ФІЗІКА

УДК 539.12

О. В. ВЕКО[1], *Я. А. ВОЙНОВА*[2], *Е. М. ОВСИЮК*[3]

ЧАСТИЦА СО СПИНОМ 1/2 И АНОМАЛЬНЫМ МАГНИТНЫМ МОМЕНТОМ В КУЛОНОВСКОМ ПОЛЕ

[1]*Гимназия г. Калинковичи, Беларусь, e-mail: vekoolga@mail.ru*
[2]*Средняя школа, Ельский район, Беларусь, e-mail: voinyuschka@mail.ru*
[3]*Мозырский государственный педагогический университет им. И. П. Шамякина, Мозырь, Беларусь, e-mail: e.ovsiyuk@mail.ru*

Исследовано уравнение Дирака для частицы со спином 1/2 и аномальным магнитным моментом во внешнем кулоновском поле. Задача приведена к дифференциальному уравнению второго порядка, в котором точки $x = 0, \infty$ являются нерегулярными особыми точками ранга 2, а в точке $x = 1$ имеется регулярная особенность. Описана общая структура решений уравнения, исследован характер зацепления коэффициентов в соответствующих степенных рядах. Выполнено ограничение к случаю электрически нейтральной частицы с аномальным магнитным моментом (нейтрону); задача сведена к более простому уравнению с двумя нерегулярными особыми точками $x = 0, \infty$ ранга 2 (дважды вырожденному уравнению Гойна). Качественный анализ уравнений показывает, что связанные состояния для нейтрона в кулоновском поле могут существовать только при одном знаке величины аномального магнитного момента.

Ключевые слова: электрон, нейтрон, аномальный магнитный момент, кулоновское поле, связанные состояния.

O. V. VEKO[1], *Y. A. VOYNOVA*[2], *E. M. OVSIYUK*[3]

SPIN 1/2 PARTICLE WITH ANOMALOUS MAGNETIC MOMENT IN THE COULOMB FIELD

[1]*Gymnasium, Kalinkovichi, Belarus, e-mail: vekoolga@mail.ru*
[2]*Secondary School, Yelsk region, Belarus, e-mail: voinyuschka@mail.ru*
[3]*Mozyr State Pedagogical University named after I. P. Shamyakin, Mozyr, Belarus, e-mail: e.ovsiyuk@mail.ru*

The Dirac equation for a spin 1/2 particle with anomalous magnetic moment in the applied Coulomb field is studied. The problem reduces to a second-order differential equation, in which the points $x = 0, \infty$ are the irregular singular points of rank 2, and at the point $x = 1$ there is the regular singularity. The general structure of possible solutions of the equation is described, and the recurrent formulas for coefficients of relevant power series are derived. The case of an electrically neutral spin 1/2 particle with anomalous magnetic moment (neutron) is specified in detail; the problem reduces to a second-order differential equation with two irregular singular points $x = 0, \infty$ of rank 2, which is referred the double confluent Heun equation. The qualitative analysis of the equations shows that the bound states for neutron in the Coulomb field can exist only for one definite sign of the anomalous magnetic moment.

Keywords: electron, neutron, anomalous magnetic moment, Coulomb field, bound states.

Введение. Общепринятым является использование простейших уравнений для фундаментальных частиц со спином 0, 1/2, 1. Между тем известно, что для этого могут быть также предложены уравнения, заданные в пространствах расширенных наборов неприводимых представлений собственной группы Лоренца [1–11]. Такие обобщенные (или расширенные) уравнения позволяют с самого начала ввести в теорию более сложные объекты, обладающие, помимо спина и массы, некоторыми дополнительными физическими характеристиками, которые проявляют себя в присутствии внешних электромагнитных полей. Так, в частности, этот подход позволяет получить волновое уравнение (М. А. Петраш и др.) для частицы со спином $S = 1/2$, ненулевой массой и аномальным магнитным моментом. В настоящей работе исследуется задача о спинорной частице с аномальным магнитным моментом во внешнем кулоновском поле. Используемый формализм позволяет легко выделить представляющий специальный интерес случай незаряженной частицы с аномальным магнитным моментом (нейтрон). Установлено, что в обоих случаях возможно существование связанных состояний в системе.

