – P. 775–777.

16. *Лазарян, В. А.* О динамических усилиях в упряжных приборах однородных поездов при сопротивлениях относительным перемещениям экипажей / В. А. Лазарян // Тр. Днепропетр. ин-та инженеров ж.-д. транспорта. – 1950. – Вып. 20. – С. 3–32.

17. *Герсеванов, Н. М.* Теория продольного удара с применением к определению сопротивления свай / Н. М. Герсеванов // Собр. соч.: [в 2 т.]. – М.: Стройвоенмориздат, 1948. – Т. 1. – С. 70–94.

18. *Маврин, А. И.* К теории ударного погружения свай / А. И. Маврин // Изв. вузов (строительство и архитектура). – 1967. – № 8. – С. 24–28.

19. *Корзюк, В. И.* Уравнения математической физики: учеб. пособие / В. И. Корзюк. – Минск: БГУ, 2010.

20. *Корзюк, В. И.* Решение задачи Коши для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами в случае двух независимых переменных / В. И. Корзюк, И. С. Козловская // Дифференц. уравнения. – 2012. – Т. 48, № 5. – С. 700–709.

Поступила в редакцию 29.04.2016