МАТЭМАТЫКА

УДК 517.956.3

В. И. КОРЗЮК[1,2]

ЗАДАЧИ СОПРЯЖЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ПУАССОНА

[1]*Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь,*
[2]*Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь,*
e-mail: korzyuk@bsu.by

В пространствах Соболева и их подпространствах с учетом граничных условий доказываются теоремы существования обобщенных решений задач сопряжения уравнений Пуассона. В процессе доказательства используются операторы осреднения с переменным шагом.

Ключевые слова: обобщенное решение, уравнение Пуассона, задача сопряжения, операторы осреднения с переменным шагом, эллиптическое уравнение.

V. I. KORZYUK[1,2]

PROBLEMS OF CONJUGATION OF THE POISSON EQUATIONS

[1]*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus*
[2]*Belarusian State University, Minsk, Belarus, e-mail: korzyuk@bsu.by*

In Sobolev spaces and its subspaces considering boundary conditions theorems of existence of the generalized solutions of the conjugation problems of the Poisso′n equation were proved. In these proofs the mollifiers operators with variable step are used.

Keywords: generalized solution, Poisson equation, conjugation problem, mollifiers operators with variable step, elliptic equation.

Введение. Задачи сопряжения эллиптических уравнений возникают при описании многих стационарных процессов в средах с резко отличающимися физическими свойствами. Эти свойства характеризуются тем, что при переходе от одной среды к другой искомые функции и их производные терпят резкие изменения, которые математически выражаются записью через условия сопряжения. В работах [1, 2] рассмотрены граничные задачи для уравнения Пуассона и других эллиптических уравнений второго порядка в областях с достаточно кусочно-гладкими границами. Используя методику этих работ, докажем разрешимость задач сопряжения уравнений Пуассона.

1. Постановка задачи. Пусть Ω – ограниченная область n-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ переменных $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,...,x_n)$ с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$, для которой справедлива формула Остроградского. Такой же гладкостью обладает и гиперповерхность γ, которая делит область Ω на две подобласти $\Omega^{(1)}$ и $\Omega^{(2)}$.

Для функций $u^{(j)}:\Omega^{(j)}\ni\boldsymbol{x}\to u^{(j)}(\boldsymbol{x})\in\mathbb{R}=\mathbb{R}^1$ рассмотрим уравнения типа Пуассона

$$A^{(j)}u^{(j)}=\Delta u^{(j)}-a^{(j)}(\boldsymbol{x})u^{(j)}=f^{(j)}(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x}\in\Omega^{(j)},\ j=1,2, \tag{1}$$

где Δ – оператор Лапласа и $\Delta=\sum_{i=1}^{n}\partial_{x_i}^2=\sum_{i=1}^{n}\partial^2/\partial x_i{}^2$. Если $a^{(j)}\equiv 0$, то уравнения (1) – уравнения Пуассона.

Обозначим через $C^k(G)$ множество непрерывно дифференцируемых функций до порядка $k \in \mathbb{N}$, заданных на G, где G – области $\Omega^{(j)}$ или их замыкания $\overline{\Omega^{(j)}}$, $j=1,2$. В уравнениях (1) функции $u^{(j)}$ принадлежат пересечению $C^2\left(\Omega^{(j)}\right) \cap C^1\left(\overline{\Omega^{(j)}}\right)$.

На границе $\partial\Omega$ области Ω к уравнениям (1) присоединяется одно из граничных условий

$$u(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \partial\Omega) = \varphi(\boldsymbol{x}), \tag{2}$$

$$\partial_{\boldsymbol{\nu}} u(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \partial\Omega) = \psi(\boldsymbol{x}), \tag{3}$$

где $\partial_{\boldsymbol{\nu}} = \partial/\partial\boldsymbol{\nu}$ – производная по единичной внешней относительно области Ω нормали $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n)$ в точках $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ гиперповерхности $\partial\Omega$. На границе раздела $\gamma = \overline{\Omega^{(1)}} \cap \overline{\Omega^{(2)}}$ областей $\Omega^{(j)}$ $(j=1,2)$ задаются условия сопряжения

$$\begin{gathered} u^{(1)}(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \gamma) - k^{(0)} u^{(2)}(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \gamma) = \psi^{(0)}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \gamma, \\ \partial_{\boldsymbol{\nu}} u^{(1)}(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \gamma) - k^{(1)} \partial_{\boldsymbol{\nu}} u^{(2)}(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \gamma) = \psi^{(1)}(\boldsymbol{x}), \end{gathered} \tag{4}$$

где $\boldsymbol{\nu}$ – единичная внешняя относительно подобластей $\Omega^{(j)}$ нормаль в точках $\boldsymbol{x}$ гиперповерхности γ.

Таким образом, имеем две задачи сопряжения (1), (2), (4) и (1), (3), (4), которые условно назовем задачами $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{N}$.

2. Вспомогательные утверждения. Обозначим через $H^2\left(\Omega^{(j)}\right)$ пространство Соболева квадратично суммируемых в $\overline{\Omega^{(j)}}$ функций вместе с квадратично суммируемыми обобщенными производными первого и второго порядков. Пусть $\mathcal{H}^2(\Omega)$ – гильбертово пространство функций $u = u^{(j)}$, $\boldsymbol{x} \in \Omega^{(j)}$, $(j=1,2)$, где $u^{(j)} \in H^2\left(\Omega^{(j)}\right)$. Скалярное произведение $(u,v)_{\mathcal{H}^2(\Omega)}$ элементов $u, v \in \mathcal{H}^2(\Omega)$ определяется следующим образом:

$$(u,v)_{\mathcal{H}^2(\Omega)} = \sum_{j=1}^{2} \sum_{|\alpha| \le 2} \left(D^{\boldsymbol{\alpha}} u^{(j)}, D^{\boldsymbol{\alpha}} v^{(j)}\right)_{L_2\left(\Omega^{(j)}\right)}.$$

Здесь $D^{\boldsymbol{\alpha}} u^{(j)}$ – производные порядка $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ и $D^{\boldsymbol{\alpha}} u^{(j)} = \partial_{x_1}^{\alpha_1} ... \partial_{x_n}^{\alpha_n} u^{(j)}$, $|\boldsymbol{\alpha}| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$, α_s – целые неотрицательные из $\mathbb{R}$ числа, $s = 1, ..., n$, $L_2\left(\Omega^{(j)}\right)$ – пространство квадратично суммируемых на $\Omega^{(j)}$ функций.

Для доказательства корректной постановки названных задач используем теорему Рисса о представлении линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве [3, п. 17; 4, п. 6.1.3]. Для этого задачи запишем в виде интегральных равенств. Наша цель доказать существование решений, имеющих все обобщенные производные второго порядка.

Рассмотрим задачи $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{N}$, когда граничные условия (2), (3) и условия сопряжения (4) являются однородными. Если эти условия являются неоднородными, то путем продолжения заданных функций φ, ψ, $\psi^{(j)}$ $(j=1,2)$ и соответствующей замены искомой функции получим задачи $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{N}$ с однородными граничными условиями

$$u(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \partial\Omega) = 0, \ \boldsymbol{x} \in \partial\Omega, \tag{5}$$

$$\partial_{\boldsymbol{\nu}} u(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \partial\Omega) = 0, \ \boldsymbol{x} \in \partial\Omega, \tag{6}$$

и однородными условиями сопряжения

$$\begin{gathered} u^{(1)}(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \gamma) - k^{(0)} u^{(2)}(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \gamma) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \gamma, \\ \partial_{\boldsymbol{\nu}} u^{(1)}(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \gamma) - k^{(1)} \partial_{\boldsymbol{\nu}} u^{(2)}(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \gamma) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \gamma, \end{gathered} \tag{7}$$

где $k^{(j)}$ – некоторые константы, отличные от нуля, $j = 0,1$.