1. Разделение переменных. При использовании тетрадного формализма уравнение Дирака для частицы с аномальным магнитным моментом [1] в кулоновском поле притяжения может быть представлено так [2]:

$$\left(\gamma^0 (i\partial_t + \frac{e^2}{r}) + i\gamma^3 \partial_r + \frac{1}{r}\Sigma_{\theta\phi} - M + \frac{i\Gamma}{r^2}\gamma^0\gamma^3\right)\psi = 0, \tag{1}$$

где использованы обозначения (связанный с аномальным моментом свободный параметр модели λ – безразмерный)

$$\frac{Mc}{\hbar} \Rightarrow M\,, \quad \frac{\varepsilon}{\hbar c} \Rightarrow \varepsilon, \quad 2\lambda \frac{e^2}{Mc^2} \Rightarrow \Gamma\,, \quad \Sigma_{\theta\phi} = \partial_\theta + \gamma^2 \frac{i\partial_\phi + i\,\sigma^{12}}{\sin\theta}. \tag{2}$$

Подстановка для волновой функции (используем аппарат функций Вигнера) имеет вид [2]:

$$\psi_{\varepsilon jm}(x) = e^{-i\varepsilon t} \begin{vmatrix} f_1(r) D_{-1/2} \\ f_2(r) D_{+1/2} \\ \delta f_2(r) D_{-1/2} \\ \delta f_1(r) D_{+1/2} \end{vmatrix}, \quad D_\sigma = D^j_{-m,\sigma}(\phi,\theta,0)\,. \tag{3}$$

Квантовые числа ε, j, m, $\delta = \pm 1$ связаны с операторами энергии, квадрата и третьей проекции полного момента, пространственной четности. Далее, учитывая явный вид матриц Дирака в спинорном представлении, находим радиальные уравнения. При этом вместо f_1 и f_2 удобно использовать их линейные комбинации: $f = (f_1 + f_2),\ g = -i(f_1 - f_2)$. Для определенности дальше анализируем случай $\delta = +1$ (чтобы перейти к $\delta = -1$, достаточно сделать формальные замены: $M \Rightarrow -M,\ \Gamma \Rightarrow -\Gamma$):

$$\left(\frac{d}{dr} + \frac{\nu}{r} - \frac{\Gamma}{r^2}\right) f + \left(M + \varepsilon + \frac{e^2}{r}\right) g = 0\,, \quad \left(\frac{d}{dr} - \frac{\nu}{r} + \frac{\Gamma}{r^2}\right) g + \left(M - \varepsilon - \frac{e^2}{r}\right) f = 0, \tag{4}$$

где $\nu = j + 1/2$. Из (4) получим уравнение второго порядка для функции $g(r)$:

$$\frac{d^2 g}{dr^2} + \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r - e^2/(M-\varepsilon)}\right]\frac{dg}{dr} +$$

$$+\Bigg[-M^2 + \varepsilon^2 - \frac{\Gamma^2}{r^4} + \frac{\Gamma(2\nu - 1)}{r^3} + \frac{e^6 - e^2\nu^2 + \Gamma(M-\varepsilon)}{e^2 r^2} -$$

$$-\frac{M-\varepsilon}{e^2}\frac{\Gamma(M-\varepsilon)/e^2 - \nu}{r - e^2/(M-\varepsilon)} + \frac{2e^6\varepsilon - e^2\nu(M-\varepsilon) + \Gamma(M-\varepsilon)^2}{e^4 r}\Bigg] g = 0. \tag{5}$$

Уравнение для $f(r)$ будет иметь похожий вид

$$\frac{d^2 f}{dr^2}+\left[\frac{1}{r}-\frac{1}{r+e^2/(M+\varepsilon)}\right]\frac{df}{dr}+$$

$$+\left[-M^2+\varepsilon^2-\frac{\Gamma^2}{r^4}+\frac{\Gamma(2\nu+1)}{r^3}+\frac{e^6-e^2\nu^2+\Gamma(M+\varepsilon)}{e^2r^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{M+\varepsilon}{e^2}\frac{\Gamma(M+\varepsilon)/e^2+\nu}{r+e^2/(M+\varepsilon)}+\frac{2e^6\varepsilon-e^2\nu(M+\varepsilon)-\Gamma(M+\varepsilon)^2}{e^4r}\right]f=0. \qquad (6)$$

