УДК 512.74,512.552.13

В. И. ЯНЧЕВСКИЙ

ГРУППЫ УАЙТХЕДА, ПРИВЕДЕННЫЕ НОРМЫ И ЦИКЛИЧНОСТЬ СПЕЦИАЛЬНЫХ АЛГЕБР АДЗУМАЙИ

Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь,
e-mail: yanch@im.bas-net.by

В статье описана мультипликативная структура и приведенные нормы центральных k-алгебр A с делением в двух следующих случаях: (i) k – пополнение поля функций p-адической кривой относительно дискретных нормирований, поля вычетов которых – конечные расширения $\mathbb{Q}_p$, и A – слабо разветвленная k-алгебра с делением; (ii) A – тела некоммутативных рациональных функций над p-адическими алгебрами с делением. Получены достаточные условия цикличности алгебр из (i). В частности, установлена цикличность алгебр бесквадратного индекса.

Ключевые слова: группы Уайтхеда, алгебры с делением, циклические алгебры, приведенные нормы простых алгебр, тела некоммутативных рациональных функций.

V. I. YANCHEVSKIĬ

WHITEHEAD GROUPS, REDUCED NORMS AND CYCLICITY OF SOME SPECIAL AZUMAYA ALGEBRAS

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus,
e-mail: yanch@im.bas-net.by

We describe the multiplicative structure and the reduced norms for central division k-algebras A in the two following cases: (i) let k be a completion of the function field of the p-adic curve with respect to discrete valuations with finite extensions of $\mathbb{Q}_p$ as residue fields and let A be tamely ramified division k-algebra; (ii) let A be skew-fields of non-commutative rational functions over p-adic division algebras. We also obtain some sufficient conditions for cyclicity of algebras from (i). In particular we prove that any algebra of square-free index from (i) is cyclic.

Keywords: Whitehead groups, division algebras, cyclic algebras, reduced norms of simple algebras, skew-fields of non-commutative rational functions.

Пусть A – центральная простая конечномерная алгебра над полем k. Напомним, что группой Уайтхеда $K_1(A)$ алгебры A называется фактор-группа $A^*/[A^*,A^*]$, где $[A^*,A^*]$ – коммутант мультипликативной группы A^* алгебры A. Вычисление группы $K_1(A)$ является весьма трудной задачей, поскольку заключает в себе задачи вычисления приведенных групп Уайтхеда $SK_1(A)$ и группы приведенных норм (определение см., напр., в [1]), как видно из следующей точной последовательности, получаемой с помощью использования гомоморфизма приведенной нормы Nrd:

$$1 \to SK_1(A) \to K_1(A) \to \mathrm{Nrd}(A^*) \to 1, \tag{1}$$

где $SK_1(A) = SL(1,A) / [A^*,A^*]$ и $SL(1,A)$ – ядро гомоморфизма Nrd.

Для дальнейшего нам потребуются следующие определения.

Определение 1. Степенью простой центральной алгебры называется квадратный корень из ее размерности над центром.

Определение 2. Степень простой центральной алгебры с делением называется индексом.

В настоящее время известно, что приведенные группы $SK_1(A)$ в случае алгебр A бесквадратных индексов весьма часто оказываются нетривиальными. Так, например, согласно результату А. С. Меркурьева [2], по любой центральной простой алгебре A бесквадратного индекса можно построить с помощью подходящего центрального расширения скаляров алгебру с нетривиальной приведенной группой Уайтхеда. Таким образом, вычисление группы $K_1(A)$ содержит все трудности, связанные с вычислением групп $SK_1(A)$. Все же класс полей k и алгебр A, для которых группы $SK_1(A)$ нетривиальны, достаточно широк и важен для приложений. В случае тривиальности группы $SK_1(A)$ последовательность (1) немедленно приводит к изоморфизму $K_1(A) \cong \mathrm{Nrd}(A^*)$. С учетом изоморфизма $A^* / SL(1, A) \cong \mathrm{Nrd}(A^*)$ описание мультипликативной структуры группы A^* является существенным при вычислении группы $K_1(A)$. Одной из целей данной работы является рассмотрение вышеупомянутой задачи вычисления $K_1(A)$ в случаях,

(i) когда k – пополнение поля функций p-адической кривой с p-адическим полем в качестве поля вычетов, A – алгебра с делением центральная над k индекса взаимно простого с p;

(ii) когда A – тело некоммутативных рациональных функций над p-адической алгеброй с делением.