Таким образом, теперь рассматриваемые задачи (1), (5)–(7) с однородными граничными условиями (5) или (6) и условиями сопряжения (7) отличаются друг от друга граничными условиями (5) и (6). Эти задачи условно будем называть задачей $\boldsymbol{D_0}$ и задачей $\boldsymbol{N_0}$.

Запишем задачу $\boldsymbol{D_0}$ в операторном виде

$$A^D u(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}), \tag{8}$$

где $A^D u(\boldsymbol{x}) = A^{(j)} u^{(j)}(\boldsymbol{x})$, $u(\boldsymbol{x}) = u^{(j)}(\boldsymbol{x})$, $f(\boldsymbol{x}) = f^{(j)}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \Omega^{(j)}$, $j = 1,2$, $u^{(j)} \in C^2\left(\Omega^{(j)}\right) \cap C\left(\overline{\Omega^{(j)}}\right)$, функция u удовлетворяет однородным условиям (5), (7). В этом случае будем говорить, что u принадлежит области определения $\mathcal{D}\left(A^D\right)$ оператора A^D уравнения (8).

Аналогично задачу $\boldsymbol{N_0}$ рассматриваем как операторное уравнение

$$A^N u(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) \tag{9}$$

с областью определения $\mathcal{D}\left(A^N\right) = \left\{ u \mid u(\boldsymbol{x}) = u^{(j)}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \Omega^{(j)}, \quad u^{(j)} \in C^2\left(\Omega^{(j)}\right) \cap C^1\left(\overline{\Omega^{(j)}}\right) \right\}$, где u удовлетворяет условиям (6), (7). Здесь $A^N u(\boldsymbol{x}) = A^{(j)} u^{(j)}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \Omega^{(j)}$, $j = 1,2$.

Обозначим через $\mathcal{H}^2_{\text{гр}}(\Omega, \boldsymbol{D_0})$ подпространство гильбертова пространства $\mathcal{H}^2(\Omega)$, элементы которого почти всюду удовлетворяют условиям (5), (7). Аналогично $\mathcal{H}^2_{\text{гр}}(\Omega, \boldsymbol{N_0})$ – подпространство $\mathcal{H}^2(\Omega)$, элементы которого удовлетворяют условиям (6), (7).

У с л о в и е 1. *Граница $\partial\Omega$ и поверхность раздела γ таковы, что замыкание множества $\mathcal{D}\left(A^D\right)$ по норме пространства $\mathcal{H}^2(\Omega)$ совпадает с пространством $\mathcal{H}^2_{\text{гр}}(\Omega, \boldsymbol{D_0})$.*

У с л о в и е 2. *Граница $\partial\Omega$ и гиперповерхность γ таковы, что замыкание множества $\mathcal{D}\left(A^N\right)$ по норме пространства $\mathcal{H}^2(\Omega)$ совпадает с пространством $\mathcal{H}^2_{\text{гр}}(\Omega, \boldsymbol{N_0})$.*

Л е м м а 1. *Для любых функций $u, v \in \mathcal{D}\left(A^D\right)$ или $u, v \in \mathcal{D}\left(A^N\right)$ существует такое число* ρ, *что справедливо равенство*

$$\begin{gathered} \left(\rho\Delta u^{(1)}, \Delta v^{(1)}\right)_{L_2\left(\Omega^{(1)}\right)} + \left(\Delta u^{(2)}, \Delta v^{(2)}\right)_{L_2\left(\Omega^{(2)}\right)} = \\ = \sum_{k,l=1}^{n} \left(\rho \partial_{x_k} \partial_{x_l} u^{(1)}, \partial_{x_k} \partial_{x_l} v^{(1)}\right)_{L_2\left(\Omega^{(1)}\right)} + \sum_{k,l=1}^{n} \left(\partial_{x_k} \partial_{x_l} u^{(2)}, \partial_{x_k} \partial_{x_l} v^{(2)}\right)_{L_2\left(\Omega^{(2)}\right)}. \end{gathered} \tag{10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть функции u и v принадлежат множеству $\mathcal{D}\left(A^D\right)$. В силу формулы Остроградского, интегрируя по частям, получим равенства

$$\begin{gathered} \left(\Delta u^{(j)}, \Delta v^{(j)}\right)_{L_2\left(\Omega^{(j)}\right)} = \int_{\partial\Omega^{(j)}} \left[\partial_{\boldsymbol{\nu}} u^{(j)} \Delta v^{(j)} - \sum_{k=1}^{n} \partial_{x_k} u^{(j)} \cdot \partial_{\boldsymbol{\nu}} \partial_{x_k} v^{(j)} \right] ds + \\ + \sum_{k,l=1}^{n} \left(\partial_{x_k} \partial_{x_l} u^{(j)}, \partial_{x_k} \partial_{x_l} v^{(j)}\right)_{L_2\left(\Omega^{(j)}\right)}, \quad j = 1,2. \end{gathered} \tag{11}$$

В точках $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$ и $\boldsymbol{x} \in \gamma$ для функций $u^{(j)}$, $v^{(j)}$, $j = 1,2$, с помощью локальной декартовой системы $\left\{\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\tau}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{\tau}^{(n-1)}\right\}$ доказываются равенства

$$\left(\partial_{\boldsymbol{\nu}} u^{(j)} \Delta v^{(j)} - \sum_{k=1}^{n} \partial_{x_k} u^{(j)} \cdot \partial_{\boldsymbol{\nu}} \partial_{x_k} v^{(j)}\right)(\boldsymbol{x}) = \left(\partial_{\boldsymbol{\nu}} u^{(j)} \sum_{k=1}^{n-1} \partial^2_{\boldsymbol{\tau}^{(k)}} v^{(j)} - \sum_{k=1}^{n-1} \partial_{\boldsymbol{\tau}^{(k)}} u^{(j)} \partial_{\boldsymbol{\nu}} \partial_{\boldsymbol{\tau}^{(k)}} v^{(j)}\right)(\boldsymbol{x}), \tag{12}$$

где векторы $\boldsymbol{\tau}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{\tau}^{(n-1)}$ находятся в касательных гиперплоскостях к гиперповерхностям $\partial\Omega$ и γ с началом в точках $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$ или $\boldsymbol{x} \in \gamma$.

В силу условия (5) в точках $\boldsymbol{x} \in \partial\Omega$ выражение (12) обращается в нуль.

Пусть теперь $\boldsymbol{x} \in \gamma$. Используя условия сопряжения (7), получим равенство

$$\left(\rho\partial_{\boldsymbol{\nu}}u^{(1)}\sum_{k=1}^{n-1}\partial^2_{\boldsymbol{\tau}^{(k)}}v^{(1)} - \rho\sum_{k=1}^{n-1}\partial_{\boldsymbol{\tau}^{(k)}}u^{(1)}\partial_{\boldsymbol{\nu}}\partial_{\boldsymbol{\tau}^{(k)}}v^{(1)}\right)(\boldsymbol{x}) =$$
$$= \left(\rho k^{(1)}\partial_{\boldsymbol{\nu}}u^{(2)}\sum_{k=1}^{n-1}k^{(0)}\partial^2_{\boldsymbol{\tau}^{(k)}}v^{(2)} - \rho k^{(0)}k^{(1)}\sum_{k=1}^{n-1}\partial_{\boldsymbol{\tau}^{(k)}}u^{(2)}\partial_{\boldsymbol{\nu}}\partial_{\boldsymbol{\tau}^{(k)}}v^{(2)}\right)(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \gamma. \tag{13}$$

Равенство (13) складываем с равенством (12) в случае $j = 2$. В результате получим соотношение

$$\left(\rho\partial_{\boldsymbol{\nu}}u^{(1)}\Delta v^{(1)} - \rho\sum_{k=1}^{n}\partial_{x_k}u^{(1)}\partial_{\boldsymbol{\nu}}\partial_{x_k}v^{(1)} + \partial_{\boldsymbol{\nu}}u^{(2)}\Delta v^{(2)} - \sum_{k=1}^{n}\partial_{x_k}u^{(2)}\partial_{\boldsymbol{\nu}}\partial_{x_k}v^{(2)}\right)(\boldsymbol{x}) =$$
$$= \left(\left(1 + \rho k^{(0)}k^{(1)}\right)\left[\partial_{\boldsymbol{\nu}}u^{(2)}\Delta v^{(2)} - \sum_{k=1}^{n}\partial_{\boldsymbol{\tau}^{(k)}}u^{(2)}\partial_{\boldsymbol{\nu}}\partial_{x_k}v^{(2)}\right]\right)(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \gamma. \tag{14}$$

Число ρ в (14) выбираем таким, чтобы сумма $\left(1 + \rho k^{(0)}k^{(1)}\right)$ равнялась нулю. В результате соотношение (14) тоже будет равно нулю для любого $\boldsymbol{x} \in \gamma$.