В уравнении (5) перейдем к новой переменной x:

$$x=\frac{r}{e^2/(M-\varepsilon)},$$

$$\frac{d^2 g}{dx^2}+\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}\right)\frac{dg}{dx}+\left[-\frac{e^4(M+\varepsilon)}{M-\varepsilon}+\frac{e^2\nu-\Gamma M+\Gamma\varepsilon}{(x-1)e^2}+\frac{(2M\nu-2\nu\varepsilon-M+\varepsilon)\Gamma}{x^3e^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{e^6-e^2\nu^2+\Gamma M-\Gamma\varepsilon}{x^2e^2}+\frac{2e^6\varepsilon-Me^2\nu+e^2\nu\varepsilon+\Gamma M^2-2\Gamma M\varepsilon+\Gamma\varepsilon^2}{xe^2(M-\varepsilon)}-\frac{(M-\varepsilon)^2\Gamma^2}{x^4e^4}\right]g=0. \qquad (7)$$

В переменной $y=1/x$ уравнение (7) запишется так:

$$\frac{d^2 g}{dy^2}+\left(\frac{1}{1-y}+\frac{2}{y}\right)\frac{dg}{dy}+\left[-\frac{(M-\varepsilon)^2\Gamma^2}{e^4}+\frac{-e^2\nu+\Gamma M-\Gamma\varepsilon}{(-1+y)e^2}+\frac{e^4-\nu^2+\nu}{y^2}+\right.$$

$$\left.+2\frac{e^4\varepsilon}{y^3(M-\varepsilon)}-\frac{e^4(M+\varepsilon)}{y^4(M-\varepsilon)}+\frac{2\Gamma M\nu-2\Gamma\nu\varepsilon+e^2\nu-2\Gamma M+2\Gamma\varepsilon}{ye^2}\right]g=0.$$

Это означает, что точка $x=\infty$ является нерегулярной особенностью ранга 2. Точка $x = 0$ также является нерегулярной особой точкой ранга 2; в точке $x = 1$ имеем регулярную особенность. Введя обозначения

$$\alpha=e^2,\quad \frac{M-\varepsilon}{\alpha}=K,\quad \frac{M+\varepsilon}{\alpha}=L,$$

уравнение (6) можно представить так:

$$\frac{d^2 g}{dx^2}+\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}\right)\frac{dg}{dx}+\left[-\alpha^2\frac{L}{K}+\frac{\nu-\Gamma K}{x-1}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{x}\left(\frac{2\alpha\varepsilon}{K}-\nu+\Gamma K\right)+\frac{\alpha^2-\nu^2+\Gamma K}{x^2}+\frac{\Gamma K(2\nu-1)}{x^3}-\frac{K^2\Gamma^2}{x^4}\right]g=0; \qquad (8а)$$

сопутствующая функция f может быть вычислена на основании уравнения

$$\left(\frac{d}{dx}-\frac{\nu}{x}+\frac{\Gamma K}{x^2}\right)g+\alpha\frac{x-1}{x}f=0. \qquad (8б)$$

В соответствии с характером сингулярных точек будем строить локальные решения для $g(x)$ около точки $x = 0$ в виде

$$g(x) = x^{\alpha} e^{\beta x^{-1}} G(x).$$

Для функции $G(x)$ получаем уравнение

$$\frac{d^2 G}{dx^2} + \left(\frac{1+2a}{x} - \frac{2b}{x^2} - \frac{1}{x-1} \right) \frac{dG}{dx} +$$

$$+ \left(A + \frac{A_1 + a - b}{x} + \frac{A_2 + a^2 - b}{x^2} + \frac{A_3 - 2ab + b}{x^3} + \frac{A_4 + b^2}{x^4} + \frac{B - a + b}{x-1} \right) G = 0.$$

