МАТЭМАТЫКА

УДК 517.956.3

В. И. КОРЗЮК[1,2], *И. С. КОЗЛОВСКАЯ*[1,2], *С. Н. НАУМОВЕЦ*[2,3]

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПЕРВОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ОДНОМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С УСЛОВИЯМИ ТИПА КОШИ

[1]*Институт математики НАН Беларуси*
[2]*Белорусский государственный университет*
[3]*Брестский государственный технический университет*

(Поступила в редакцию 09.02.2015)

Введение. Решение смешанных задач методом характеристик имеет ряд преимуществ в сравнении с другими методами исследования. Так, для гиперболических уравнений он позволяет найти решения в аналитическом виде и расширить разновидность решаемых задач.

В данном случае, кроме традиционных условий Коши, для смешанных задач рассматриваются условия типа Коши, где присутствует производная второго порядка. С физической точки зрения это означает, что в начальный момент времени задаются не только значения и скорости точек, но и их ускорения. Близкими к настоящей работе можно назвать статьи [1–12], где строятся аналитические решения смешанных задач для гиперболических уравнений второго порядка с условиями Коши.

1. Постановка задачи. В замыкании $\overline{Q}=[0,\infty)\times[0,l]$ области $Q=(0,\infty)\times(0,l)$ двух независимых переменных $x=(x_0,x_1)\in\overline{Q}\subset\mathbb{R}^2$ рассмотрим одномерное волновое уравнение

$$Lu=\left(\partial_{x_0}^2-a^2\partial_{x_1}^2\right)u(x)=f(x),\quad (x)\in\overline{Q},\tag{1}$$

где a^2, l – положительные действительные числа, $\partial_{x_0}^2=\partial^2/\partial x_0^2$, $\partial_{x_1}^2=\partial^2/\partial x_1^2$ – частные производные по x_0 и x_1 второго порядка. К уравнению (1) на границе ∂Q области Q присоединяются условия типа Коши и граничные условия на боковых ее частях

$$u(0,x_1)=\varphi(x_1),\quad \left(\partial_{x_0}^2u+\beta\partial_{x_0}u\right)(0,x_1)=\psi(x_1),\quad x_1\in[0,l],\quad \beta\neq 0,\tag{2}$$

$$u(x_0,0)=\mu^{(1)}(x_0),\quad u(x_0,l)=\mu^{(2)}(x_0),\quad x_0\in[0,\infty).\tag{3}$$

Здесь $f:\overline{Q}\ni x\to f(x)$ – заданная функция на $\overline{Q}$, $\varphi:[0,l]\ni x_1\to\varphi(x_1)\in\mathbb{R}$, $\psi:[0,l]\ni x_1\to\psi(x_1)\in\mathbb{R}$ – функции на $[0,l]$, $\mu^{(j)}:[0,\infty)\ni x_0\to\mu^{(j)}(x_0)\in\mathbb{R}$, – заданные функции на $[0,\infty)$, гладкость которых будет уточнена ниже, $j=1,2$.

Функции f, φ, ψ, $\mu^{(j)}$, $j=1,2$, удовлетворяют следующим неоднородным условиям согласования:

$$\begin{gathered}\mu^{(1)}(0)-\varphi(0)=\delta^{(1)},\quad \frac{1}{\alpha\beta}\left[\psi(0)-a^2\varphi''(0)-\beta\mu^{(1)\prime}(0)-f(0,0)\right]=\delta^{(2)},\\ \frac{1}{a^2}\left(\mu^{(1)\prime\prime}(0)-a^2\varphi''(0)-f(0,0)\right)=\delta^{(3)};\end{gathered}\tag{4}$$

$$\mu^{(2)}(0)-\varphi(l)=\sigma^{(1)}, \quad \frac{1}{\alpha\beta}\Big[\beta\mu^{(2)}(0)+a^2\varphi''(l)-\psi(l)+f(0,l)\Big]=\sigma^{(2)},$$
$$\frac{1}{a^2}\Big(\mu^{(2)''}(0)-a^2\varphi''(l)-f(0,l)\Big)=\sigma^{(3)}, \tag{5}$$

где $\mu^{(j)\prime}$ и $\mu^{(j)\prime\prime}$ – производные функции $\mu^{(j)}$ первого и второго порядков, $j=1,2$, φ'' – производная второго порядка функции φ.

Если в условиях согласования (4)–(5) все числа $\sigma^{(j)}=\delta^{(j)}=0$, $j=1,2,3$, то условия (4)–(5) в этом случае будем называть однородными условиями согласования относительно заданных функций задачи (1)–(3).

Отметим, что для достаточно гладких заданных функций уравнения (1) на множестве $\overline{Q}$ и условий (2), (3) на отрезке $[0,l]$ и полупрямой $[0,\infty)$ существует единственное классическое решение этой задачи тогда и только тогда, когда условия согласования (4), (5) на эти функции являются однородными. В противном случае на определенных характеристиках в области Q решение u задачи (1)–(3) вместе с производными терпят разрывы. Эти разрывы можно записать в виде условий сопряжения, что и будет сделано.

Таким образом, в общем случае задачу (1)–(3) можно заменить на задачу (1)–(5) с условиями сопряжения на характеристиках, где скачки функций и ее производных выражаются через заданные действительные числа $\delta^{(j)}$ и $\sigma^{(j)}$, $j=1,2,3$. Решение задачи (1)–(5) будет выписано в аналитическом виде через функции f, φ, ψ, $\mu^{(1)}$ и $\mu^{(2)}$ с помощью соответствующих формул.

2. Решение уравнения (1). Общее решение уравнения (1) представляет сумму общего решения $u^{(0)}$ однородного уравнения

$$\left(\partial_{x_0}^2-a^2\partial_{x_1}^2\right)u^{(0)}(x)=0, \quad x\in\overline{Q}, \tag{6}$$

и частного решения v неоднородного уравнения (1).

Действительно, пусть наряду с решением уравнения (1)

$$u(x)=u^{(0)}(x)+v(x) \tag{7}$$

имеется еще решение $\tilde{u}$ этого уравнения. В силу линейности оператора L имеем $Lu=Lu^{(0)}+Lv=f=L\tilde{u}$. Отсюда

$$Lu-L\tilde{u}=L(u-\tilde{u})=0,$$

т. е. $\tilde{u}^{(0)}=u-\tilde{u}$ – решение уравнения (6). Следовательно, решение

$$\tilde{u}=u-\tilde{u}^{(0)}=u^{(0)}-\tilde{u}^{(0)}+v$$

представим в виде (7), так как $L\left(u^{(0)}-\tilde{u}^{(0)}\right)=0$.

Частное решение v уравнения (1) находим через решение однородного уравнения (6) w с параметром $\tau\in[0,\infty)$ по формуле

$$v(x)=\int_0^{x_0} w(x_0-\tau,\tau,x_1)\,d\tau. \tag{8}$$

Здесь функция $w:(x_0,\tau,x_1)\to w(x_0,\tau,x_1)$ – решение однородного уравнения

$$\partial_{x_0}^2 w(x_0,\tau,x_1)-a^2\partial_{x_1}^2 w(x_0,\tau,x_1)=0, \quad x_1\in[0,l], \tag{9}$$

удовлетворяющего условиям Коши

$$w(0,\tau,x_1)=0, \quad \partial_{x_0}w(0,\tau,x_1)=f(\tau,x_1), \quad x_1\in[0,l],\ \tau\in[0,\infty), \tag{10}$$

где f – правая часть уравнения (1).