Таким образом, отсюда в силу равенств (11)–(13) и получим доказываемое равенство (10) для любых функций $u, v \in \mathcal{D}\left(A^D\right)$.

Равенство (10) для любых функций $u, v \in \mathcal{D}\left(A^N\right)$ доказывается аналогично, при этом используются соотношения (11)–(14) и условия (6) и (7).

З а м е ч а н и е 1. Утверждения леммы 1 путем предельного перехода распространяются на любые функции $u, v \in \mathcal{H}^2_{\text{гр}}(\Omega, \boldsymbol{D_0})$ или $u, v \in \mathcal{H}^2_{\text{гр}}(\Omega, \boldsymbol{N_0})$.

3. Задача $\boldsymbol{D_0}$. Рассмотрим операторное уравнение (8) с областью определения $\mathcal{D}\left(A^D\right)$. Поскольку множество $\mathcal{D}\left(A^D\right)$ является плотным в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}^2_{\text{гр}}(\Omega, \boldsymbol{D_0})$, то уравнение (8) по непрерывности можно продолжить для любой функции $u \in \mathcal{H}^2_{\text{гр}}(\Omega, \boldsymbol{D_0})$. Полученное продолжение запишем в виде операторного уравнения

$$\overline{A^D}u(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}),\ u \in \mathcal{D}\left(\overline{A^D}\right) = \mathcal{H}^2_{\text{гр}}(\Omega, \boldsymbol{D_0}). \tag{15}$$

Расширенный оператор $\overline{A^D}$ можно рассматривать и как замыкание оператора A^D из пространства $\mathcal{H}^2_{\text{гр}}(\Omega, \boldsymbol{D_0})$ в пространство $L_2(\Omega)$.

Существование решения уравнения (15) докажем на основании утверждения теоремы Рисса о представлении линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве. Данный функционал введем следующим образом.

Введем оператор $B = \Delta - \lambda$ с областью определения $\mathcal{D}(B) = \mathcal{D}\left(\overline{A^D}\right) = \mathcal{H}^2_{\text{гр}}(\Omega, \boldsymbol{D_0})$. Уравнение (15) умножим на функцию $\boldsymbol{\rho} = (\rho, 1)$, где $\boldsymbol{\rho} = \rho$, если $\boldsymbol{x} \in \Omega^{(1)}$, и $\boldsymbol{\rho} = 1$, если $\boldsymbol{x} \in \Omega^{(2)}$. Число $\rho = -\,\big/ k^{(0)}k^{(1)}$. Полученный результат $\boldsymbol{\rho}\,\overline{A^D}(\boldsymbol{x})$ скалярно в $L_2(\Omega)$ умножим на $Bv(\boldsymbol{x})$, где $u, v \in \mathcal{H}^2_{\text{гр}}(\Omega, \boldsymbol{D_0})$. В результате получим соотношение

$$a(u,v) = \left(\boldsymbol{\rho}\overline{A^D}u,\ Bv\right)_{L_2(\boldsymbol{\Omega})} = \rho\left(\Delta u^{(1)}, \Delta v^{(1)}\right)_{L_2\left(\Omega^{(1)}\right)} + \left(\Delta u^{(2)}, \Delta v^{(2)}\right)_{L_2\left(\Omega^{(2)}\right)} -$$
$$-\rho\lambda\left(\Delta u^{(1)}, v^{(1)}\right)_{L_2\left(\Omega^{(1)}\right)} - \lambda\left(\Delta u^{(2)}, v^{(2)}\right)_{L_2\left(\Omega^{(2)}\right)} - \rho\left(\alpha^{(1)}u^{(1)}, \Delta v^{(1)}\right)_{L_2\left(\Omega^{(1)}\right)} - \tag{16}$$
$$-\left(\alpha^{(2)}u^{(2)}, \Delta v^{(2)}\right)_{L_2\left(\Omega^{(2)}\right)} + \rho\lambda\left(\alpha^{(1)}u^{(1)}, v^{(1)}\right)_{L_2\left(\Omega^{(1)}\right)} + \lambda\left(\alpha^{(2)}u^{(2)}, v^{(2)}\right)_{L_2\left(\Omega^{(2)}\right)}.$$

Л е м м а 2. *Пусть* $\alpha^{(j)} \in C^1\left(\overline{\Omega^{(j)}}\right)$. *Тогда для любых функций* $u, v \in \mathcal{D}\left(\overline{A^D}\right)$ *и* $\rho = -1/k^{(0)}k^{(1)}$ *справедливы равенства*

$$\rho\left(\Delta u, v\right)_{L_2(\Omega)} = -\sum_{k=1}^{n}\left(\partial_{x_k} u, \partial_{x_k} v\right)_{L_2(\Omega)}, \tag{17}$$

$$\rho\left(\alpha u, \Delta v\right)_{L_2(\Omega)} = -\sum_{k=1}^{n}\left(\alpha\partial_{x_k} u, \partial_{x_k} v\right)_{L_2(\Omega)} + \sum_{k=1}^{n}\left(\partial_{x_k}\alpha u, \partial_{x_k} v\right)_{L_2(\Omega)}, \tag{18}$$

где $\Delta u^{(\boldsymbol{x})} = \Delta u^{(j)}(\boldsymbol{x})$, *если* $\boldsymbol{x} \in \Omega^{(j)}$, *и* $\partial_{x_k} u(\boldsymbol{x}) = \partial_{x_k} u^{(j)}(\boldsymbol{x})$, *если* $\boldsymbol{x} \in \Omega^{(j)}$, *и т. д.*

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 2 аналогично доказательству леммы 1.

В силу леммы 1 и 2 значение $a(u,v)$ запишется в виде

$$a(u,v) = \rho\sum_{|\alpha|=2}\left(D^{\alpha}u, D^{\alpha}v\right)_{L_2(\Omega)} + \rho\lambda\sum_{k=1}^{n}\left(\partial_{x_k}u, \partial_{x_k}v\right)_{L_2(\Omega)} + \rho\sum_{k=1}^{n}\left(\alpha\partial_{x_k}u, \partial_{x_k}v\right)_{L_2(\Omega)} +$$

$$+\rho\lambda\left(\alpha u, v\right)_{L_2(\Omega)} - \sum_{k=1}^{n}\left(u\partial_{x_k}\alpha, \partial_{x_k}v\right)_{L_2(\Omega)}, \quad u, v \in \mathcal{H}^2_{\text{гр}}\left(\Omega, \boldsymbol{D_0}\right), \tag{19}$$

где $D^{\alpha}u = D^{\alpha}u^{(j)}$, $\Delta u = \Delta u^{(j)}$, $\partial_{x_k}u = \partial_{x_k}u^{(j)}$, $\partial_{x_k}\alpha = \partial_{x_k}\alpha^{(j)}$ и т. д., если $\boldsymbol{x} \in \Omega^{(j)}$, $j = 1, 2$.