Пусть

$$A_3 - 2ab + b = 0, \qquad A_4 + b^2 = 0.$$

Эти соотношения имеют два решения (отмечаем, что $A_4 = -K^2 \Gamma^2 < 0$):

$$1) \quad b_1 = \sqrt{-A_4}, \quad a_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{A_3}{b} + 1 \right) = \frac{1}{2}\left(\frac{A_3}{\sqrt{-A_4}} + 1 \right), \tag{9а}$$

$$2) \quad b_2 = -\sqrt{-A_4}, \quad a_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{A_3}{b} + 1 \right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{A_3}{\sqrt{-A_4}} + 1 \right). \tag{9б}$$

Уравнение для G упрощается (следим сразу за двумя вариантами):

$$\frac{d^2 G}{dx^2} + \left(\frac{1+2a}{x} - \frac{2b}{x^2} - \frac{1}{x-1} \right) \frac{dG}{dx} + \left(A + \frac{A_1 + a - b}{x} + \frac{A_2 + a^2 - b}{x^2} + \frac{B - a + b}{x-1} \right) G = 0. \tag{10}$$

Решения для функций $G(x)$ могут быть построены в виде степенных рядов. Исследован характер 5-членных рекуррентных соотношений для коэффициентов ряда – на деталях останавливаться не будем. Из этих соотношений, следуя методу Пуанкаре – Перрона, можно показать, что радиус сходимости построенных степенных рядов равен либо единице, либо бесконечности.

2. Случай частицы с нулевым электрическим зарядом. Можно предельным переходом получить описание ситуации с нулевым электрическим зарядом и ненулевым магнитным моментом:

$$e^2 \to 0, \quad \lambda \to \infty, \qquad e^2 \lambda \to \lambda = \text{const}. \tag{11}$$

Рассмотрим этот случай детально (он относится, например, к нейтрону):

$$\left(\frac{d}{dr} + \frac{\nu}{r} - \frac{\Gamma}{r^2} \right) f + (\varepsilon + M) g = 0, \quad \left(\frac{d}{dr} - \frac{\nu}{r} + \frac{\Gamma}{r^2} \right) g - (\varepsilon - M) f = 0. \tag{12}$$

Имеем два уравнения второго порядка:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \varepsilon^2 - M^2 - \frac{\nu(\nu+1)}{r^2} + 2\Gamma \frac{\nu+1}{r^3} - \frac{\Gamma^2}{r^4} \right) f = 0, \tag{13}$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \varepsilon^2 - M^2 - \frac{\nu(\nu-1)}{r^2} + 2\Gamma \frac{\nu-1}{r^3} - \frac{\Gamma^2}{r^4} \right) g = 0; \tag{14}$$

они связаны симметрией $\nu \Rightarrow -\nu$, $\Gamma \Rightarrow -\Gamma$.

Приведем уравнения к нормальной форме дважды конфлюэнтного уравнения Гойна [3]. Для этого сделаем линейную замену переменной: $z = kr,\ k = \pm 2\sqrt{M^2 - \varepsilon^2}$, тогда имеем

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - \frac{1}{4} - \frac{\nu(\nu+1)}{z^2} + \frac{2\Gamma k(\nu+1)}{z^3} - \frac{\Gamma^2 k^2}{z^4} \right) f = 0 , \tag{15а}$$

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - \frac{1}{4} - \frac{\nu(\nu-1)}{z^2} + \frac{2\Gamma k(\nu-1)}{z^3} - \frac{\Gamma^2 k^2}{z^4} \right) g = 0 . \tag{15б}$$

Нас интересуют решения, отвечающие связанным состояниям; при этом должно выполняться неравенство $M^2 - \varepsilon^2 > 0$. Для определенности используем вариант

$$k = +2\sqrt{M^2 - \varepsilon^2} > 0 , \quad z = +2\sqrt{M^2 - \varepsilon^2}\ r, \quad z \in [0, +\infty) .$$