Как известно (см. [13, 14]), общее решение уравнения (9) есть сумма двух произвольных функций, а именно:

$$w(x_0,\tau,x_1)=G^{(1)}(x_1-ax_0,\tau)+G^{(2)}(x_1+ax_0,\tau). \tag{11}$$

Подставив выражение (11) в условия Коши (10), получим систему уравнений

$$G^{(1)}(x_1,\tau)+G^{(2)}(x_1,\tau)=0, \quad x_1\in[0,l], \tag{12}$$
$$-a\partial_{x1-ax0}G^{(1)}(x_1-ax_0,\tau)(x_0=0)+a\partial_{x1+ax0}G^{(2)}(x_1+ax_0,\tau)(x_0=0)=f(\tau,x_1),$$

или

$$-a\partial_z G^{(1)}(z,\tau)+a\partial_z G^{(2)}(z,\tau)=f(\tau,z), \quad z\in[0,l]. \tag{13}$$

Интегрируя уравнение (13), имеем

$$-G^{(1,0)}(z,\tau)+G^{(2,0)}(z,\tau)=\frac{1}{a}\int_0^z f(\tau,\xi)d\xi+2\mathrm{C}(\tau), \tag{14}$$

где $C(\tau)$ – произвольная функция. Так как в итоге определяем функцию v через w по формуле (8) как частное решение уравнения (1), то полагаем $C(\tau)\equiv 0$. Из системы (12) и (13) определяем частично значения функций $G^{(j)}$, а именно:

$$G^{(j,0)}(z,\tau)=\frac{(-1)^j}{2a}\int_0^z f(\tau,\xi)d\xi, \quad z\in[0,l],\ j=1,2. \tag{15}$$

По условию задачи $x\in\bar{Q}$. Для всех этих значений x области определения $D(x_1-ax_0)=(-\infty,l]$, $D(x_1+ax_0)=[0,\infty)$ при $a>0$. Поэтому области определения $D\left(G^{(1)}\right)=(-\infty,l]\times[0,\infty)$, $D\left(G^{(2)}\right)=[0,\infty)\times[0,\infty)$, так как функция f определена на $\bar{Q}$. Функции $G^{(j,0)}$ $(j=1,2)$ с помощью формул (15) определены только на отрезке $[0,l]$ относительно первого независимого переменного. В связи с этим введем обозначения

$$G^{(j)}(z,\tau)=\begin{cases} G^{(j,0)}(z,\tau),\ z\in[0,l], \\ G^{(j,1)}(z,\tau),\ z\in D\left(g^{(j)}\right)\setminus[0,l], \end{cases} \tag{16}$$

где $D\left(g^{(1)}\right)=(-\infty,l]$, $D\left(g^{(2)}\right)=[0,\infty)$. Чтобы функции $G^{(j)}$, определяемые формулами (16), принадлежали классу $C^2\left(D\left(g^{(j)}\right)\right)$ относительно первого аргумента, очевидно должны выполняться условия согласования

$$\frac{\partial^p}{\partial z^p}G^{(1,0)}(z,\tau)|_{z=0}=\frac{\partial^p}{\partial z^p}G^{(1,1)}(z,\tau)|_{z=0},$$
$$\frac{\partial^p}{\partial z^p}G^{(2,0)}(z,\tau)|_{z=l}=\frac{\partial^p}{\partial z^p}G^{(2,1)}(z,\tau)|_{z=l}, \quad p=0,1,2.$$

Таким образом, отсюда получаем, что функция $G^{(1,1)}$ удовлетворяет условиям

$$\begin{gathered} G^{(1,1)}(0,\tau)=0, \quad \frac{\partial G^{(1,1)}}{\partial z}(z,\tau)|_{z=0}=-\frac{1}{2a}f(\tau,0), \\ \frac{\partial^2 G^{(1,1)}}{\partial z^2}(z,\tau)|_{z=0}=-\frac{1}{2a}\frac{\partial}{\partial z}f(\tau,z)|_{z=0}, \end{gathered} \tag{17}$$

а функция $G^{(1,1)}$ – условиям

$$G^{(2,1)}(l,\tau)=G^{(2,0)}(l,\tau)=\frac{1}{2a}\int_0^l f(\tau,y)dy,$$
$$\frac{\partial G^{(2,1)}}{\partial z}(z,\tau)|_{z=l}=\frac{\partial G^{(2,0)}}{\partial z}(z,\tau)|_{z=l}=\frac{1}{2a}f(\tau,l), \tag{18}$$
$$\frac{\partial^2 G^{(2,1)}}{\partial z^2}(z,\tau)|_{z=l}=\frac{1}{2a}\frac{\partial}{\partial z}f(\tau,z)|_{z=l}.$$

Через функцию w, определяемую соотношениями (11)–(18), введем функцию $v:\bar{Q}\ni(x_0,x_1)\to v(x_0,x_1)\in\mathbb{R}$, значения которой вычисляются формулой (8), т. е.

$$v(x)=\int_0^{x_0}w(x_0-\tau,\tau,x_1)d\tau=\int_0^{x_0}G^{(1)}(x_1-a(x_0-\tau),\tau)d\tau+\int_0^{x_0}G^{(2)}(x_1+a(x_0-\tau),\tau)d\tau. \tag{19}$$

Заметим, что функции $G^{(j,0)}$ на все области определения $D\left(G^{(j)}\right)$ $(j=1,2)$ можно продлить полиномами, а именно:

$$G^{(1,1)}(z,\tau)=-\frac{1}{2a}f(\tau,0)z-\frac{1}{4a}\frac{\partial}{\partial z}f(\tau,z)|_{z=0}\cdot z^2,$$
$$G^{(2,1)}(z,\tau)=\frac{1}{2a}\int_0^l f(\tau,y)dy+\frac{1}{2a}f(\tau,l)(z-l)+\frac{1}{4a}\frac{\partial}{\partial z}f(\tau,z)|_{z=l}\cdot(z-l)^2.$$

Л е м м а 1. *Если функция f принадлежит классу* $C^{0,1}(\bar{Q})$ *и для* $G^{(j)}$, $j=1,2$, *выполняются условия* (17), (18) (*условия согласования*), *то функция v, определенная формулами* (19), (11)–(18), *принадлежит классу* $C^2(\bar{Q})$, *является решением уравнения* (1) *и удовлетворяет однородным условиям Коши*

$$v(0,x_1)=\partial_{x_0}v(0,x_1)=0. \tag{20}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функция v, определенная через w формулой (19), принадлежит классу $C^2(\bar{Q})$, если $f\in C^{0,1}(\bar{Q})$, что легко видеть из этого выражения и (15).

Подставляя в уравнение (1), убеждаемся, что v из (19) является его решением. Действительно, вычисляя производные, получим

$$\partial_{x_0}v(x)=w(0,x_0,x_1)+\int_0^{x_0}\partial_{x_0-\tau}w(x_0-\tau,\tau,x_1)d\tau=\int_0^{x_0}\partial_{x_0-\tau}w(x_0-\tau,\tau,x_1)d\tau,$$
$$\partial^2_{x_0}v(x)=f(x)+\int_0^{x_0}\partial^2_{(x_0-\tau)}w(x_0-\tau,\tau,x_1)d\tau,$$
$$\partial_{x_1}v(x)=\int_0^{x_0}\partial_{x_1}w(x_0-\tau,\tau,x_1)d\tau,$$
$$\partial^2_{x_1}v(x)=\int_0^{x_0}\partial^2_{x_1}w(x_0-\tau,\tau,x_1)d\tau. \tag{21}$$

Подставляя полученные выражения производных функции v в уравнение (1), убеждаемся, что v является решением этого уравнения в силу (9).

Условия Коши (20) для функции v следуют из (19), первого условия из (10) и представления производной (21), если рассмотреть эти выражения при $x_0=0$.

3. Задача (1)–(5). Однородные условия согласования. Согласно предыдущим рассуждениям, общее решение уравнения (1) представимо в виде

$$u(x)=u^{(0)}(x)+v(x)=g^{(1)}(x_1-ax_0)+\int_0^{x_0}G^{(1)}(x_1-ax_0+a\tau,\tau)\,d\tau+$$
$$+g^{(2)}(x_1+ax_0)+\int_0^{x_0}G^{(2)}(x_1+ax_0-a\tau,\tau)\,d\tau,\quad x\in\bar{Q}, \tag{22}$$

где функции $g^{(j)}$ из класса $C^2\left(D\left(g^{(j)}\right)\right)$ с соответствующими областями определения $D\left(g^{(1)}\right)=(-\infty,l]$, $D\left(g^{(2)}\right)=[0,\infty)$, функции $G^{(j)}$ также из класса $C^2\left(D\left(g^{(j)}\right)\times[0,l]\right)$, если $f\in C^{0,1}\left(\bar{Q}\right)$.