Вторая задача, рассматриваемая в статье, относится к проблеме цикличности алгебр из случая (i). Заметим, что в случае алгебр A с делением над полем функций p-адической кривой таких, что их индексы примарны и взаимно просты с p, Д. Солтман, применяя геометрические методы, установил их цикличность [3]. В случае алгебр из (i) мы устанавливаем ряд достаточных условий для их цикличности с помощью прямого алгебраического доказательства.

Обратимся вначале к первой задаче. Заметим, что в этом случае задача вычисления группы $K_1(A)$ может быть редуцирована к алгебрам примарного индекса, поскольку имеет место следующая точная последовательность (см. [4, предложение 2]):

$$1 \to (k^*)^{r-1} \to K_1(A_1) \times \ldots \times K_1(A_r) \to K_1(A) \to 1,$$

где $A = A_1 \otimes_k \ldots \otimes_k A_r$, A_i – алгебра с делением примарного индекса $p_i^{a_i}$ и p_i ($i = 1,\ldots,r$) – различные простые числа, а $(k^*)^{r-1}$ – прямое произведение (r-1)-го экземпляра группы k^*. Кроме того, $\mathrm{Nrd}(A^*) = \bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{Nrd}(A_i^*)$. Напомним, что в рассматриваемом нами случае (i) имеет место тривиальность группы $SK_1(A)$. Тогда из последовательности (1) немедленно следует, что, не ограничивая общности, можно считать индекс A примарным. Для описания группы $\mathrm{Nrd}(A^*)$ в этом случае нам потребуется знание мультипликативной структуры A^* алгебры A, которая может быть описана следующим утверждением.

Теорема 1. *Пусть для поля k и алгебры A имеет место случай* (i). *Тогда*

$$A^* = \langle \pi_A \rangle U_{\overline{A}} (1 + M_A),$$

где π_A *– простой элемент кольца нормирования* O_A *алгебры A;* $U_{\overline{A}}$ *– подгруппа группы единиц кольца* O_A*, изоморфная мультипликативной группе алгебры вычетов* $\overline{A}$ *алгебры A;* $1 + M_A$ *– подгруппа элементов вида* $1+m$ *с m, принадлежащим идеалу нормирования* M_A.

Доказательство. Пусть $I \subset A$ – тело представителей для $\overline{A}$ и $U_{\overline{A}}$ – его мультипликативная группа. Ясно, что произвольный элемент a из A^* имеет вид $a = \pi_A^{\,e}\, i(1+m)$, где $i \in I$, а $1 + m \in (1 + M_A)$. Так как I изоморфно $\overline{A}$, то теорема доказана.

Замечание 1. Предположение о том, что A является алгеброй с делением, не приводит к ограничению общности, поскольку и группы Уайтхеда, и группы приведенных норм стабильны относительно взятия матричных алгебр над алгебрами с делением.

Следствие 1. $\mathrm{Nrd}(A^*) = \langle \mathrm{Nrd}(\pi_A) \rangle \langle \mathrm{Nrd}(U_{\overline{A}}) \rangle (1 + M_k)$, *где* M_k *– максимальный двусторонний идеал в кольце нормирования* O_k *поля k.*

В случае (ii) наше описание группы приведенных норм будет основано на описании группы приведенных норм из работы [4] для алгебр некоммутативных рациональных функций над произвольным полем. Напомним вначале необходимые определения и обозначения.

Замечание 2. Автор признателен А. В. Прокопчуку за полезные обсуждения вышеприведенных результатов.