Будем следить за функций $f(z)$; чтобы перейти к аналогичным результатам для $g(z)$, достаточно сделать формальные замены $\nu \Rightarrow -\nu,\ \Gamma \Rightarrow -\Gamma$. В уравнении для f делаем подстановку $f(z) = z^A e^{Bz} e^{C/z} F(z)$. Уравнение для $F(z)$ запишется так:

$$\frac{d^2F}{dz^2} + \left(2B + \frac{2A}{z} - \frac{2C}{z^2} \right) \frac{dF}{dz} + \left[\left(-\frac{1}{4} + B^2 \right) + \frac{2AB}{z} + \frac{A^2 - A - 2BC - \nu(\nu+1)}{z^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{2\Gamma k(\nu+1) - 2AC + 2C}{z^3} + \frac{C^2 - \Gamma^2 k^2}{z^4} \right] F = 0. \tag{16}$$

Пусть $B = -1/2$; из обращения в нуль коэффициента при z^{-4} получим $C = \pm \Gamma k$. Из обращения в нуль коэффициента при z^{-3} находим $A = \nu + 2,\ -\nu$. В результате для функции $F(z)$ находим более простое уравнение

$$\frac{d^2F}{dz^2} + \left(-1 + \frac{2A}{z} - \frac{2C}{z^2} \right) \frac{dF}{dz} + \left(-\frac{A}{z} + \frac{A^2 - A + C - \nu(\nu+1)}{z^2} \right) F = 0. \tag{17}$$

Оно имеет структуру канонической формы дважды вырожденного уравнения Гойна (придерживаемся обозначений из [13]):

$$\frac{d^2F}{dz^2} + \left(-1 + \frac{c}{z} + \frac{t}{z^2} \right) \frac{dF}{dz} + \frac{-az + \lambda}{z^2} F = 0 , \tag{18}$$

где параметры $\{c, t, a, \lambda\}$ задаются равенствами

$$c = 2A, \quad t = -2C, \quad a = A, \quad \lambda = A^2 - A + C - \nu(\nu+1) .$$

Возникают две возможности в зависимости от выбора C:

$$\begin{gathered} \text{I)} \quad C = +\Gamma k , \quad A = \nu + 2, \quad f(z) = z^{2+\nu} e^{-z/2} e^{+\Gamma k/z} F(z) , \\ c = 4 + 2\nu , \quad t = -2\Gamma k , \quad a = 2 + \nu , \quad \lambda = +\Gamma k + 2\nu + 2 ; \end{gathered} \tag{19}$$

$$\begin{gathered} \text{II)} \quad C = -\Gamma k , \quad A = -\nu, \quad f(z) = z^{-\nu} e^{-z/2} e^{-\Gamma k/z} F(z) , \\ c = -2\nu , \quad t = +2\Gamma k , \quad a = -\nu , \quad \lambda = -\Gamma k . \end{gathered} \tag{20}$$

В случае функции $g(z)$ будем иметь соотношения:

$$\begin{gathered}\text{I)}\quad C=-\Gamma k\,,\quad A=2-\nu\,,\qquad g(z)=z^{2-\nu}e^{-z/2}e^{-\Gamma k/z}G(z)\,,\\ c=4-2\nu\,,\quad t=+2\Gamma k\,,\quad a=2-\nu\,,\quad \lambda=-\Gamma k-2\nu+2\,;\end{gathered} \tag{21}$$

$$\begin{gathered}\text{II)}\quad C=+\Gamma k\,,\quad A=\nu,\quad f(z)=z^{+\nu}e^{-z/2}e^{+\Gamma k/z}G(z)\,,\\ c=+2\nu\,,\quad t=-2\Gamma k\,,\quad a=+\nu\,,\quad \lambda=+\Gamma k\,.\end{gathered} \tag{22}$$

Строим локальные решения дважды вырожденного уравнения Гойна (18) с помощью подстановки $H(z)=z^{M}e^{N/z}h(z)$; для функции $h(z)$ получим уравнение

$$z^2\frac{d^2h}{dz^2}+\left[-z^2+\left(2M+c\right)z-2N+t\right]\frac{dh}{dz}+$$

$$+\left[\,(-M-a)z+(M^2+Mc-M+N+\lambda)+\frac{-2MN+tM-Nc+2N}{z}+\frac{N(N-t)}{z^2}\,\right]h=0.$$