Так как имеем частное решение v неоднородного уравнения (1), а общее решение u этого уравнения представимо в виде суммы (7), то дальнейшие исследования сводятся к решению однородного уравнения (6) относительно функции $u^{(0)}:\bar{Q}\ni x\to u^{(0)}(x)\in\mathbb{R}$. В силу (20) решение $u^{(0)}$ должно удовлетворять условиям типа Коши

$$u^{(0)}(0,x_1)=\varphi(x_1),$$
$$\left(\partial_{x_0}^2+\beta\partial_{x_0}\right)u^{(0)}(0,x_1)=\left(\partial_{x_0}^2+\beta\partial_{x_0}\right)(u-v)(0,x_1)=\psi(x_1)-f(0,x_1)=\tilde{\psi}(x_1),\quad x_1\in[0,l], \tag{23}$$

и граничным условиям

$$u^{(0)}(x_0,0)=\mu^{(1)}(x_0)-v(x_0,0)=\tilde{\mu}^{(1)}(x_0),$$
$$u^{(0)}(x_0,l)=\mu^{(2)}(x_0)-v(x_0,l)=\tilde{\mu}^{(2)}(x_0). \tag{24}$$

Согласно формулам (19) и (21), имеем соотношения

$$\tilde{\mu}^{(1)}(0)=\mu^{(1)}(0),\ \tilde{\mu}^{(1)\prime}(0)=\mu^{(1)\prime}(0),\ \tilde{\mu}^{(1)\prime\prime}(0)=\mu^{(1)\prime\prime}(0)-f(0,0),$$
$$\tilde{\mu}^{(2)}(0)=\mu^{(2)}(0),\ \tilde{\mu}^{(2)\prime}(0)=\mu^{(2)\prime}(0),\ \tilde{\mu}^{(2)\prime\prime}(0)=\mu^{(2)\prime\prime}(0)-f(0,l). \tag{25}$$

Из условия согласования (4) и (5) в силу (25) для заданных функций φ, $\tilde{\psi}$, $\tilde{\mu}^{(1)}$, $\tilde{\mu}^{(2)}$ из условий (23) и (24) следуют условия согласования

$$\tilde{\mu}^{(1)}(0)-\varphi(0)=\delta^{(1)},\quad \frac{1}{\alpha\beta}\left[\tilde{\psi}(0)-a^2\varphi''(0)-\beta\tilde{\mu}^{(1)\prime}(0)\right]=\delta^{(2)},$$
$$\frac{1}{a^2}\left(\tilde{\mu}^{(1)\prime\prime}(0)-a^2\varphi''(0)\right)=\delta^{(3)}; \tag{26}$$

$$\tilde{\mu}^{(2)}(0)-\varphi(l)=\sigma^{(1)},\quad \frac{1}{\alpha\beta}\left[\beta\tilde{\mu}^{(2)\prime}(0)+a^2\varphi''(l)-\tilde{\psi}(l)\right]=\sigma^{(2)},$$
$$\frac{1}{a^2}\left(\tilde{\mu}^{(2)\prime\prime}(0)-a^2\varphi''(l)\right)=\sigma^{(3)}. \tag{27}$$

Таким образом, задача (1)–(5) свелась к смешанной задаче (6), (23), (24), (26), (27) для однородного уравнения относительно функции $u^{(0)}:\bar{Q}\ni x\to u^{(0)}(x)\in\mathbb{R}$.

Общее решение уравнения (6) представимо в виде суммы двух произвольно выбранных функций (см. [13, 14])

$$u^{(0)}(x)=g^{(1)}(x_1-ax_0)+g^{(2)}(x_1+ax_0), \tag{28}$$

где функции $g^{(j)}$ $(j=1,2)$ из класса $C^2\left(D\left(g^{(j)}\right)\right)$.

Из условий (23) имеем систему

$$g^{(1)}(x_1)+g^{(2)}(x_1)=\varphi(x_1),\quad x_1\in[0,l], \tag{29}$$
$$a^2g^{(1)\prime\prime}(x_1)+a^2g^{(2)\prime\prime}(x_1)-a\beta g^{(1)\prime}(x_1)+a\beta g^{(2)\prime}(x_1)=\tilde{\psi}(x_1),\quad x_1\in[0,l]. \tag{30}$$

Решаем систему (29)–(30). Интегрируя уравнение (30), получим соотношение

$$g^{(1)\prime}(x_1)+g^{(2)\prime}(x_1)-\frac{\beta}{a}g^{(1)}(x_1)+\frac{\beta}{a}g^{(2)}(x_1)=\frac{1}{a^2}\int_0^{x_0}\tilde{\psi}(y)dy+2\mathrm{C}\frac{\beta}{a}. \quad (31)$$

Дифференцируя уравнение (29), получим, что

$$g^{(1)\prime}(x_1)+g^{(2)\prime}(x_1)=\varphi'(x_1). \quad (32)$$

Из уравнения (31) и (32) имеем соотношения

$$-g^{(1)}(x_1)+g^{(2)}(x_1)=\frac{1}{\beta a}\int_0^{x_0}\tilde{\psi}(y)dy-\frac{a}{\beta}\varphi'(x_1)+2C. \quad (33)$$

Решая полученную алгебраическую систему (29) и (33), найдем значения $g^{(j)}(x_1)$, а именно:

$$g^{(j)}(z)=g^{(j,0)}(z)=\frac{1}{2}\varphi(z)-(-1)^j\frac{a}{2\beta}\varphi'(z)+(-1)^j\frac{1}{2a\beta}\int_0^z\tilde{\psi}(\xi)d\xi+(-1)^jC, \quad j=1,2, \quad (34)$$

для $z\in[0,l]$, где C – произвольная из множества $\mathbb{R}$ постоянная, которая появилась в результате интегрирования уравнения (30).

Для других значений аргумента z значения функций $g^{(j)}$ определяются поэтапно, удовлетворяя решение (28) граничным условиям (24). Удовлетворяя первому из условий (24), получим уравнение

$$g^{(1)}(z)+g^{(2)}(-z)=\tilde{\mu}^{(1)}\left(-\frac{z}{a}\right),$$

или

$$g^{(1,1)}(z)=\tilde{\mu}^{(1)}\left(-\frac{z}{a}\right)-g^{(2,0)}(-z), \quad z\in[-l,0], \quad (35)$$

так как функция $g^{(2)}$ уже определена по формуле (34) для $-z=ax_0\in[0,l]$. Аналогично, удовлетворяя второму граничному условию из (24), получим соотношение

$$g^{(2,1)}(z)=\tilde{\mu}^{(2)}\left(\frac{z-l}{a}\right)-g^{(1,0)}(2l-z), \quad z\in[l,2l]. \quad (36)$$

Продолжая этот процесс дальше, через предыдущие значения функции $g^{(j)}$ получим k-ю итерацию с помощью соотношений:

$$g^{(1,k)}(z)=\mu^{(1)}\left(-\frac{z}{a}\right)-g^{(2,k-1)}(-z), \quad z\in[-kl,-(k-1)l], \quad (37)$$

$$g^{(2,k)}(z)=\tilde{\mu}^{(2)}\left(\frac{z-l}{a}\right)-g^{(1,k-1)}(2l-z), \quad z\in[kl,(k+1)l], \quad (38)$$

где $k=1,2,3,\dots$. Из формул (37)–(38) видно, что значения функций $g^{(j)}$, $j=1,2$, определены кусочно на соответствующих отрезках через значения заданных функций φ, $\tilde{\psi}$, $\tilde{\mu}^{(j)}$ $(j=1,2)$, f. Поэтому, если потребовать достаточную гладкость этих функций, то и функции $g^{(j,k)}$ будут на указанных отрезках тоже гладкими, например из класса C^2, $j=1,2$; $k=0,1,\dots$. Следовательно, и решение (22) задачи (1)–(3) тоже будет кусочно-гладким. Нам надо, чтобы функция (28) была из класса $C^2(\overline{Q})$ на всем множестве $\overline{Q}$, так как согласно лемме 1 $v\in C^2(\overline{Q})$, если $f\in C^{0,1}(\overline{Q})$. Для этого потребуем, чтобы функции (34)–(38) и их производные первого и второго порядков совпадали в общих точках соприкосновения.