Определение 3. Пусть B – алгебра с делением и автоморфизмом ν конечного внешнего порядка r (т. е. $\nu^r = i_g$, i_g обозначает внутренний автоморфизм B с помощью элемента g, и g может быть выбран инвариантным относительно ν). Кольцом многочленов $B[X, \nu]$ от переменной X относительно ν с коэффициентами в B называется кольцо с образующими B и X и следующим определяющим соотношением $Xb = b^{\nu}X$ для произвольного $b \in B$.

Нетрудно видеть, что центром кольца $B[X, \nu]$ является кольцо многочленов $t[x]$, где t – поле инвариантов автоморфизма ν, ограниченного на центр B, а $x = g^{-1}X^r$.

Хорошо известно, что кольцо $B[X, \nu]$ является кольцом Оре и поэтому обладает телом центральных частных $B(X, \nu)$. Таким образом, всякий элемент из $B(X, \nu)$ представляется в виде $P(X)\lambda(x)^{-1}$, где $\lambda(x)$ – многочлен из $t[x]$.

Пусть теперь $A = B(X, \nu)$, тогда A – центральная алгебра с делением над полем рациональных функций $k = t(x)$. Для произвольного неприводимого многочлена $f \in t[x]$ обозначим через $t(x)_f$ пополнение поля $t(x)$ относительно нормирования, соответствующего многочлену f, а через O_f – кольцо этого нормирования. Пусть $A(X,\varphi) \otimes_{t(x)} t(x)_f \cong M_m(D_f)$, где $M_m(D_f)$ – полная матричная алгебра степени $m \geq 1$ над алгеброй с делением D_f; $\overline{D_f}$, $\overline{t(x)}_f$ – соответственно алгебра вычетов и поле вычетов D_f и $t(x)_f$. Положим $q = [\overline{D_f} : \overline{t(x)_f}]$ и $i(f) = \sqrt{e^{-1}q}$, где e – индекс ветвления D_f над $t(x)_f$. Далее для каждого неприводимого, унитарного многочлена $f \in t[x]$ обозначим через u_f элемент $(-1)^{(r+1)i(f)\deg f} N_{t(g)/t}(g)^{i(f)\deg f[t(g):t]^{-1}} f^{i(f)}$.

Теорема 2. *Пусть t – конечное расширение $\mathbb{Q}_p$. Тогда группа* $\mathrm{Nrd}(A^*)$ *порождается группой* $N_{Z(B)/t}(\mathrm{Z(B)}^*)$ *($Z(B)$ – центр алгебры B) и всеми элементами u_f.*

Доказательство немедленно следует из результатов [4] и того факта, что отображение приведенной нормы алгебры над $\mathrm{Z}(B)$ сюръективно.

Наконец остановимся кратко на результатах описания мультипликативной структуры алгебр с унитарными инволюциями. Их полному изложению будет посвящена другая статья автора.

Напомним, что под мультипликативной структурой алгебры A с унитарной инволюцией τ обычно понимается описание мультипликативной группы этой алгебры, индуцируемое унитарной группой, связанной с соответствующей изотропной эрмитовой формой. В случае унитарных инволюций речь идет об описании мультипликативной группы, связанной с фактор-группой $A^* / \Sigma(A,\tau)$, где $\Sigma(A,\tau)$ является подгруппой в A^*, порожденной τ-симметрическими элементами из A^*. Хорошо известно, что фактор-группа $A^* / \Sigma(A,\tau)$ абелева, поскольку коммутант $[A^*, A^*]$ содержится в $A^* / \Sigma(A,\tau)$. Кроме того, изотропность эрмитовой формы влечет возможность ограничиться при рассмотрении общего случая алгебрами A с делением. Важную роль в случае рассматриваемых полей (функций p-адических кривых и их пополнений) играет следующий факт: приведенные унитарные группы Уайтхеда соответствующих алгебр тривиальны (см. [5, 6]). Для более точных формулировок напомним следующие определения.