Обратим в нуль коэффициенты при степенях z^{-1}, z^{-2}, полученные при этом соотношения имеют два решения:

$$1)\qquad M_1=0,\quad N_1=0,\qquad H_1(z)=h_1(z)\,;$$

$$2)\quad M_2=2-c,\quad N_2=t,\quad H_2(z)=z^{2-c}\,e^{t/z}h_2(z)\,. \tag{23}$$

При этом уравнение для функции $h(z)$ упрощается. В случаях 1) и 2) оно принимает соответственно вид:

$$1)\qquad \left(z^2\frac{d^2}{dz^2}+\left(-z^2+cz+t\right)\frac{d}{dz}+(-az+\lambda)\right)h_1=0\,; \tag{24}$$

$$2)\qquad \left(z^2\frac{d^2}{dz^2}+[-z^2+(4-c)z-t]\frac{d}{dz}+[-(a-c+2)z+(\lambda+2-c+t)]\right)h_2=0\,. \tag{25}$$

Уравнение (25) для $h_2(z)$ можно также рассматривать как дважды вырожденное уравнение Гойна вида (24), но с другими (штрихованными) параметрами:

$$c'=4-c,\quad t'=-t,\quad a'=a-c+2,\quad \lambda'=\lambda+2-c+t\,.$$

Решения для функций $h(x)$ могут быть построены в виде степенных рядов. Описан известный характер 3-членного зацепления коэффициентов в соответствующих степенных рядах – на деталях останавливаться не будем.

3. Качественный анализ дифференциальных уравнений. Возвратимся к уравнениям второго порядка (13), (14):

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\varepsilon^2-M^2-\frac{\nu(\nu+1)}{r^2}+2\Gamma\frac{\nu+1}{r^3}-\frac{\Gamma^2}{r^4}\right)f=0\,,$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\varepsilon^2-M^2-\frac{\nu(\nu-1)}{r^2}+2\Gamma\frac{\nu-1}{r^3}-\frac{\Gamma^2}{r^4}\right)g=0\,;$$

напоминаем, что уравнения связаны симметрией $\nu\Rightarrow-\nu$, $\Gamma\Rightarrow-\Gamma$.

Каждое из этих уравнений при фиксированных ν, Γ описывает по две разные ситуации:

$$\nu(\nu+1)=x(x+1) \quad \Rightarrow \quad x'=\nu, \quad \Gamma'=+\Gamma\,; \quad x''=-\nu-1, \quad \Gamma''=-\Gamma\,;$$

$$\nu(\nu-1)=y(y-1) \quad \Rightarrow \quad y''=\nu, \quad \Gamma''=+\Gamma\,; \quad y'=-\nu+1, \quad \Gamma'=-\Gamma\,.$$

Это соответствует тому, что у каждого уравнения второго порядка есть два линейно независимых решения; без специального анализа наперед нельзя указывать пары решений, связываемых дифференциальными операторами первого порядка (но именно такие пары являются решениями исходной задачи).

Эти уравнения можно исследовать качественно, анализируя функции $P^2(z)$, $Q^2(z)$:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+P^2(r)\right)f(r)=0\,, \qquad \left(\frac{d^2}{dr^2}+Q^2(r)\right)g(r)=0\,.$$

Установим поведение этих функций

$$\begin{aligned} P^2(r)&=\varepsilon^2-M^2-\frac{\nu(\nu+1)}{r^2}+2\Gamma\frac{\nu+1}{r^3}-\frac{\Gamma^2}{r^4}\,,\\ Q^2(r)&=\varepsilon^2-M^2-\frac{\nu(\nu-1)}{r^2}+2\Gamma\frac{\nu-1}{r^3}-\frac{\Gamma^2}{r^4} \end{aligned} \tag{26}$$

около особых точек $r=0,\ r=+\infty$:

$$\begin{aligned} r\to 0, \qquad & P^2(r)=-\frac{\Gamma^2}{r^4}<0\,, \quad Q^2(r)=-\frac{\Gamma^2}{r^4}<0\,,\\ r\to+\infty, \qquad & P^2=\varepsilon^2-M^2<0\,, \qquad Q^2(r)=\varepsilon^2-M^2<0\,. \end{aligned} \tag{27}$$