Вычисляя производные функции $g^{(j,k)}\left(j=1,2;\ k=1,2,3,...\right)$, представленные формулами (37), (38), получим их выражения

$$\frac{d}{dz}g^{(1,k)}(z)=-\frac{1}{a}\tilde{\mu}^{(1)\prime}\left(-\frac{z}{a}\right)+\frac{d}{d(-z)}g^{(2,k-1)}(-z),$$

$$\frac{d^2}{dz^2}g^{(1,k)}(z)=\frac{1}{a^2}\tilde{\mu}^{(1)\prime\prime}\left(-\frac{z}{a}\right)-\frac{d^2}{d(-z)^2}g^{(2,k-1)}(-z), \tag{39}$$

$$z\in\left[-kl,-(k-1)l\right],\quad k=1,2,...,$$

$$\frac{d}{dz}g^{(2,k)}(z)=\frac{1}{a}\tilde{\mu}^{(2)\prime}\left(\frac{z-l}{a}\right)+\frac{d}{d(2l-z)}g^{(1,k-1)}(2l-z),$$

$$\frac{d^2}{dz^2}g^{(2,k)}(z)=\frac{1}{a^2}\tilde{\mu}^{(2)\prime\prime}\left(\frac{z-l}{a}\right)-\frac{d^2}{d(2l-z)^2}g^{(1,k-1)}(2l-z), \tag{40}$$

$$z\in\left[kl,(k+1)l\right],\quad k=1,2,...\ .$$

Таким образом, чтобы функция $g^{(1)}$ принадлежала $C^2(-\infty,l]$, а $g^{(2)}$ – классу $C^2[0,\infty)$, кроме требований на гладкость заданных функций f, φ, $\tilde{\psi}$, $\tilde{\mu}^{(j)}$ $(j=1,2)$ задачи (6), (23), (24), (26), (27) должны выполняться равенства

$$g^{(1,k+1)}(kl)=g^{(1,k)}(kl),\ \frac{d}{dz}g^{(1,k+1)}(z)|_{z=kl}=\frac{d}{dz}g^{(1,k)}(z)|_{z=kl},$$
$$\frac{d^2}{dz^2}g^{(1,k+1)}(z)|_{z=kl}=\frac{d^2}{dz^2}g^{(1,k)}(z)|_{z=kl},\ k=0,-1,-2,...; \tag{41}$$

$$g^{(2,k)}(kl)=g^{(2,k-1)}(kl),\ \frac{d}{dz}g^{(2,k)}(z)|_{z=kl}=\frac{d}{dz}g^{(2,k-1)}(z)|_{z=kl},$$
$$\frac{d^2}{dz^2}g^{(2,k)}(z)|_{z=kl}=\frac{d^2}{dz^2}g^{(2,k-1)}(z)|_{z=kl},\ k=1,2,3,...\ . \tag{42}$$

Ели проанализировать соотношения (34)–(42), то можно сделать следующее заключение, которое сформулируем в виде леммы.

Л е м м а 2. *Равенства* (41) *и* (42) *выполняются тогда и только тогда, когда равенство* (41) *выполняется только для* $k = 0$, *а* (42) *– для* $k = 1$. *Кроме этого, равенства* (41) *и* (42) *для* $k = 0$ *и* $k = 1$ *выполняются тогда и только тогда, когда условия согласования* (26) *и* (27) *являются однородными.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из соотношений (35)–(38) с помощью математической индукции можно сделать заключение, что равенства (41), (42) выполняются все тогда и только тогда, когда некоторые из них справедливы для одного номера k, например, как сказано в лемме, для $k = 0$, а вторые – для $k = 1$.

А теперь проверим, при каких условиях совпадение значений функций и их производных из (37), (41) осуществляется для $k = 0$. Для равенства (41) для $k = 0$ запишем через значения заданных в условиях (23), (24) функций:

$$g^{(1,1)}(0)=\tilde{\mu}^{(1)\prime}(0)-\frac{1}{2}\varphi(0)+\frac{a}{2\beta}\varphi'(0)-C=g^{(1,0)}(0)=\frac{1}{2}\varphi(0)+\frac{a}{2\beta}\varphi'(0)-C,$$

$$\frac{dg^{(1,1)}(z)}{dz}|_{z=0}=-\frac{1}{a}\tilde{\mu}^{(1)\prime}(0)+\frac{1}{2}\varphi'(0)-\frac{a}{2\beta}\varphi''(0)+\frac{1}{2a\beta}\tilde{\psi}(0)=$$
$$=\frac{dg^{(1,0)}(z)}{dz}|_{z=0}=\frac{1}{2}\varphi'(0)+\frac{a}{2\beta}\varphi''(0)-\frac{1}{2a\beta}\tilde{\psi}(0), \tag{43}$$

$$\frac{d^2 g^{(1,1)}(z)}{dz^2}|_{z=0} = \frac{1}{a^2}\tilde{\mu}^{(1)\prime\prime}(0) - \frac{1}{2}\varphi''(0) + \frac{a}{2\beta}\varphi'''(0) - \frac{1}{2a\beta}\tilde{\psi}'(0) =$$

$$= \frac{d^2 g^{(1,0)}(z)}{dz^2}|_{z=0} = \frac{1}{2}\varphi''(0) + \frac{a}{2\beta}\varphi'''(0) - \frac{1}{2a\beta}\tilde{\psi}'(0).$$

Из равенства (43) и (25) видно, что равенства (41) для $k = 0$ выполняются тогда и только тогда, когда справедливы однородные условия согласования (26), т. е.

$$\mu^{(1)}(0) - \varphi(0) = 0, \quad \psi(0) - a^2\varphi''(0) - \beta\mu^{(1)\prime}(0) = 0, \quad \tilde{\mu}^{(1)\prime\prime}(0) - a^2\varphi''(0) - f(0,0) = 0. \tag{44}$$

А теперь выписываем равенства (42) для $k = 1$ через заданные функции

$$g^{(2,1)}(l) = \tilde{\mu}^{(2)\prime}(0) - \frac{1}{2}\varphi(l) - \frac{a}{2\beta}\varphi'(l) + \frac{1}{2a\beta}\int_0^l \tilde{\psi}(\xi)d\xi + C =$$

$$= g^{(2,0)}(l) = \frac{1}{2}\varphi(l) - \frac{a}{2\beta}\varphi'(l) + \frac{1}{2a\beta}\int_0^l \tilde{\psi}(\xi)d\xi + C,$$

$$\frac{dg^{(2,1)}(z)}{dz}|_{z=l} = \frac{1}{a}\tilde{\mu}^{(2)\prime}(0) + \frac{1}{2a}\varphi'(l) + \frac{a}{2\beta}\varphi''(l) - \frac{1}{2a\beta}\tilde{\psi}(l) =$$

$$= \frac{dg^{(2,0)}(z)}{dz}|_{z=l} = \frac{1}{2}\varphi'(l) - \frac{a}{2\beta}\varphi''(l) + \frac{1}{2a\beta}\tilde{\psi}(l), \tag{45}$$

$$\frac{d^2 g^{(2,1)}(z)}{dz^2}|_{z=l} = \frac{1}{a}\tilde{\mu}^{(2)\prime\prime}(0) - \frac{1}{2}\varphi''(l) - \frac{a}{2\beta}\varphi'''(l) + \frac{1}{2a\beta}\tilde{\psi}'(l) =$$

$$= \frac{d^2 g^{(2,0)}(z)}{dz^2}|_{z=l} = \frac{1}{2}\varphi''(l) - \frac{a}{2\beta}\varphi'''(l) + \frac{1}{2a\beta}\tilde{\psi}'(l).$$