Справедливо следующее утверждение, которое сформулируем в виде теоремы.

Т е о р е м а 1. *Пусть функция* α *удовлетворяет условиям леммы* 2 *и* $\alpha(\boldsymbol{x}) \geq 0$. *Если числа* $k^{(j)}$, $j = 1, 2$, *не равны нулю и разных знаков, то существует такое положительное число* λ_0, *что для всех* $\lambda \geq \lambda_0$ *отображение*

$$a : \mathcal{H}^2_{\text{гр}}\left(\Omega, \boldsymbol{D_0}\right) \times \mathcal{H}^2_{\text{гр}}\left(\Omega, \boldsymbol{D_0}\right) \ni u, v \to a(u,v) \in \mathbb{R} \tag{20}$$

является скалярным произведением на декартовом произведении $\mathcal{H}^2_{\text{гр}}\left(\Omega, \boldsymbol{D_0}\right) \times \mathcal{H}^2_{\text{гр}}\left(\Omega, \boldsymbol{D_0}\right)$ *и на множестве* $\mathcal{H}^2_{\text{гр}}\left(\Omega, \boldsymbol{D_0}\right)$ *порождает гильбертово пространство* $\tilde{\mathcal{H}}^2_a\left(\boldsymbol{D_0}\right)$, *эквивалентное пространству* $\mathcal{H}^2_{\text{гр}}\left(\Omega, \boldsymbol{D_0}\right)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. На основании определения скалярного произведения проверим, что отображение (20) действительно удовлетворяет его условиям.

Согласно неравенству Коши – Буняковского в случае скалярного произведения в $L_2(\Omega)$, существует константа $C_1 > 0$, для которой, любого числа ε и каждого элемента $u \in \mathcal{H}^2_{\text{гр}}\left(\Omega, \boldsymbol{D_0}\right)$ выполняется оценка

$$\left|-\sum_{k=1}^{n}\left(u\partial_{x_k}\alpha, \partial_{x_k}u\right)_{L_2(\Omega)}\right| \leq \varepsilon\left\|u\right\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{C_1}{\varepsilon}\sum_{k=1}^{n}\left\|\partial_{x_k}u\right\|^2_{L_2(\Omega)}. \tag{21}$$

Так как $k^{(j)}$ разных знаков, то $\rho > 0$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ за счет выбора λ_0 существует константа $C_2 > 0$, для которой и для элемента $u \in \mathcal{H}^2_{\text{гр}}\left(\Omega, \boldsymbol{D_0}\right)$ выполняется неравенство

$$a(u,v) \geq C_2\sum_{k=1}^{n}\left\|\partial_{x_k}u\right\|^2_{L_2(\Omega)} - \varepsilon\left\|u\right\|^2_{L_2(\Omega)} + \max\{1,\rho\}\lambda_0\left\|\sqrt{\alpha}u\right\|^2_{L_2(\Omega)}. \tag{22}$$

Поскольку в (22) ε – любое положительное число, то $a(u,v) \geq 0$ для достаточно большого положительного числа λ_0. Здесь использован тот факт, что если $\partial_{x_k}\alpha(\boldsymbol{x}) \neq 0$, то в этих точках и $\alpha(\boldsymbol{x}) \neq 0$ почти всюду.

Если $a(u,v) = 0$, то это означает, что

$$\sum_{|\alpha|=1,2}\left\|\partial^{\alpha}_{x_k}u\right\|^2_{L_2(\Omega)} = 0.$$

Отсюда следует, что все обобщенные производные функции и первого и второго порядков равны нулю в Ω. Таким образом, u = const. Но поскольку функция $u \in \mathcal{H}^2_{\text{гр}}(\Omega)$, то она удовлетворяет однородному условию (5). Следовательно, u = const = 0 на Ω.

Остальные свойства проверяются непосредственной проверкой [4; 5, п. 6.1.2].

Далее, как известно, через квадратичную форму (18) вводится норма по формуле

$$\|u\|_{\tilde{\mathcal{H}}^2_a(\boldsymbol{D_0})} = a(u,v)^{1/2}. \tag{23}$$

Таким образом, в отличие от пространства $H^2_{\text{гр}}(\Omega, \boldsymbol{D_0})$ на множестве $\mathcal{H}^2_{\text{гр}}(\Omega, \boldsymbol{D_0})$ с помощью нормы (23), (19) определяется новое гильбертово пространство $\tilde{\mathcal{H}}^2_a(\boldsymbol{D_0})$. Но пространства $\mathcal{H}^2_{\text{гр}}(\Omega, \boldsymbol{D_0})$ и $\tilde{\mathcal{H}}^2_a(\boldsymbol{D_0})$ представляют фактически одно и то же пространство, так как их нормы эквивалентны, т. е. существуют положительные константы C_3 и C_4, для которых выполняются неравенства

$$C_3 \|u\|_{\tilde{\mathcal{H}}^2_a(\boldsymbol{D_0})} \le \|u\|_{\mathcal{H}^2_{\text{гр}}(\Omega, \boldsymbol{D_0})} \le C_4 \|u\|_{\tilde{\mathcal{H}}^2_a(\Omega)} \tag{24}$$

для любого элемента $u \in \mathcal{H}^2_{\text{гр}}(\Omega, \boldsymbol{D_0})$.

Доказательство неравенств (24) без принципиальных изменений проводится по схеме доказательства аналогичного утверждения в [4, п. 1.2] или в [5, п. 5].

Тем самым теорема 1 доказана.

О п р е д е л е н и е 1. Функция $u \in \mathcal{H}^2_{\text{гр}}(\Omega, \boldsymbol{D_0})$ называется обобщенным решением задачи $\boldsymbol{D_0}$ или задачи (1), (5), (7), если она удовлетворяет уравнению

$$a(u,v) = (\rho f, \overline{B}v)_{L_2(\Omega)} \tag{25}$$

для любой функции $v \in \mathcal{H}^2_{\text{гр}}(\Omega, \boldsymbol{D_0})$ и некоторой заданной функции $f \in L_2(\Omega)$, $\lambda \ge \lambda_0$.

Уравнение (25) согласно (16) представляется в виде

$$\rho\left(\overline{A^D}u - f, \overline{B}v\right)_{L_2(\Omega)} = 0. \tag{26}$$

Очевидно, уравнения (15) и (26) будут эквивалентными, если множество значений $\Re(\overline{B})$ оператора $\overline{B}$ будет плотным в $L_2(\Omega)$. Прежде чем доказывать последнее утверждение, рассмотрим сопряженную задачу для оператора $\overline{B}$, т. е.

$$\overline{B}w = g(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x} \in \Omega,\ w \in \mathcal{H}^2(\Omega), \tag{27}$$

$$w(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \partial\Omega) = 0,\ \boldsymbol{x} \in \partial\Omega, \tag{28}$$

$$\begin{gathered} k^{(1)} w^{(1)}(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \gamma) + w^{(2)}(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \gamma) = 0, \\ k^{(0)} \partial_{\boldsymbol{\nu}} w^{(1)}(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \gamma) + \partial_{\boldsymbol{\nu}} w^{(2)}(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \gamma) = 0. \end{gathered} \tag{29}$$

Для любых функций $v \in \mathcal{H}^2_{\text{гр}}(\Omega, \boldsymbol{D_0})$ и $w \in \mathcal{H}^2(\Omega)$, удовлетворяющих условиям (28) и (29), справедливо равенство

$$(\overline{B}v, w)_{L_2(\Omega)} = (v, \overline{B}w)_{L_2(\Omega)}. \tag{30}$$