Области, где квадрат эффективного импульса отрицательный, запрещены для классического движения частицы; предполагаем описание связанных состояний в системе, в соответствии с чем должна существовать область финитного движения частицы. Исследуем точки поворота – решения уравнений $P^2(r)=0$ и $Q^2(r)=0$:

$$\begin{aligned} P^2(r)=0\,, \quad (\varepsilon^2-M^2)r^4-\nu(\nu+1)r^2+2\Gamma(\nu+1)r-\Gamma^2=0\,;\\ Q^2(r)=0\,, \quad (\varepsilon^2-M^2)r^4-\nu(\nu-1)r^2+2\Gamma(\nu-1)r-\Gamma^2=0\,. \end{aligned} \tag{28}$$

Для корней этих полиномов имеем тождества:

$$P^2, \quad (\varepsilon^2-M^2)r^4-\nu(\nu+1)r^2+2\Gamma(\nu+1)r-\Gamma^2=(\varepsilon^2-M^2)(r-r_1)(r-r_2)(r-r_3)(r-r_4)\,,$$

$$Q^2, \quad (\varepsilon^2-M^2)r^4-\nu(\nu-1)r^2+2\Gamma(\nu-1)r-\Gamma^2=(\varepsilon^2-M^2)(r-R_1)(r-R_2)(r-R_3)(r-R_4)\,;$$

откуда находим ограничения для корней:

$$\begin{gathered} \underline{P^2}, \quad r_1+r_2+r_3+r_4=0\,,\\ (r_1r_2+r_1r_3+r_1r_4+r_2r_3+r_2r_4+r_3r_4)=-\frac{\nu(\nu+1)}{\varepsilon^2-M^2}\,,\\ (-r_2r_3r_4-r_1r_3r_4-r_1r_2r_4-r_1r_2r_3)=\frac{2\Gamma(\nu+1)}{\varepsilon^2-M^2}\,,\\ r_1r_2r_3r_4=\frac{\Gamma^2}{M^2-\varepsilon^2}>0\,; \end{gathered} \tag{29}$$

$$\underline{Q^2}, \quad R_1 + R_2 + R_3 + R_4 = 0\,,$$

$$(R_1R_2 + R_1R_3 + R_1R_4 + R_2R_3 + R_2R_4 + R_3R_4) = -\frac{\nu(\nu-1)}{\varepsilon^2 - M^2}\,,$$

$$(-R_2R_3R_4 - R_1R_3R_4 - R_1R_2R_4 - R_1R_2R_3) = \frac{2\Gamma(\nu-1)}{\varepsilon^2 - M^2}\,, \tag{30}$$

$$R_1R_2R_3R_4 = \frac{\Gamma^2}{M^2 - \varepsilon^2} > 0\,.$$

Учитывая для каждого случая первое и четвертое уравнения, заключаем, что невозможно иметь четыре положительных или четыре отрицательных корня, но, например, возможно иметь два положительных корня и два отрицательных, или два положительных и два комплексно сопряженных:

$$(r_1, r_2, r_3, r_4) \quad \longrightarrow \quad (-,-,+,+), (z, z^*, +, +)\,;$$

$$(R_1, R_2, R_3, R_4) \quad \longrightarrow \quad (-,-,+,+), (Z, Z^*, +, +)\,. \tag{31}$$

Это означает, что существует область значений параметров, для которой реализуется ситуация с финитным движением между двумя положительными точками поворота. Можно ожидать существования связанных состояний в системе незаряженная частица со спином 1/2 и аномальным магнитным моментом в кулоновском поле.

Таким образом, качественный анализ указывает на то, что для частицы с нулевым электрическим зарядом и ненулевым аномальным магнитным моментом связанные состояния во внешнем кулоновском поле (притяжения) могут возникать только при положительном параметре Г.

Авторы выражают благодарность В. В. Киселю и В. М. Редькову за полезные советы и помощь в работе.