Определение 4. Пусть A – конечномерная центральная K-алгебра с делением с унитарной инволюцией τ и $k = \{a \in K \mid a^{\tau} = a\}$. Положим $\Sigma'(A,\tau) = \{a \in A^* \mid \mathrm{Nrd(a)} \in k\}$, где $\mathrm{Nrd}: A^* \to K^*$ – гомоморфизм приведенной нормы. Приведенной унитарной группой Уайтхеда алгебры A относительно инволюции τ называется фактор-группа $\Sigma'(A,\tau) / \Sigma(A,\tau)$.

Вышеупомянутая тривиальность приведенных унитарных групп Уайтхеда относится и к двум следующим случаям: K – пополнение поля функций p-адической кривой относительно дискретного нормирования такого, что его поле вычетов имеет нулевую характеристику; и A – тело некоммутативных рациональных функций, центр которого – поле рациональных функций с полем констант, являющимся конечным расширением поля $\mathbb{Q}_p$.

Таким образом, в обоих упомянутых случаях вместо группы $A^* / \sum(A,\tau)$ можно рассматривать фактор-группу $A^* / \sum'(A,\tau)$. В случае полного поля K имеет место следующее описание мультипликативной структуры алгебры с делением A и унитарной инволюции τ.

Т е о р е м а 3. *$A^* = \langle \pi_A \rangle U_{\tilde{A}}(1+M_A)$, где π_A – подходящий простой τ-симметрический элемент в τ-инвариантном кольце нормирования O_A, $\tilde{A}$ – мультипликативная группа неразветвленного τ-инвариантного и π_A-инвариантного подъема алгебры вычетов $\overline{A}$ в A^*.*

Ввиду τ-инвариантности π_A и $U_{\tilde{A}}$ из предыдущей теоремы и так называемой унитарной конгруэнц-теоремы следует, что изучение группы $A^* / \sum'(A,\tau)$ эквивалентно изучению группы $U_A / (\sum'(A,\tau) \cap U_A)$, где U_A – группа обратимых элементов кольца нормирования O_A алгебры A.

Дальнейшее описание этой и подобных групп тесно связано с результатами работы [5], поскольку имеет место точная последовательность

$$1 \to \sum'(A,\tau) \subset A^* \to A^* / \sum'(A,\tau) \to 1.$$

В случае тел некоммутативных рациональных функций для получения нужного описания необходимо использовать глубокую связь между алгебрами с инволюциями над гензелевыми полями и аналогичными алгебрами, являющимися телами некоммутативных рациональных функций (более общо, градуированными алгебрами). Кроме того, используется метод вычисления приведенных норм в функциональных полях, указанный в [4].

Переходя к рассмотрению проблемы цикличности алгебр, упомянутых в (i), сформулируем следующую задачу, идейно примыкающую к этой проблеме. Пусть N – неразветвленное расширение K и e – натуральное число, взаимно простое с p. Существует ли вполне разветвленное расширение Z над N, циклическое над K?

З а м е ч а н и е 3. Решение этой задачи, по-видимому, известно специалистам и помещено здесь, во-первых, с целью возможного использования для получения общего критерия цикличности и, во-вторых, для удобства читателя.