Обозначим через $H^1(\Omega)$ гильбертово пространство квадратично суммируемых в $L_2(\Omega)$ функций вместе с квадратично суммируемыми обобщенными производными в $L_2\left(\Omega^{(j)}\right)$ первого порядка. Скалярное произведение в $H^1(\Omega)$ задается формулой

$$(u,v)_{\mathcal{H}^1(\Omega)} = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \le 1} \sum_{j=1}^{2} \left(D^{\boldsymbol{\alpha}} u^{(j)}, D^{\boldsymbol{\alpha}} v^{(j)}\right)_{L_2\left(\Omega^{(j)}\right)}.$$

Т е о р е м а 2. *Пусть коэффициенты* $k^{(j)}$ $(j = 0,1)$ *в условиях* (29) *разных знаков. Для оператора B, где* $\lambda \geq 0$, *справедливо энергетическое неравенство*

$$\|w\|_{H'(\Omega)} \leq C\|\overline{B}w\|_{L_2(\Omega)} \tag{31}$$

для любой функции $w \in \mathcal{H}^2(\Omega)$, *удовлетворяющей условиям* (28), (29), *где постоянная* $C > 0$ *не зависит от w,* $\|\bullet\|_{H^1(\Omega)}$ *– значение нормы элементов в пространстве* $H^1(\Omega)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть функция $w \in \mathcal{H}^2(\Omega)$ и удовлетворяет условиям (28), (29). Произведение $w^{(j)}Bw^{(j)}$ проинтегрируем по области $\Omega^{(j)}$, $j = 1,2$. В результате получим соотношения

$$\left(Bw^{(j)}, w^{(j)}\right)_{L_2\left(\Omega^{(j)}\right)} = \int\limits_{\partial\Omega^{(j)}} w^{(j)} \cdot \partial_{\mathbf{v}} w^{(j)} ds - \sum_{k=1}^{n} \left\|\partial_{x_k} w^{(j)}\right\|^2_{L_2\left(\Omega^{(j)}\right)} - \lambda\left\|w^{(j)}\right\|^2_{L_2\left(\Omega^{(j)}\right)}, \ j = 1,2. \tag{32}$$

Равенство (32) в случае $j = 2$ умножаем на число $\rho = -1\big/k^{(0)}k^{(1)}$. Полученные новые равенства для $j = 1,2$ складываем друг с другом. Используя условия (28) и (29), в результате будем иметь соотношение

$$\boldsymbol{\rho}\left(\sum_{k=1}^{n}\|\partial_{x_k} w\|^2_{L_2(\Omega)} + \lambda\|w\|^2_{L_2(\Omega)}\right) = -\boldsymbol{\rho}\left(w, \overline{B}w\right)_{L_2(\Omega)}, \tag{33}$$

где $\boldsymbol{\rho} = 1$, $\partial_{x_k} w = \partial_{x_k} w^{(1)}$, $\overline{B}w = Bw^{(1)}$, если $\boldsymbol{x} \in \Omega^{(1)}$; $\boldsymbol{\rho} = \rho$, $\partial_{x_k} w = \partial_{x_k} w^{(2)}$, $\overline{B}w = Bw^{(2)}$, если $\boldsymbol{x} \in \Omega^{(2)}$ и т. д. Для оценки сверху правой части (33) применяем неравенство Коши – Буняковского с ε. После несложных преобразований получаем доказываемое неравенство (31).

Рассмотрим оператор B из пространства $\mathcal{H}^1_{\text{гр}}(\Omega, \boldsymbol{D_0})$ в $L_2(\Omega)$ с областью определения $\mathcal{D}(B) = \mathcal{H}^2_{\text{гр}}(\Omega, \boldsymbol{D_0})$, где $\mathcal{H}^1_{\text{гр}}(\Omega, \boldsymbol{D_0})$ – подпространство пространства $\mathcal{H}^1(\Omega)$ и является пополнением множества $\mathcal{H}^2_{\text{гр}}(\Omega, \boldsymbol{D_0})$ по норме

$$\|\bullet\|_{\mathcal{H}^1(\Omega)} : \mathcal{H}^2_{\text{гр}}(\Omega, \boldsymbol{D_0}) \ni v \to \|v\|_{\mathcal{H}^1(\Omega)} = (v, v)^{1/2}_{\mathcal{H}^1(\Omega)}.$$

Согласно определению замыкаемых операторов [3], оператор $B : \mathcal{H}^1(\Omega, \boldsymbol{D_0}) \ni v \to L_2(\Omega)$ допускает замыкание тогда и только тогда, если из условия $v_m \to 0$ в $\mathcal{H}^1_{\text{гр}}(\Omega, \boldsymbol{D_0})$ следует сходимость к нулю последовательности $\{Bv_m\}_{m=1}^{\infty}$ по норме пространства $L_2(\Omega)$, т. е. $\|Bv_m\|_{L_2(\Omega)} \to 0$ при $m \to \infty$, где $\{v_m\}_{m=1}^{\infty}$ – последовательность функций $v_m \in \mathcal{H}^2_{\text{гр}}(\Omega, \boldsymbol{D_0})$.

То, что оператор $B : \mathcal{H}^1_{\text{гр}}(\Omega, \boldsymbol{D_0}) \to L_2(\Omega)$ допускает замыкание, доказывается непосредственной проверкой сходимости последовательности Bv_m к нулю, если $v_m \to 0$ при $m \to \infty$. Замкнутый оператор, полученный замыканием оператора $B : \mathcal{H}^1_{\text{гр}}(\Omega, \boldsymbol{D_0}) \to L_2(\Omega)$, обозначим через $\overline{B}$. Справедлива следующая

Теорема 3. *Для замкнутого оператора* $\overline{B} : \mathcal{H}^1_{\text{гр}}(\Omega, \boldsymbol{D_0}) \to L_2(\Omega)$ *справедливо энергетическое неравенство*

$$\|v\|_{\mathcal{H}^1(\Omega)} \leq C\|\overline{B}v\|_{L_2(\Omega)}, \ v \in \mathcal{D}(\overline{B}), \tag{34}$$

где постоянная C не зависит от v, $\lambda \geq 0$.

Неравенство (34) доказывается сначала для гладких функций, например $v \in \mathcal{H}^2_{\text{гр}}(\Omega, \boldsymbol{D_0})$. Доказательство проводится по схеме доказательства энергетического неравенства (31). Затем с помощью предельного перехода неравенство (34) получаем для любой функции $v \in \mathcal{D}(\overline{B})$.

На основании леммы 1 и схемы доказательства неравенства (31) доказывается энергетическое неравенство

$$\|v\|_{\mathcal{H}^2(\Omega)} \le C\|Bv\|_{L_2(\Omega)},\ v \in \mathcal{H}^2_{\text{гр}}(\Omega, \boldsymbol{D_0}), \tag{35}$$

для оператора $B : \mathcal{H}^2_{\text{гр}}(\Omega, \boldsymbol{D_0}) \ni v \to Bv \in L_2(\Omega)$ и $\lambda \ge 0$. Если $\lambda = 0$, то следует воспользоваться методикой доказательства теоремы 1, где $a(u,v) = (\rho\Delta u, \Delta v)_{L_2(\Omega)}$.

Таким образом, оператор B можно рассматривать из пространств $\mathcal{H}^2_{\text{гр}}(\Omega, \boldsymbol{D_0})$ или $\mathcal{H}^1_{\text{гр}}(\Omega, \boldsymbol{D_0})$ в $L_2(\Omega)$. В первом случае он является непрерывным, а во втором – допускает замыкание $\overline{B}$.

Докажем плотность множества значений $\Re(B)$ оператора B в пространстве $L_2(\Omega)$.