Из равенств (45) и (25) видно, что равенства (42) для $k = 1$ выполняются тогда и только тогда, когда справедливы однородные условия согласования (27), т. е.

$$\mu^{(2)}(0) - \varphi(l) = 0, \quad \psi(l) - a^2\varphi''(l) - \beta\mu^{(2)\prime}(0) = 0, \quad \tilde{\mu}^{(2)\prime\prime}(0) - a^2\varphi''(l) - f(0,l) = 0. \tag{46}$$

Построенные функции $g^{(j,k)} : D\left(g^{(j,k)}\right) = \left\{z \mid z \in \left[(-1)^j kl, (-1)^j kl + l\right]\right\} \ni z \to g^{(j,k)}(z)$ определяют функции $g^{(j)}$, где

$$g^{(j)}(z) = g^{(j,k)}(z), \quad z \in D\left(g^{(j,k)}(z)\right), \ j = 1,2, \ k = 0,1,2,\dots. \tag{47}$$

Л е м м а 3. *Если функции* $\varphi \in C^3[0,l]$, $\psi \in C^1[0,l]$, $\mu^{(j)} \in C^2[0,\infty)$, $j = 1,2$, *и выполняются однородные условия согласования* (44), (46), *то функции* $g^{(j)}$, *определяемые формулами* (47), (34)–(38), *имеют вид*

$$g^{(j)}(z) = \tilde{g}^{(j)}(z) + (-1)^j C, \ j = 1,2, \tag{48}$$

где C *– произвольная постоянная. Кроме этого, функции* $\tilde{g}^{(j)}$ *определяются единственным образом и* $\tilde{g}^{(1)} \in C^2(-\infty,l]$, $\tilde{g}^{(2)} \in C^2[0,\infty)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу условий леммы и формул (34)–(38) следует, что функции $g^{(j,k)}$ принадлежат классам $C^2\left(D\left(g^{(j,k)}\right)\right)$, $j=1,2,\ k=0,1,2,\dots$. Из определения функций $g^{(j)}$ соотношениями (47) леммы 2, равенств (41), (42) и однородных условий согласования (44), (46) следует, что $g^{(1)}\in C^2(-\infty,l]$, $g^{(2)}\in C^2[0,\infty)$.

Далее, начиная с формул (34), функции $g^{(j,k)}$ для каждого $k=1,2,\dots$ определяются соотношениями (37), (38). С помощью математической индукции нетрудно показать, что

$$g^{(j,k)}(z)=\tilde{g}^{(j,k)}(z)+(-1)^j C, \tag{49}$$

где $\tilde{g}^{(j,k)}$ определяются единственным образом. Отсюда соотношения (49) и (47) доказывают и представление (48). Принадлежность функций $\tilde{g}^{(j)}$ классу дважды непрерывно дифференцируемых функций следует из равенств (41), (42) и однородных условий согласования (44), (46).

Т е о р е м а 1. *Если функции* $\varphi\in C^3[0,l]$, $\psi\in C^1[0,l]$, $f\in C^{0,1}(\overline{Q})$, $\mu^{(j)}\in C^2[0,\infty)$, $j=1,2$, *то функция вида* (48) *является единственным классическим решением из класса* $C^2(\overline{Q})$ *задачи* (6), (23), (24) *тогда и только тогда, когда выполняются однородные условия согласования* (44), (46), *где функции* $g^{(j)}$ $(j=1,2)$ *определяются соотношениями* (34)–(38).

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1 следует из предыдущих рассуждений и лемм 1–3.

4. Задача (1)–(5). Неоднородные условия согласования. Рассмотрим теперь задачу (1)–(5) в случае, когда условия (4), (5) являются неоднородными, т. е. однородные условия (44), (46) частично или полностью не выполняются.

Повторяя рассуждения п. 3, для данного случая согласно формулам (22), (8), (11), (28) решение задачи (1)–(5) представляется соотношением

$$\begin{aligned} u(x)=u^{(0)}(x)+v(x)=g^{(1)}(x_1-ax_0)+g^{(2)}(x_1+ax_0)+v(x)= \\ =F^{(1)}(x_1-ax_0)+F^{(2)}(x_1+ax_0), \end{aligned} \tag{50}$$

где

$$F^{(1)}(x_1-ax_0)=g^{(1)}(x_1-ax_0)+\int_0^{x_0}G^{(1)}(x_1-ax_0+a\tau,\tau)\,d\tau,$$

$$F^{(2)}(x_1+ax_0)=g^{(2)}(x_1+ax_0)+\int_0^{x_0}G^{(2)}(x_1-ax_0-a\tau,\tau)\,d\tau.$$

Здесь функции $G^{(j)}(z,\tau)$ и $g^{(j)}(z)$, $j=1,2$, определяются поэтапно, без изменений, формулами (15)–(18), (34)–(38).

Введем обозначения:

$$F^{(1)}(z)=g^{(1)}(z)+\int_0^{x_0}G^{(1)}(z+a\tau,\tau)\,d\tau,\quad z\in(-\infty,l],$$

$$F^{(2)}(z)=g^{(2)}(z)+\int_0^{x_0}G^{(2)}(z-a\tau,\tau)\,d\tau,\quad z\in[0,\infty),$$

$$F^{(1,k)}(z)=g^{(1,k)}(z)+\int_0^{x_0}G^{(1)}(z+a\tau,\tau)\,d\tau,\quad z\in(-kl,-(k-1)l],\ k=0,1,\dots,$$

$$F^{(2,k)}(z)=g^{(2,k)}(z)+\int_0^{x_0}G^{(2)}(z-a\tau,\tau)\,d\tau,\quad z\in[kl,(k+1)l),\ k=0,1,\dots,$$

где

$$F^{(j)}(z)=F^{(j,k)}(z),\quad z\in\left((-1)^j kl,l+(-1)^j kl\right),\ k=0,1,\dots,\ j=1,2.$$

Так как функция

$$v(x)=\int_0^{x_0}\left(G^{(1)}(x_1-ax_0+a\tau,\tau)+G^{(1)}(x_1+ax_0-a\tau,\tau)\right)d\tau$$

принадлежит классу $C^2(\overline{Q})$, если $f\in C^{0,1}(\overline{Q})$, то

$$\begin{gathered}\frac{d^p}{dz^p}F^{(1,k)}(z)-F^{1,k-1}(z)|_{z=l-kl}=\frac{d^p}{dz^p}g^{(1,k)}(z)-g^{1,k-1}(z)|_{z=l-kl},\quad k=1,2,...,\ p=0,1,2,\\ \frac{d^p}{dz^p}F^{(2,k)}(z)-F^{2,k-1}(z)|_{z=kl}=\frac{d^p}{dz^p}g^{(2,k)}(z)-g^{2,k-1}(z)|_{z=kl},\quad k=1,2,...,\ p=0,1,2.\end{gathered}\tag{51}$$

Если обратиться к формулам (34)–(38), то согласно равенствам (51) из этих формул получим соотношения через условия согласования (4), (5) вида:

$$\begin{gathered}F^{(1,1)}(0)-F^{(1,0)}(0)=\mu^{(1)}(0)-\varphi(0)=\delta^{(1)},\\ F^{(2,1)}(0)-F^{(2,0)}(0)=\mu^{(2)}(0)-\varphi(l)=\sigma^{(1)},\\ \frac{d}{dz}\left[F^{(1,1)}(z)-F^{(1,0)}(z)\right]|_{z=0}=\frac{1}{a\beta}\left[\psi(0)-a^2\varphi''(0)-\beta\mu^{(1)\prime}(0)-f(0,0)\right]=\delta^{(2)},\\ \frac{d}{dz}\left[F^{(2,1)}(z)-F^{(2,0)}(z)\right]|_{z=l}=\frac{1}{a\beta}\left[\beta\mu^{(2)}(0)+a^2\varphi''(l)-\psi(l)+f(0,l)\right]=\sigma^{(2)},\\ \frac{d^2}{dz^2}\left[F^{(1,1)}(z)-F^{(1,0)}(z)\right]|_{z=0}=\frac{1}{a^2}\left[\mu^{(1)\prime\prime}(0)-a^2\varphi''(0)-f(0,0)\right]=\delta^{(3)},\\ \frac{d^2}{dz^2}\left[F^{(2,1)}(z)-F^{(2,0)}(z)\right]|_{z=l}=\frac{1}{a^2}\left[\mu^{(2)\prime\prime}(0)-a^2\varphi''(l)-f(0,l)\right]=\sigma^{(3)}.\end{gathered}\tag{52}$$