Т е о р е м а 4. *Пусть K – гензелево дискретно нормированное поле, и натуральное число $e > 1$ взаимно просто с характеристикой совершенного поля вычетов $\overline{K}$. Тогда циклическое слабо разветвленное расширение Z/K степени ne и индекса ветвления e с полем вычетов $\overline{N}$ существует в том и только в том случае, когда поле $\overline{N}$ циклично над $\overline{K}$, $n = [\overline{N} : \overline{K}]$ и в поле $\overline{N}$ найдется элемент q со свойством $N_{\overline{N}/\overline{K}}(q) = \varepsilon_e$, где $\varepsilon_e \in \overline{K}$ – примитивный корень степени e из 1.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что расширение Z/K, указанное в формулировке теоремы, существует, и пусть N – максимальное не разветвленное над K подполе поля Z. Тогда поле вычетов $\overline{Z}$ поля Z $\overline{K}$-изоморфно полю $\overline{N}$, и, следовательно, расширение $\overline{N}$ над $\overline{K}$ циклическое. Ввиду условия взаимной простоты e и характеристики $\overline{K}$, $Z = N(\sqrt[e]{a})$ для подходящего простого элемента $a \in N$. Обозначим через σ образующую группы Галуа Gal(N/K), а через $\tilde{\sigma} \in$ Gal(N/K) с ограничением σ на поле N. Тогда a^{σ} — простой элемент в N. Положим $\alpha = \sqrt[e]{a}$. Получим, что $\alpha^{\tilde{\sigma}} = \sqrt[e]{a^{\sigma}}$. Так как $N^{\tilde{\sigma}} = N$, то $Z = (N(\sqrt[e]{a}))^{\tilde{\sigma}} = N(\sqrt[e]{a^{\sigma}})$. Из предыдущего немедленно следует $a^{\sigma} = a^t v^e$, где t – число взаимно простое с e $(0 < t < e)$, $v \in N$. Поскольку a и a^{σ} – простые элементы, то $t = 1$ и потому v – единица в N (т. е. обратимый элемент в кольце нормирования поля N). Положим $\beta = \sqrt[e]{a^{\sigma}}$. Заметим, что $\beta = \sqrt[e]{a^{\sigma}} = \sqrt[e]{av^e} = \sqrt[e]{a}v = \alpha v$. Пусть φ — автоморфизм поля Z, $\langle\varphi\rangle$ = Gal(Z/K), следовательно, порядок равен ne. Можно считать, что $\varphi|_N = \sigma$ (если $\varphi|_N = \sigma^i$, то можно перейти к подходящей степени φ). Автоморфизм φ переводит корень многочлена $x^e - a$ в корень многочлена $x^e - a^{\sigma}$, т. е. $\alpha^{\varphi} = \varepsilon_e^j \alpha v$. Но $\varepsilon_e \in N$, поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что $\alpha^{\varphi} = \alpha u$, где $u \in N$. Тогда $\alpha^{\varphi^2} = (\alpha u)^{\varphi} = u^{\sigma} u \alpha$, $\alpha^{\varphi^n} = u^{\sigma^{n-1}} \dots u^{\sigma} u \alpha = N_{N/K}(u)\alpha$ и $\alpha^{\varphi^{nr}} = N_{N/K}(u)^r \alpha$, что влечет при $r = e$ $N_{N/K}(u)^e = 1$. С другой стороны, при $0 < r < e$ $N_{N/K}(u)^r \neq 1$, и, стало быть, $N_{N/K}(u)$ – примитивный корень степени e из 1. Что касается неравенства $N_{N/K}(u)^r \neq 1$ при $0 < r < e$, то оно немедленно следует из того, что α — примитивный элемент расширения Z/K (если бы $Z \neq K(\alpha)$, то это бы противоречило цикличности расширения $Z/K(\alpha^e)$). Переходя в равенстве $N_{N/K}(u)^e = 1$ к вычетам и пользуясь слабой разветвленностью Z/K, получаем для $q = \overline{u}$ $N_{\widetilde{N}/\overline{K}}(q)$ – примитивный корень степени e из 1 в $\overline{K}$.

Обратно, пусть $\widetilde{N}/\overline{K}$ — циклическое расширение степени n и в $\widetilde{N}$ существует элемент q такой, что $N_{\widetilde{N}/\overline{K}}(q) = \varepsilon_e$, где $\varepsilon_e \in \overline{K}$ – примитивный корень степени e из 1. Обозначим через N неразветвленное расширение K с полем вычетов $\widetilde{N}$. Тогда в N найдется такой элемент u, что $N_{N/K}(u)$ – примитивный корень степени e из 1 в K, вычет которого совпадает с ε_e. Пусть σ – образующая группы Галуа $\mathrm{Gal}(N/K)$. Тогда существует элемент a такой, что $a^\sigma/a = u^e$, т. е. $a^\sigma = au^e$, и расширение $N(\sqrt[e]{a})/K$ является расширением Галуа. Пусть $\alpha = \sqrt[e]{a}$, $\beta = \alpha v$. Покажем, что гомоморфизм φ, переводящий всякий элемент $f(\alpha)$ в $f^\sigma(\alpha u)$, имеет порядок ne, где $f(x) \in N[x]$, и $\varphi|_N = \sigma$. Пусть $\varphi^i = \mathrm{id}_N(\sqrt[e]{a})$. Следовательно, n – делитель i, поэтому $i = rn$. Далее, $\alpha^{\varphi^{nr}} = N_{N/K}(u)^r\alpha = \varepsilon_e^r\alpha$, откуда заключаем, что $r = e$, т. е. порядок φ равен ne, и расширение $N(\sqrt[e]{a})/K$ циклическое, что и требовалось.