Теорема 4. *Множество значений $\Re(B)$ оператора $B : \mathcal{H}^1_{\text{гр}}(\Omega, \boldsymbol{D_0}) \ni v \to Bv \in L_2(\Omega)$ является плотным в $L_2(\Omega)$.*

Доказательство. Пусть w – произвольная функция из $L_2(\Omega)$, к которой ортогональны все значения оператора B, т. е. выполняется равенство

$$(Bv, w)_{L_2(\Omega)} = 0 \tag{36}$$

для любой функции $v \in \mathcal{H}^2_{\text{гр}}(\Omega, \boldsymbol{D_0})$. Поскольку имеется энергетическое неравенство (35), то, согласно теореме 3.4.1 монографии [6], равенство (36) эквивалентно равенству

$$\left(J_{(k)}Bv, w\right)_{L_2(\Omega)} = 0, \tag{37}$$

где $J_{(k)}$ – операторы осреднения с переменным шагом, сохраняющие граничные условия (6) на $\partial\Omega$ и условия сопряжения (7) на γ. В скалярном произведении (37) оператор осреднения $J_{(k)}$ перебрасываем на функцию w. В результате получим равенство

$$\left(Bv, J^*_{(k)}w\right)_{L_2(\Omega)} = 0, \tag{38}$$

где $J^*_{(k)}$ – сопряженный оператор по отношению к оператору $J_{(k)}$. Функция $J^*_{(k)}w$ является гладкой. Поэтому, интегрируя по частям, равенство (38) представим в виде

$$\left(v, BJ^*_{(k)}w\right)_{L_2(\Omega)} M\left(v, J^*_{(k)}w; \partial\Omega^{(j)}, \gamma\right) = 0. \tag{39}$$

В результате интегрирования по частям в левой части соотношения (39) присутствуют слагаемые, заданные на $\partial\Omega^{(j)}$ и без γ, из которых следуют граничные условия. Поскольку (38) выполняется для любой функции v из плотного в $L_2(\Omega)$ множества $\mathcal{H}^2_{\text{гр}}(\Omega, \boldsymbol{D_0})$, то эти граничные условия обращаются в нуль, и для функций $J^*_{(k)}w$ получаем однородное уравнение (27) и однородные условия (28) и (29). В результате предельного перехода равенство (39) распространяется для любых функций $v \in L_2(\Omega)$. Полагаем $v = J^*_{(k)}w$ в соотношении (39). Полученное равенство

$$\left(J^*_{(k)}w, BJ^*_{(k)}w\right)_{L_2(\Omega)} = 0$$

порождает неравенство (31), из которого следует, что $w = 0$ в $L_2(\Omega)$.

Тем самым теорема 4 доказана.

Как было сказано ранее, из теоремы 4 следует, что уравнения (15) и (26) равносильны, где уравнение (26) выполняется для любой функции $v \in \mathcal{H}^2_{\text{гр}}(\Omega, \boldsymbol{D_0})$.

Правая часть уравнения (29)

$$\left(\rho f, \overline{B}v\right)_{L_2(\Omega)} = l^f(v)$$

представляет собой линейный функционал относительно $v \in \mathcal{H}^2_{\text{гр}}(\Omega, \boldsymbol{D_0})$. Если $f \in L_2(\Omega)$, то этот функционал является непрерывным, так как

$$\left|l^f(v)\right| \le C\|f\|_{L_2(\Omega)}\|v\|_{\mathcal{H}^2(\Omega)}.$$

В силу теоремы 1 и теоремы Рисса существует единственный элемент $u \in \mathcal{H}^2_{\text{гр}}(\Omega, \boldsymbol{D_0})$, через который и скалярное произведение $a(u,v)$ единственным образом представляется значение функционала $l^f(v)$, т. е. справедливо уравнение (25) или, в силу теоремы 4, уравнение (1).

Результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема 5. *Пусть* $\alpha^{(j)} \in C^1\left(\Omega^{(j)}\right)$ *и коэффициенты* $k^{(0)}$ *и* $k^{(1)}$ *условий сопряжения* (4) *не равны нулю и разных знаков. Тогда существует единственный элемент* $u \in \mathcal{H}^2_{\text{гр}}(\Omega, \boldsymbol{D_0})$, *который является обобщенным решением задачи* $\boldsymbol{D_0}$ ((1), (5), (7)) *в смысле определения* 1 *или решением этой задачи.*

Замечание 2. Теоремы 3, 4 и неравенство (35) позволяют утверждать, что для любой функции $g \in L_2(\Omega)$ существуют единственные сильные решения задачи (27)–(29) из пространств $\mathcal{H}^i_{\text{гр}}(\Omega, \boldsymbol{D_0})$, $j = 1, 2$.

4. Задача (1), (2), (4). Данная задача отличается от $\boldsymbol{D_0}$ тем, что здесь граничные условия и условия сопряжения неоднородные. Задача (1), (2), (4) сводится к $\boldsymbol{D_0}$ следующим образом. Сначала рассмотрим задачу (1), (2), (7). Если граница $\partial\Omega$ принадлежит классу C^2 и находится на положительном расстоянии от границы раздела γ, функция φ из класса $C^2(\partial\Omega)$ (см. [5, гл. III, § 4]), то тогда существует продолжение Φ функции φ на все области Ω таким образом, что $\Phi \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ и $\Phi = 0$ для всех $\boldsymbol{x} \in \gamma$. С помощью замены $w = u - \Phi$ задача (1), (2), (7) сведется к задаче $\boldsymbol{D_0}$.

В общем случае задачи (1), (2), (4) автору не известны результаты о продолжении функций, которые прямо указывали бы на продолжение, которое при подстановке в условия (2), (4) давало бы значения функций φ, $\psi^{(0)}$ и $\psi^{(1)}$. Здесь требуются дополнительные исследования, и особенно в случае, когда пересечение $\partial\Omega$ с γ не пустое множество.

5. Задача $\boldsymbol{N_0}$. С помощью формы $a(u, v)$, определяемой правой частью (18), изучается и задача сопряжения $\boldsymbol{N_0}$ с однородным условием Неймана (6).

Обозначим через $\mathcal{H}^2_{\text{гр}}(\Omega, \boldsymbol{N_0})$ подпространство пространства $\mathcal{H}^2(\Omega)$, элементы которого удовлетворяют однородным условиям (6), (7). Для данного множества $\mathcal{H}^2_{\text{гр}}(\Omega, \boldsymbol{N_0})$ справедлив аналог теоремы 1.

Теорема 6. *Пусть функции* $\alpha^{(j)}$ *уравнения* (1) *таковы, что* $\alpha^{(j)} \in C^1\left(\overline{\Omega^{(j)}}\right)$, $\alpha^{(j)} \ge 0$,

$$\int_\Omega \alpha(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} \ne 0, \tag{40}$$

для чисел $k^{(j)}$, $j = 1, 2$, *произведение* $k^{(1)}k^{(2)} < 0$. *Тогда существует такое положительное число* λ_0, *что для всех* $\lambda \ge \lambda_0$ *отображение*

$$a : \mathcal{H}^2_{\text{гр}}(\Omega, \boldsymbol{N_0}) \times \mathcal{H}^2_{\text{гр}}(\Omega, \boldsymbol{N_0}) \ni u, v \to a(u,v) \in \mathbb{R}$$

является скалярным произведением на декартовом произведении $\mathcal{H}^2_{\text{гр}}(\Omega, \boldsymbol{N_0}) \times \mathcal{H}^2_{\text{гр}}(\Omega, \boldsymbol{N_0})$, *а на множестве* $\mathcal{H}^2_{\text{гр}}(\Omega, \boldsymbol{N_0})$ *порождает гильбертово пространство* $\tilde{\mathcal{H}}^2_a(\boldsymbol{N_0})$, *эквивалентное пространству* $\mathcal{H}^2_{\text{гр}}(\Omega, \boldsymbol{N_0})$.

Доказательство данной теоремы проводится по схеме доказательства теоремы 1. Однако в отличие от того доказательства здесь используется условие (40), чтобы показать, что $a(u, u) = 0$ тогда и только тогда, когда $u = 0$ в $L_2(\Omega)$.