Далее, применяя метод математической индукции, в общем случае доказываются соотношения:

$$\frac{d^p}{dz^p}\left[F^{(1,k)}(z)-F^{(1,k-1)}(z)\right]|_{z=kl}=\begin{cases}\delta^{(p+1)}, & k=1,3,5,...,\\ (-1)^{p+1}\sigma^{(p+1)}, & k=2,4,6,...,\end{cases}\tag{53}$$

$$\frac{d^p}{dz^p}\left[F^{(2,k)}(z)-F^{(2,k-1)}(z)\right]|_{z=l-kl}=\begin{cases}\sigma^{(p+1)}, & k=1,3,5,...,\\ (-1)^{p+1}\delta^{(p+1)}, & k=2,4,6,...,\end{cases}\tag{54}$$

где $p=0,1,2$.

Таким образом, присутствие неоднородных условий согласования нарушает непрерывность функций $F^{(j)}$ или их производных, или всего вместе. Данное заключение можно сформулировать в виде следующего утверждения.

Утверждение. Если для заданных функций f, φ, $\tilde{\psi}$, $\tilde{\mu}^{(j)}$ $(j=1,2)$ не выполняются однородные условия согласования (44), (46), то какими бы гладкими эти функции не были, задача (1)–(3) не имеет классического решения, определенного на $\overline{Q}=[0,\infty)\times[0,l]$.

Пусть заданные функции уравнения (1), граничных условий (2), (3) являются достаточно гладкими и такими, как в теореме 1: $\varphi\in C^3[0,l]$, $\psi\in C^1[0,l]$, $f\in C^{0,1}(\overline{Q})$, $\mu^{(j)}\in C^2[0,\infty)$, $j=1,2$. При данных предположениях через заданные функции определяются $F^{(j)}$ $(j=1,2)$. Так как условия согласования (52) являются неоднородными, то для $\delta^{(p+1)}$ и $\sigma^{(p+1)}$, $p=0,1,2$, не равных нулю частично или полностью, получим разрывными $F^{(j)}$ или их производные согласно выражениям (53)–(54).

Рассмотрим сначала согласно формуле (50) частично определенные решения

$$u^{(k,m)}(x)=F^{(1,k)}(x_1-ax_0)+F^{(2,m)}(x_1+ax_0)\tag{55}$$

для $(x)\in Q$, где $z=(x_1-ax_0)\in(-kl,-(k-1)l)$, $\tilde{z}=(x_1+ax_0)\in(ml,(m+1)l)$. Введем обозначения новых функций:

$$r^{(1,k)}:\mathbb{R}^2\supset Q\supset D\left(r^{(1,k)}\right)\ni x\to r^{(1,k)}(x)=F^{(1,k)}(x_1-ax_0)\in\mathbb{R},$$
$$r^{(2,m)}:\mathbb{R}^2\supset Q\supset D\left(r^{(2,m)}\right)\ni x\to r^{(2,m)}(x)=F^{(2,m)}(x_1+ax_0)\in\mathbb{R}.$$

Таким образом,

$$u^{(k,m)}(x)=r^{(1,k)}(x)+r^{(2,m)}(x), \tag{56}$$

где область определения $D\left(u^{(k,m)}\right)$ функции $u^{(k,m)}$ есть пересечение областей $D\left(r^{(1,k)}\right)$ и $D\left(r^{(2,m)}\right)$, т. е. $D\left(u^{(k,m)}\right)=D\left(r^{(1,k)}\right)\cap D\left(r^{(2,m)}\right)$. Так как значения аргументов x находятся в пределах области Q, то для большинства индексов k и m $D\left(u^{(k,m)}\right)=\varnothing$, $\varnothing$ – пустое множество. Нас интересуют такие функции, для которых $D\left(u^{(k,m)}\right)\neq\varnothing$, $k,m\in\{0,1,...\}$.

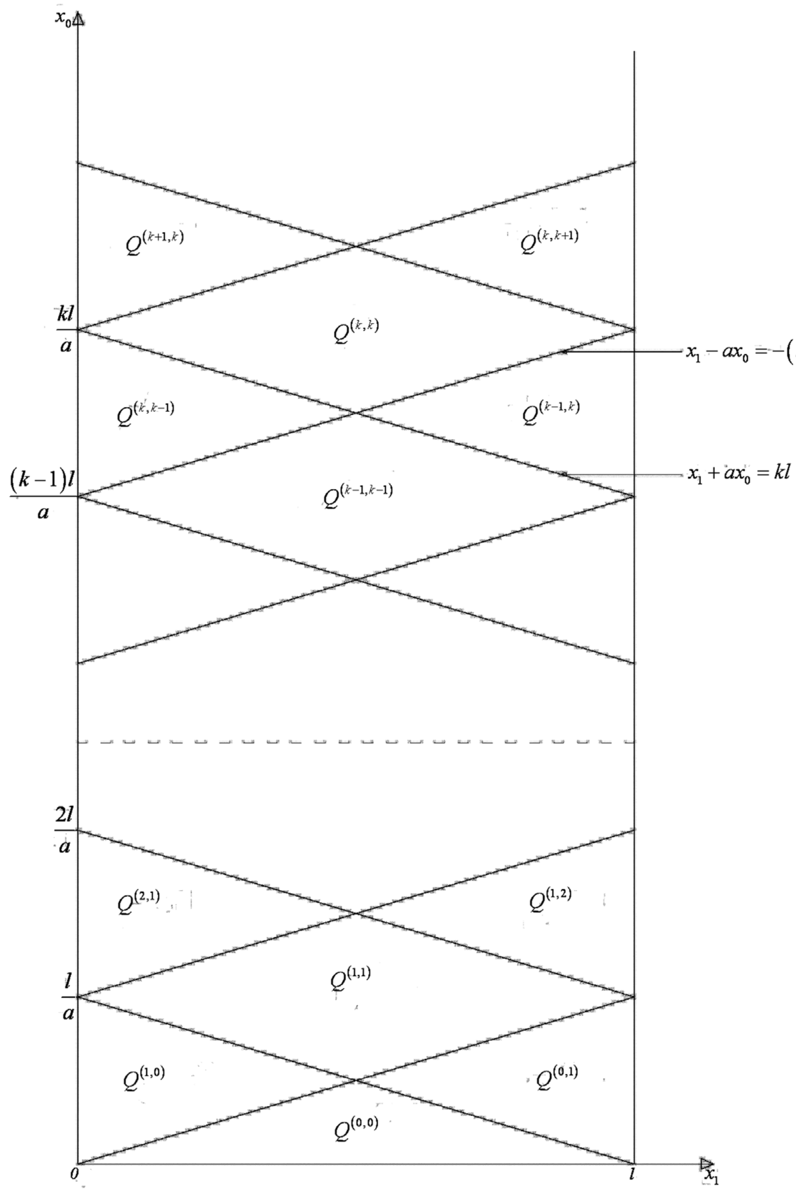
Если проанализировать области определения функций $F^{(j,k)}$, $j=1,2$, $k=0,1,2,...$, то в (55) или (56) $D\left(u^{(k,m)}\right)=\varnothing$ при условии, что $|k-m|>1$. Это означает следующее: $D\left(u^{(k,m)}\right)\neq\varnothing$ для $k=1,2,...$, если соответственно $m=k-1,k,k+1$, и $D\left(u^{(0,m)}\right)\neq\varnothing$, если $m=0,1$.