Перейдем к задаче цикличности алгебр над полями из (i).

Теорема 5. *Пусть A – k-алгебра из* (i). *Тогда A циклична, если выполнено одно из следующих условий:*

1) *A не разветвлена над k;*

2) *индекс ветвления $e(A/k)$ совпадает с индексом алгебры A;*

3) *пусть $1 \leq e(A/k) < n$, где n — индекс A, и центр Z алгебры вычетов — неразветвленное расширение поля $\overline{k}$ (относительно p-адического нормирования k).*

Доказательство. Нетрудно видеть, что при доказательстве теоремы достаточно ограничиться случаем алгебр примарного индекса. Заметим, что поле k является полем формальных степенных рядов над подходящим числовым локальным полем (конечным расширением поля p-адических чисел). Рассмотрим последовательно возможные случаи ветвления для k-алгебры A.

1) A не разветвлена над k. Тогда алгебра вычетов $\overline{A}$ – центральная $\overline{k}$-алгебра с делением и $\overline{k}$ – числовое локальное поле. Пусть $\overline{Z}/\overline{k}$ – максимальное неразветвленное подполе в $\overline{A}$, и Z/k – его максимальный неразветвленный подъем в A, что влечет цикличность A.

2) В этом случае алгебра вычетов $\overline{A}$ является циклическим расширением поля $\overline{k}$. Рассмотрев неразветвленный подъем $\overline{A}/\overline{k}$, приходим к заключению о цикличности алгебры A.

В случае 3) рассмотрим максимальное неразветвленное расширение E/Z алгебры вычетов $\overline{A}$. Ясно, что $E/\overline{k}$ – неразветвленное расширение степени n, а потому циклично, и цикличен его неразветвленный подъем в A. Следовательно, алгебра A циклична, что и требовалось.

Из теоремы немедленно вытекает

Следствие 2. *Пусть алгебра A такая же, как в формулировке теоремы* 5, *и имеет бесквадратный индекс. Тогда A циклична.*

Доказательство. Ясно, что алгебру A можно считать имеющую простой индекс, а тогда для A имеет место либо случай 1), либо случай 2).

Список использованной литературы

1. *Draxl, P.* SK_1 von Schiefkorpern / P. Draxl, M. Kneeser // Lectures Notes Math. – 1977. – Vol. 778. – P. 1–124.

2. *Merkurjev, A. S.* Suslin's conjecture on the reduced Whitehead group of a simple algebrs / A. S. Merkurjev // J. Amer. Math. Soc. Published electronically. – 2015. – November 17.

3. *Saltman, D.* Cyclic algebras over p-adic curves / D. Saltman // J. Algebra. – 2007. – Vol. 314. – P. 817–843.

4. *Янчевский, В. И.* Приведенные нормы простых алгебр над функциональными полями / В. И. Янчевский // Тр. МИАН СССР. – 1990. – Т. 183. – С. 215–222.

5. *Янчевский, В. И.* Приведенная унитарная K-теория и тела над гензелевыми дискретно нормированными полями / В. И. Янчевский // Изв. АН СССР. Сер. математика. – 1978. – Т. 42, № 4. – С. 879–918.

6. *Yanchevskii, V. I.* Reduced unitary Whitehead groups of skew fields of noncommutative rational functions / V. I. Yanchevskii // J. of Sov. Mathematics. – 1982. – Vol. 19, iss. 1. – P. 1067–1071.

Поступила в редакцию 15.03.2016