Список использованной литературы

1. *Фрадкин, Е. С.* К теории частиц с высшими спинами / Е. С. Фрадкин // ЖЭТФ. – 1950. – Т. 20. – С. 27–38.

2. *Файнберг, В. Я.* К теории взаимодействия частиц с высшими спинами с электромагнитным и мезонным полями / В. Я. Файнберг // Тр. ФИАН СССР. – 1955. – Т. 6. – С. 269–332.

3. *Petras, M.* A note to Bhabha's equation for a particle with maximum spin 3/2 / M. Petras // Czehc. J. Phys. – 1955. – Vol. 5, N. 3. – P. 418–419.

4. *Улегла, И.* Аномальные уравнения для частиц со спином 1/2 / И. Улегла // ЖЭТФ. – 1957. – Т. 33. – С. 473–477.

5. *Федоров, Ф. И.* Волновые уравнения с кратными представлениями группы Лоренца. Целый спин / Ф. И. Федоров, В. А. Плетюхов // Вес. АН БССР. Сер. фiз.-мат. навук. – 1969. – № 6. – С. 81–88; *Они же.* Волновые уравнения с кратными представлениями группы Лоренца. Полуцелый спин // Вес. АН БССР. Сер. фiз.-мат. навук. – 1970. – №. 3. – С. 78–83; *Они же.* Волновые уравнения с кратными представлениями для частицы со спином 0 // Вес. АН БССР. Сер. фiз.-мат. навук. – 1970. – № 2. – С. 79–85; *Они же.* Волновые уравнения с кратными представлениями для частицы со спином 1 // Вес. АН БССР. Сер. фiз.-мат. навук. – 1970. – № 3. – С. 84–92.

6. *Capri, A. Z.* Nonuniqueness of the spin 1/2 equation / A. Z. Capri // Phys. Rev. – 1969. – Vol. 178, N 5. – P. 1811–1815; *Idem.* First-order wave equations for half-odd-integral spin // Phys. Rev. – 1969. – Vol. 178. – P. 2427–2433; *Idem.* Electromagnetic properties of a new spin-1/2 field // Progr. Theor. Phys. – 1972. – Vol. 48. – P. 1364–1374.

7. *Богуш, А. А.* Уравнения с кратными представлениями группы Лоренца и взаимодействие типа Паули / А. А. Богуш, В. В. Кисель // Вес. АН БССР. Сер. фiз.-мат. навук. – 1979. – № 3. – С. 61–65; *Они же.* Описание свободной частицы различными волновыми уравнениями // Докл. АН БССР. – 1984. – Т. 28. – № 8. – С. 702–705; *Они же.* Уравнение для частицы со спином 1/2, обладающей аномальным магнитным моментом // Изв. вузов. Физика. – 1984. – № 1. – С. 23–27.

8. Об описании поляризуемости скалярных частиц в теории релятивистских волновых уравнений / А. А. Богуш [и др.] // Ковариантные методы в теоретической физике. Физика элементарных частиц и теория относительности / ИФ АН БССР. – Минск, 1981. – С. 81–90.

9. *Богуш, А. А.* Об интерпретации дополнительных компонент волновых функций при электромагнитном взаимодействии / А. А. Богуш, В. В. Кисель, Ф. И. Федоров // Докл. АН СССР. – 1984. – Т. 277, № 2. – С. 343–346.

10. Теория Петраша для частицы со спином 1/2 в искривленном пространстве-времени / А. А. Богуш [и др.] // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2002. – № 1. – С. 63–68.

11. *Плетюхов, В. А.* Релятивистские волновые уравнения и внутренние степени свободы / В. А. Плетюхов, В. М. Редьков, В. И. Стражев. – Минск: Беларус. навука, 2015.

12. *Редьков, В. М.* Тетрадный формализм, сферическая симметрия и базис Шредингера / В. М. Редьков. – Минск: Белорус. наука, 2011.

13. *Slavyanov, S. Yu.* Special functions. A unified theory based on singularities / S. Yu. Slavyanov, W. Lay. – New York: Oxford University Press, 2000.

Поступила в редакцию 22.04.2016