Обозначим через $Q^{(k,m)}=D\left(u^{(k,m)}\right)$ подобласти области Q, $k=0,1,2,...$, $m=k-1,k,k+1$, $Q^{(0,-1)}=\varnothing$. Заметим, что граничные точки $z=x_1-ax_0=-kl$, $z=x_1-ax_0=-(k-1)l$ функций $F^{(1,k)}$ определяют характеристики уравнения в области Q, $k=1,2,...$, одного семейства, а граничные точки $z=x_1+ax_0=ml$, $z=x_1+ax_0=(m+1)l$, $m=1,2,...$, в Q определяют характеристики другого семейства. Данные непересекающиеся подобласти $Q^{(k,m)}$ области Q в декартовой системе координат плоскости $\mathbb{R}^2$ переменных x_0,x_1 описываются соотношениями:

$$Q^{(0,-1)}=\varnothing,$$
$$Q^{(0,0)}=\left\{x\in Q\,|\,x_1\in\left(0,\frac{l}{2}\right],\ 0<x_0<\frac{x_1}{a}\right\}\cup\left\{x\in Q\,|\,x_1\in\left[\frac{l}{2},l\right),\ 0<x_0<\frac{l-x_1}{a}\right\},$$
$$Q^{(k,k-1)}=\left\{x\in Q\,|\,x_1\in\left(0,\frac{l}{2}\right],\ \frac{x_1+(k-1)l}{a}<x_0<\frac{kl-x}{a}\right\},\ k=1,2,...,$$
$$Q^{(k-1,k)}=\left\{x\in Q\,|\,x_1\in\left(\frac{l}{2},l\right),\ \frac{kl-x}{a}<x_0<\frac{x_1+(k-1)l}{a}\right\},\ k=1,2,...,$$
$$Q^{(k,k)}=\left\{x\in Q\,|\,x_1\in\left(0,\frac{l}{2}\right],\ \frac{kl-x_1}{a}<x_0<\frac{x+kl}{a}\right\}\cup$$
$$\cup\left\{x\in Q\,|\,x_1\in\left[\frac{l}{2},l\right),\ \frac{x+(k-1)l}{a}<x_0<\frac{(k+1)l-x_1}{a}\right\},\ k=1,2,3,...\ .$$

Для наглядности подобласти $Q^{(k,m)}$ представим на рисунке в декартовой системе переменных x_0,x_1.

Обозначим через $\tilde{Q}$ объединение $Q^{(k,m)}$, а именно: $\tilde{Q}=\bigcup\limits_{k=0}^{\infty}\bigcup\limits_{m=k-1}^{k+1}Q^{(k,m)}$. Очевидно, что $\tilde{Q}\subset Q$.



Разбиение области Q на подобласти $Q^{(k,m)}$

Наряду с подобластями $Q^{(k,m)}$ области Q обозначим через $\mathfrak{M}^{(j,k)}$ интервалы характеристик уравнения (50), принадлежащие Q и проходящие через точки $\left(k\frac{l}{a},0\right)$, $k=0,1,2,...,\ j=1,2$. Обозначения $\mathfrak{M}^{(j,k)}$ можно рассматривать как подмножества области Q и

$$\mathfrak{M}^{(j,k)}=\left\{x\in Q\mid x=(-1)^{j-1}at+(k-2+j)l,\ x\in(0,l),\ k=1,2,...,\ j=1,2\right\}.$$

Таким образом, $Q=\tilde{Q}\cup\left(\bigcup\limits_{k=0}^{\infty}\bigcup\limits_{j=1}^{2}\mathfrak{M}^{(j,k)}\right)$, $\bar{Q}=\bar{\tilde{Q}}$.

Обозначим через $\tilde{u}$ функцию, заданную на множестве $\tilde{Q}$ следующим образом:

$$\tilde{u}(x)=u^{(k,m)}(x)=F^{(1,k)}(x_1-ax_0)+F^{(2,m)}(x_1+ax_0)=r^{(1,k)}(x)+r^{(2,m)}(x), \tag{57}$$

где $k=0,1,2,...,\ m=k-1,k,k+1,\ u^{(2,-1)}(t,x)\equiv 0$.

Справедлива следующая

Т е о р е м а 2. *Пусть функции* $\varphi \in C^2[0,l]$, $\psi \in C^3[0,l]$, $f \in C^{0,1}(\bar{Q})$, $\mu^{(j)} \in C^2[0,\infty)$, $j=1,2$, *и* $\sum_{p=1}^{3}\left[\left(\delta^{(p)}\right)^2+\left(\sigma^{(p)}\right)^2\right] \neq 0$. *Тогда функция* $\tilde{u}$ *из класса* $C^2(\tilde{Q})$ *является единственным решением задачи* (1)–(3) *тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования* (4), (5).

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2 следует из предыдущих рассуждений.

Множество характеристик $\mathfrak{M}^{(j,k)}$ разделим на два класса: $\mathfrak{M}(\sigma)=\left(\bigcup_{s=1}^{\infty}\mathfrak{M}^{(1,2s-1)}\right)\cup\left(\bigcup_{s=1}^{\infty}\mathfrak{M}^{(2,2s)}\right)$, $\mathfrak{M}(\delta)=\left(\bigcup_{s=1}^{\infty}\mathfrak{M}^{(1,2s)}\right)\cup\left(\bigcup_{s=1}^{\infty}\mathfrak{M}^{(2,2s-1)}\right)$.

С л е д с т в и е. *Если* $\delta^{(1)} \neq 0$ *и* $\sigma^{(1)} \neq 0$, *то в силу соотношений* (53), (54) *функция* $\tilde{u}$ *для каждого* $k=1,2,\ldots$ *и* $j=1,2$ *на* $\mathfrak{M}^{(j,k)}$ *терпит разрыв при переходе через данный интервал характеристики* $x_1=(-1)^{j-1}a_0+(k-2+j)l$. *Кроме того, на множестве* $\mathfrak{M}(\delta)$ *для каждой ее точки разрыв равен одному и тому же числу* $\delta^{(1)}$, *а на* $\mathfrak{M}(\sigma)$ *разрыв равен* $\sigma^{(1)}$. *Производные первого порядка функции* $\tilde{u}$ *на множествах* $\mathfrak{M}(\delta)$ *и* $\mathfrak{M}(\sigma)$ *терпят разрыв, равный* $\delta^{(2)}$ *и* $\sigma^{(2)}$ *соответственно. Аналогично, производные второго порядка решения* $\tilde{u}$ *на этих множествах терпят разрывы, равные числам* $\delta^{(3)}$ *и* $\sigma^{(3)}$ *соответственно.*

Т е о р е м а 3. *Пусть функции* $\varphi \in C^3[0,l]$, $\psi \in C^1[0,l]$, $f \in C^{0,1}(\bar{Q})$, $\mu^{(j)} \in C^2[0,\infty)$, $j=1,2$, $\delta^{(1)}=\sigma^{(1)}=0$. *Тогда функция* $\tilde{u}$ *из класса* $C(\bar{Q})\cap C^2(\tilde{Q})$ *является единственным решением задачи* (1)–(3) *тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования* (4), (5).

Д о к а з а т е л ь с т в о следует фактически из теоремы 2 и следствия. Действительно, если $\delta^{(1)}=\sigma^{(1)}=0$, то решение $\tilde{u}$ на множествах $\mathfrak{M}(\delta)$ и $\mathfrak{M}(\sigma)$ является непрерывным. Следовательно, кроме того, что решение $\tilde{u} \in C^2(\tilde{Q})$, оно является непрерывной функцией на замыкании $\bar{Q}, \tilde{u} \in C(\bar{Q})$.

Т е о р е м а 4. *Пусть выполняются условия теорем* 2, 3 *и, кроме того,* $\delta^{(2)}=\sigma^{(2)}=0$. *Тогда решение* $\tilde{u}$ *задачи* (1)–(3) *принадлежит классу* $C^1(\bar{Q})\cap C^2(\tilde{Q})$ *и является единственным тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования* (4), (5).