Для оператора $B : \mathcal{H}^2_{\text{гр}}(\Omega, \boldsymbol{N_0}) \ni v \to Bv \in L_2(\Omega)$ справедлива теорема 4.

Определение 2. Функция $u \in \mathcal{H}^2_{\text{гр}}(\Omega, \boldsymbol{N_0})$ называется обобщенным решением задачи $\boldsymbol{N_0}$ или задачи (1), (6), (7), если она удовлетворяет уравнению (25) для любой функции $v \in \mathcal{H}^2_{\text{гр}}(\Omega, \boldsymbol{N_0})$, $\lambda \ge \lambda_0$ и некоторой заданной функции $f \in L_2(\Omega)$.

Теорема 7. *Пусть выполняются условия теоремы* 6. *Тогда существует единственный элемент* $u \in \mathcal{H}^2_{\text{гр}}(\Omega, \boldsymbol{N_0})$, *который является обобщенным решением задачи* $\boldsymbol{N_0}$ ((1), (6), (7)) *в смысле определения* 2 *или решением задачи* (1), (6), (7).

Доказательство теоремы 7 является фактически доказательством теоремы 5.

Пусть теперь $\alpha(\boldsymbol{x}) \equiv 0$, т. е. условие (40) не выполняется. В этом случае квадратичная форма (19) для функций $u, v \in \mathcal{H}^2_{\text{гр}}(\Omega, \boldsymbol{N_0})$ не будет скалярным произведением, так как не будет выполняться условие: значение $a(u, u) = 0$ тогда и только тогда, когда $u = 0$ в $\mathcal{H}^2_{\text{гр}}(\Omega, \boldsymbol{N_0})$.

Видоизменим соотношение (19) путем прибавления и вычитания слагаемого $(u,v)_{L_2(\Omega)}$. В результате получим новую форму $\tilde{a}(u,v) = a(u,v) + (u,v)_{L_2(\Omega)}$, через которую определяется решение задачи $\boldsymbol{N_0}$ как решение уравнения

$$\tilde{a}(u,v) - (u,v)_{L_2(\Omega)} = (f, Bv)_{L_2(\Omega)} \tag{41}$$

для некоторой заданной функции $f \in L_2(\Omega)$, если v – любая функция из $\mathcal{H}^2_{\text{гр}}(\Omega, \boldsymbol{N_0})$. В данном случае форма $\tilde{a}(u,v)$ будет скалярным произведением, которое на множестве $\mathcal{H}^2_{\text{гр}}(\Omega, \boldsymbol{N_0})$ порождает гильбертово пространство $\mathcal{H}^2_{\tilde{a}}(\boldsymbol{N_0})$, норма которого эквивалентна норме пространства $\mathcal{H}^2_{\text{гр}}(\Omega, \boldsymbol{N_0})$.

Рассматривая отображения $v \to (u,v)_{L_2(\Omega)}$ и $v \to (f, Bv)_{L_2(\Omega)}$ как линейные непрерывные функционалы, получим равенства

$$(u,v)_{L_2(\Omega)} = (\mathcal{K}u, v)_{\mathcal{H}^2_{\tilde{a}}}, \ (f, Bv)_{L_2(\Omega)} = (\mathcal{F}, v)_{\mathcal{H}^2_{\tilde{a}}}, \tag{42}$$

где $\mathcal{K}$ – вполне непрерывный оператор в $\mathcal{H}^2_{\tilde{a}}(\boldsymbol{N_0})$, элемент $\mathcal{F} \in \mathcal{H}^2_{\tilde{a}}(\boldsymbol{N_0})$ определяется единственным образом через элемент $f \in L_2(\Omega)$. Согласно (41) и (42), задачу $\boldsymbol{N_0}$ можно рассматривать как решение уравнения в пространстве $\mathcal{H}^2_{\tilde{a}}(\boldsymbol{N_0})$ или в $\mathcal{H}^2_{\text{гр}}(\Omega, \boldsymbol{N_0})$:

$$u - \mathcal{K}u = \mathcal{F} \tag{43}$$

с вполне непрерывным оператором $\mathcal{K}$. Согласно альтернативе Фредгольма, уравнение (43) разрешимо тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}$ ортогонально решению однородного уравнения

$$w - \mathcal{K}^* w = 0, \tag{44}$$

где $\mathcal{K}^* = \mathcal{K}$ – сопряженный по отношению к $\mathcal{K}$ оператор. Решая уравнение (44), получим $w^{(0)} = \left(k^{(0)}, 1\right)$.

Таким образом, уравнение (43) разрешимо тогда и только тогда, когда

$$\left(\mathcal{F}, w^{(0)}\right)_{\mathcal{H}^2_{\tilde{a}}(\boldsymbol{N_0})} = \left(f, Bw^{(0)}\right)_{L_2(\Omega)} = k^{(0)} \int\limits_{\Omega^{(1)}} f^{(1)}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} + \int\limits_{\Omega^{(2)}} f^{(2)}(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = 0. \tag{45}$$

Теорема 8. *Если* $f \in L_2(\Omega)$, $\partial\Omega$ *и* γ *– кусочно-гладкие гиперповерхности,* $\Omega^{(j)}$ *– ограниченные в* $\mathbb{R}^n$ *области, коэффициенты* $\alpha^{(j)}(\boldsymbol{x}) \equiv 0$ *уравнения* (1), *то обобщенное решение* $u \in \mathcal{H}^2_{\text{гр}}(\Omega, \boldsymbol{N_0})$ *в смысле определения* 2 *задачи* $\boldsymbol{N_0}$ *тогда и только тогда, когда f удовлетворяет условию* (45).

Доказательство следует из предыдущих рассуждений. Более подробно аналогичное доказательство для задачи Неймана уравнения Пуассона можно найти в [4, п. 6.2] или в [5].

В общем случае задачу (1), (3), (4) можно свести к задаче $\boldsymbol{N_0}$, если предварительно найти продолжение $\Phi(\boldsymbol{x})$, которое удовлетворяло бы неоднородным условиям (3) и (4). Но для этой задачи можно ввести обобщенное решение в другом пространстве.

6. Задача (1), (2), (4). Обозначим через $\mathcal{H}^1_{\text{гр}}(\Omega, N)$ подпространство пространства $\mathcal{H}^1(\Omega)$, элементы которого удовлетворяют первому условию сопряжения из (7). Для функций $u, v \in \mathcal{H}^1_{\text{гр}}(\Omega, N) \bigcap \mathcal{H}^2(\Omega)$ рассмотрим скалярные произведения

$$\left(A^{(j)}u^{(j)}, v^{(j)}\right)_{L_2\left(\Omega^{(j)}\right)} = \int\limits_{\partial\Omega^{(j)}} \partial_\nu u^{(j)} \cdot v^{(j)} ds - \sum_{k=1}^{n} \left(\partial_{x_k} u^{(j)}, \partial_{x_k} v^{(j)}\right)_{L_2(\Omega)} - \\ -\left(\alpha u^{(j)}, v^{(j)}\right)_{L_2(\Omega)}, \quad j = 1, 2. \tag{46}$$

Первое уравнение (j = 1) (46) умножаем на $\rho = -1\big/k^{(0)}k^{(1)}$ и складываем со вторым (j = 2). В результате получим соотношение

$$a^1(u, v) = \sum_{k=1}^{n} \rho\left(\partial_{x_k} u, \partial_{x_k} v\right)_{L_2(\Omega)} + \rho(\alpha u, v)_{L_2(\Omega)} = \\ = \rho(\psi, v)_{L_2(\partial\Omega)} - \rho k^{(0)}\left(\psi^{(1)}, v^{(2)}\right)_{L_2(\gamma)} - \rho(f, v)_{L_2(\Omega)}. \tag{47}$$

Л е м м а 3. *Пусть выполняются условия теоремы* 6. *Тогда квадратичная форма левой части* (47) *представляет скалярное произведение на множестве* $\mathcal{H}^1_{\text{гр}}(\Omega, N)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о проводится непосредственной проверкой условий скалярного произведения.