Д о к а з а т е л ь с т в о легко следует из теорем 2, 3 и следствия, так как в этом случае $\tilde{u}$ является непрерывным на $\mathfrak{M}(\delta)\cup\mathfrak{M}(\sigma)$, но в силу (51)–(52) имеет непрерывные производные первого порядка.

З а м е ч а н и е 1. Если $\delta^{(p)}=0$, $p=1,2,3$, то решение $\tilde{u}$, определяемое формулой (57), задачи (1)–(3) может иметь разрывы вместе со своими производными первого и второго порядков только на $\mathfrak{M}(\sigma)$. В этом случае $\tilde{u}$ принадлежит классу $C^2(\tilde{Q}\cup\mathfrak{M}(\delta))$. Можно сформулировать аналогичные теоремы, где в теоремах 2–4 следует $C^2(\tilde{Q})$ заменить на множество $C^2(\tilde{Q}\cup\mathfrak{M}(\delta))$.

Если $\sigma^{(p)}=0$, $p=1,2,3$, то справедливо аналогичное замечание, где вместо $C^2(\tilde{Q}\cup\mathfrak{M}(\delta))$ в этом случае берется $C^2(\tilde{Q}\cup\mathfrak{M}(\sigma))$.

З а м е ч а н и е 2. Если заданные функции задачи (1)–(3) удовлетворяют неоднородным условиям согласования (4), (5), то решение задачи (1)–(3) сводится к решению соответствующей задачи сопряжения, где условия сопряжения задаются на характеристиках $x_1-ax_0=-(k-1)l$ и $x_1+ax_0=kl$, $k=1,2,\ldots$.

В качестве условий сопряжения могут быть следующие условия:

$$\left[\left(\frac{\partial^p u}{\partial x_1{}^p}\right)^+-\left(\frac{\partial^p u}{\partial x_1{}^p}\right)^-\right](x)\,|_{x_1=ax_0}=\delta^{(p+1)}, \quad ax_0 \in [0,l],$$

$$\left[\left(\frac{\partial^p u}{\partial x_1{}^p}\right)^+ - \left(\frac{\partial^p u}{\partial x_1{}^p}\right)^-\right](x)\,|_{x_1=ax_0-(k-1)l} = \begin{cases} \delta^{(p+1)}, & k=3,5,\ldots, \\ (-1)^{p+1}(k-1)\sigma^{(p+1)}, & k=2,4,6,\ldots, \end{cases} \tag{58}$$
$$ax_0 \in \left[kl,(k-1)l\right],$$

$$\left[\left(\frac{\partial^p u}{\partial x_1{}^p}\right)^+ - \left(\frac{\partial^p u}{\partial x_1{}^p}\right)^-\right](x)\,|_{x_1=-ax_0+kl} = \begin{cases} \sigma^{(p+1)}, & k=1,3,5,\ldots, \\ (-1)^{p+1}\delta^{(p+1)}, & k=2,4,6,\ldots, \end{cases} \tag{59}$$
$$ax_0 \in \left[kl,(k-1)l\right],$$

где числа $\delta^{(p+1)}$ и $\sigma^{(p+1)}$, $p=0,1,2$, из условий согласования (52), (53), (54), $(\ )^{\pm}$ – предельные значения функции u и ее производных $\dfrac{\partial u}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1{}^2}$ с разных сторон на характеристиках $x_1 - ax_0 = -(k-1)l$ и $x_1 + ax_0 = kl$, т. е.

$$\left(\frac{\partial^p u}{\partial x_1{}^p}\right)^{\pm}(x)\,|_{x_1=ax_0-(k-1)l} = \lim_{\Delta x_1>0,\,\Delta x_1\to 0}\left(\frac{\partial^p u}{\partial x_1{}^p}\right)(x)\,|_{x_1\pm\Delta x_1=ax_0-(k-1)l},$$

$$\left(\frac{\partial^p u}{\partial x_1{}^p}\right)^{\pm}(x)\,|_{x_1=-ax_0+kl} = \lim_{\Delta x_1>0,\,\Delta x_1\to 0}\left(\frac{\partial^p u}{\partial x_1{}^p}\right)(x)\,|_{x_1\pm\Delta x_1=-ax_0+kl}.$$

Теперь задачу (1)–(3) можно сформулировать, используя условия сопряжения (58)–(59) следующим образом.

З а д а ч а. Найти классическое решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям типа Коши (2), граничным условиям (3), условиям сопряжения (58)–(59), в которых числа $\delta^{(j)}$ и $\sigma^{(j)}$, $j=1,2,3$, из соотношений (4)–(5).

Заметим, что такая формулировка рассмотренной задачи с условиями сопряжения более приемлема для ее численной реализации.

Литература

1. *Корзюк В. И., Чеб Е. С., Ширма М. С.* // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2009. Т. 17, № 2. С. 23–34.
2. *Корзюк В. И., Козловская И. С.* // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2010. Т. 18, № 2. С. 22–35.
3. *Корзюк В. И., Козловская И. С.* // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2011. Т. 19, № 1. С. 62–70.
4. *Korzyuk V. I., Erofeenko V. T., Sheyka J. V.* // Mathematical Modeling and Analysis. 2012. Vol. 17, N 3. P. 309–329.
5. *Korzyuk V. I., Kozlovskaya I. S., Kovnatskaya O. A.* // Computer Algebra Systems in Teaching and Research. Differential Equations, Dynamical Systems and Celestial Mechanics, Eds.: L. Gadomski et all. Siedlce, Wydawnictwo Collegium Mazovia. 2011. P. 68–78.
6. *Корзюк В. И., Козловская И. С., Шейко Ю. В.* // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений: материалы 6-й Междунар. конф., посвящ. памяти проф. А. А. Килбаса. AMADE-2011. Минск, 2011. С. 97–108.
7. *Корзюк В. И., Чеб Е. С., Карпечина А. А.* // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2012. Т. 20, № 2. С. 64–74.
8. *Корзюк В. И., Чеб Е. С., Карпечина А. А.* // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 2013. № 1. С. 71–80.
9. *Корзюк В. И., Чеб Е. С., Карпечина А. А.* // Математическое моделирование и дифференциальные уравнения: тр. третьей междунар. науч. конф., Брест, 17–22 сент. 2012 г. Минск, 2012. С. 177–185.
10. *Korzyuk V. I., Kozlovskaya I. S.* // Computer Algebra Systems in Teaching and Research. Siedlce, 2013. Vol. 4, N 1. P. 53–65.
11. *Корзюк В. И., Козловская И. С.* // Докл. НАН Беларуси. 2013. Т. 57, № 5. С. 37–42.
12. *Моисеев Е. И., Корзюк В. И., Козловская И. С.* // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50, № 10. С. 1373–1385.
13. *Корзюк В. И., Козловская И. С.* // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48, № 5. С. 700–709.
14. *Корзюк В. И., Козловская И. С.* // Докл. НАН Беларуси. 2011. Т. 55, № 5. С. 9–13.

V. I. KORZYUK, I. S. KOZLOVSKAYA, S. N. NAUMAVETS

CLASSICAL SOLUTION TO THE FIRST MIXED PROBLEM FOR THE ONE-DIMENSIONAL WAVE EQUATION WITH THE CAUCHY-TYPE CONDITIONS

Summary

This article considers the first mixed problem for the one-dimensional wave equation with the second-order Cauchy-type conditions.

The authors of the article prove that the usage of necessary and sufficient homogeneous matching conditions guarantees the classical solution in the middle of the plane between two parallel straight lines. The article gives the classical solution to the one-dimensional wave equation in analytical form if there are Dirichlet conditions at the side boundaries and Cauchy-type conditions at the plane bottom. By the classical solution is understood the function that is determined at all points of closing the defined domain. This function must have all classical derivatives included in the equation. In case of inhomogeneous matching conditions, the correct problem is formulated with the addition of the conjugation conditions.