Обозначим через $\mathcal{H}^1_{a^1}(\Omega, N)$ подпространство пространства $\mathcal{H}^1(\Omega)$, норма которого определяется через скалярное произведение $a^1(u, v)$. Нетрудно поверить, что нормы пространств $\mathcal{H}^1_{\text{гр}}(\Omega, N)$ и $\mathcal{H}^1_{a^1}(\Omega, N)$ эквивалентны. Отсюда следует

У т в е р ж д е н и е 1. *Пространства* $\mathcal{H}^1_{\text{гр}}(\Omega, N)$ *и* $\mathcal{H}^1_{a^1}(\Omega, N)$ *с точностью до эквивалентных норм являются одним пространством.*

Для д о к а з а т е л ь с т в а необходимо установить эквивалентность норм. Это легко делается, если выписать значения норм и применить неравенство Коши – Буняковского.

Введем обозначение

$$\mathcal{F}(v) = \rho(\psi, v)_{L_2(\partial\Omega)} - \rho k^{(0)}\left(\psi^{(1)}, v^{(2)}\right)_{L_2(\gamma)} - \rho(f, v)_{L_2(\Omega)}. \tag{48}$$

Соотношение (48) можно рассматривать как значение линейного непрерывного функционала в пространстве $\mathcal{H}^1_{a^1}(\Omega, N)$ или $\mathcal{H}^1_{\text{гр}}(\Omega, N)$, если $\psi \in L_2(\partial\Omega)$, $\psi^{(1)} \in L_2(\gamma)$ и $f \in L_2(\Omega)$.

О п р е д е л е н и е 3. *Обобщенным решением задачи* (1), (3), (4)*, где первое условие сопряжения в* (4) *является однородным, называется функция* $u \in \mathcal{H}^1_{\text{гр}}(\Omega, N)$*, которая удовлетворяет уравнению*

$$a^1(u, v) = \mathcal{F}(v) \tag{49}$$

для любой функции $v \in \mathcal{H}^1_{\text{гр}}(\Omega, N)$.

Т е о р е м а 9. *Пусть выполняются условия теоремы* 6 *и, кроме этого, заданные функции* $\psi \in L_2(\partial\Omega)$, $\psi^{(1)} \in L_2(\gamma)$ *и* $f \in L_2(\Omega)$. *Тогда существует единственное из пространства* $\mathcal{H}^1_{\text{гр}}(\Omega, N)$ *обобщенное в смысле определения* 3 *решение и справедлива оценка*

$$\|u\|_{\mathcal{H}^1(\Omega)} \le C\left(\|\psi\|_{L_2(\partial\Omega)} + \left\|\psi^{(1)}\right\|_{L_2(\gamma)} + \|f\|_{L_2(\Omega)}\right). \tag{50}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выражение (48) рассматривается как значение линейного функционала. Доказывается путем критерия непрерывности, что функционал

$$\mathcal{F}:\mathcal{H}^1_{a^1}(\Omega,N)\ni v\to\mathcal{F}(v)$$

является непрерывным. В силу теоремы Рисса существует единственный элемент $u\in\mathcal{H}^1_{a^1}(\Omega,N)$, для которого выполняется равенство (49) и оценка (50).

Теорема 10. *Если* $\alpha(\boldsymbol{x})\equiv 0$ *и функции* $\psi\in L_2(\partial\Omega)$, $\psi^{(1)}\in L_2(\gamma)$, $f\in L_2(\Omega)$, *то обобщенное решение* $u\in\mathcal{H}^1_{\text{гр}}(\Omega,N)$ *существует тогда и только тогда, когда выполняется условие*

$$\rho\int\limits_{\partial\Omega}\psi(\boldsymbol{x})ds-\rho k^{(0)}\int\limits_{\gamma}\psi^{(1)}(\boldsymbol{x})ds=\rho\int\limits_{\Omega}f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}. \tag{51}$$

При этом решение определяется с точностью до константы C *в том смысле, что* $\boldsymbol{C}=\left(C^{(1)},C^{(2)}\right)$, *где* $C^{(1)}=k^{(0)}C$, $C^{(2)}=C$ *и* $\boldsymbol{C}=C^{(j)}$, *если* $\boldsymbol{x}\in\Omega^{(j)}$.

Если и первое условие сопряжения (4) является также неоднородным, то этот случай сводится к предыдущему случаю. Пусть $\psi^{(0)}\in C^1(\partial\Omega)$. Тогда существует [5] продолжение $\Psi^{(1)}(\boldsymbol{x})\in C^1\left(\Omega^{(1)}\right)$ на $\Omega^{(1)}$ значения $1/2\,\psi^{(0)}(\boldsymbol{x})$. Аналогично существует продолжение $\Psi^{(2)}(\boldsymbol{x})$ на $\Omega^{(2)}$ функции $-1/2\,k^{(0)}\Psi^{(0)}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x}\in\gamma$. Очевидно, функция $\Psi(\boldsymbol{x})=\left(\Psi^{(1)}(\boldsymbol{x}),\Psi^{(2)}(\boldsymbol{x})\right)$ удовлетворяет неоднородному условию

$$\Psi^{(1)}(\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}\in\gamma)-k^{(0)}\Psi^{(2)}(\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}\in\gamma)=\psi^{(0)}(\boldsymbol{x}).$$

Делая замену $w(\boldsymbol{x})=u(\boldsymbol{x})-\Psi(\boldsymbol{x})$ относительно функции w, приходим к только что рассмотренному случаю, так как

$$w^{(1)}(\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}\in\gamma)-k^{(0)}w^{(2)}(\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}\in\gamma)=0.$$

Заключение. Рассмотрены задачи сопряжения уравнений Пуассона. Условия сопряжения являются неоднородными и представляют собой резкое изменение решения и его производной по нормали на границе раздела подобластей. Эти изменения представляют собой конечные разрывы. На границе заданных областей задается либо условие Дирихле, либо условие Неймана.

Для указанных задач рассмотрены обобщенные решения в пространствах Соболева. Методами функционального анализа с использованием операторов осреднения с переменным шагом доказываются теоремы существования и указываются условия, при которых эти решения существуют. Обобщенные решения имеют все обобщенные производные до второго порядка включительно.

Такого рода задачи возникают в электродинамике и других областях в средах с резко отличающимися физическими свойствами.

Легко делаются следующие обобщения:

1) вместо операторов Лапласа могут быть операторы второго порядка эллиптического типа, где вместо производных по нормали берутся производные по конормали;

2) условия на разных частях границы и поверхности раздела подобластей могут быть заданы смешанного типа.

Список использованной литературы

1. *Корзюк, В. И.* Операторы осреднения с переменным шагом в теории разрешимости эллиптических задач / В. И. Корзюк // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2005. – Т. 49, № 6. – С. 25–28.

2. *Корзюк, В. И.* Граничные задачи для эллиптических уравнений второго порядка / В. И. Корзюк , Е. С. Чеб // Тр. Ин-та математики Нац. акад. наук Беларуси. – 2007. – Т. 15, № 2. – С. 38–47.

3. *Треногин, В. А.* Функциональный анализ / В. А. Треногин. – М.: Наука, 1980.

4. *Корзюк, В. И.* Уравнения математической физики / В. И. Корзюк. – Минск: БГУ, 2011.

5. *Михайлов, В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных / В. П. Михайлов. – М.: Наука, 1976.

6. *Корзюк, В. И.* Метод энергетических неравенств и операторов осреднения. Граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными / В. И. Корзюк. – Минск: БГУ, 2013.

Поступила в редакцию 30.12.2015