УДК 517.911.5+519.216.2

М. М. ВАСЬКОВСКИЙ

СУЩЕСТВОВАНИЕ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ И СТАНДАРТНЫМ И ДРОБНЫМ БРОУНОВСКИМИ ДВИЖЕНИЯМИ

Белорусский государственный университет

(Поступила в редакцию 20.02.2015)

Рассмотрим d-мерное стохастическое дифференциальное уравнение с запаздыванием

$$dX(t) = f(t, X(t), S_t X)dt + g(t, X(t), S_t X)dW(t) + b(t, X(t), T_t X)dB^H(t), t \in R_+, \tag{1}$$

где $W(t)$ – r_1-мерное стандартное броуновское движение, $B^H(t)$ – r_2-мерное дробное броуновское движение с показателем Херста $H \in (1/2, 1)$, $R_+ = [0, +\infty)$, $T_t X = (X(t-h_1), \ldots, X(t-h_k)) \in R^{kd}$, $S_t X = (T_t X, \{X(t+\tau) \mid -h \le \tau \le 0\}) \in E$, $E = R^{kd} \times C([-h,0], R^d)$, $h = h_1 > h_2 > \ldots > h_{k-1} > h_k > 0$, $h > 0$ – время запаздывания, $k \ge 1$.

Первая теорема существования слабых решений уравнения (1) без дробного броуновского движения доказана К. Ито и М. Нисио [1] в предположении, что функции f, g непрерывны и ограничены. Впервые теорема существования решений стохастических дифференциальных уравнений Ито без запаздывания с измеримыми правыми частями получена Н. В. Крыловым [2] при условии, что функции f, g измеримы и ограничены, матрица $\sigma = gg^{\mathrm{T}}$ равномерно положительно определена. В дальнейшем в работах [3–7] условия теоремы Крылова были существенно ослаблены. В статьях [8–11] не налагаются дополнительные условия на матрицу σ, но при этом под слабым решением уравнения (1) понимается слабое решения стохастического дифференциального включения, соответствующего уравнению. В работе [12] доказана теорема существования слабых решений уравнения (1) без дробного броуновского движения с измеримыми по Борелю непрерывными по переменной запаздывания локально ограниченными отображениями f, g. В статьях [13–14] доказаны теоремы существования слабых решений уравнения (1) без запаздывания с измеримыми локально ограниченными коэффициентами f, g и вырожденным оператором диффузии σ. Цель настоящей работы заключается в доказательстве теорем существования слабых решений уравнения (1) с разрывными коэффициентами f, g и вырожденным оператором диффузии σ.

В статье используются следующие обозначения: P^x – закон распределения вероятностей случайной величины x, равенство $P^x = P^y$ означает совпадение законов распределений случайных величин x, y; $E(x)$ – математическое ожидание случайной величины x; $|X|$ – евклидова норма вектора $X = (x_1, \ldots, x_d) \in R^d$; $\|\varphi\|_E = |\varphi_1| + \|\varphi_2\|_{C([-h,0],R^d)}$, где $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in R^{kd} \times C([-h,0], R^d)$; $\beta(S)$ – борелевская σ-алгебра на метрическом пространстве S; μ – мера Лебега на R_+; п.н. – почти наверное; B_d^a – замкнутый шар в R^d с центром в нуле радиуса a; $\overline{R}_+$ – метрическое пространство $[0, +\infty]$ с метрикой $d_{\overline{R}_+}(x, y) = |x/(1+x) - y/(1+y)|$; $a \wedge b = \min\{a, b\}$; $a \vee b = \max\{a, b\}$; $N_d = \{1, 2, \ldots, d\}$; $\sigma_t(\xi)$ – наименьшая σ-алгебра, относительно которой измеримы все случайные величины $\xi(s), 0 \le s \le t$; $\mathcal{F}(\xi) = \bigcap_{\varepsilon>0} \sigma_{t+\varepsilon}(\xi)$ – поток σ-алгебр, порожденный случайным процессом $\xi(t)$; $\overline{\mathrm{co}}(A)$ – замыкание выпуклой оболочки множества A; f^i – компонента с номером i векторной функции f; g^{ij} – элемент матрицы g, находящийся на пересечении строки с номером i и столбца с номером j.

Матрица σ является симметрической неотрицательно определенной, поэтому существуют измеримые по Борелю ортогональная матрица Q и диагональная матрица $\Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d\}$, такие, что $\sigma = Q\Lambda Q^{\mathrm{T}}$. Пусть $g^* = Q\,\mathrm{diag}\{\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_d}\}$. Не нарушая общности, будем считать, что в уравнении (1) $g = g^*$. Действительно, существует измеримое по Борелю отображение $(t, X, \varphi) \to P(t, X, \varphi)$ со значениями в пространстве ортогональных $(d \times d)$-матриц, что $g^* = gP$. Если $M(t) = \int_0^t g^* \tau, X(\tau), S_\tau X) dW(\tau)$, то $M(t) = \int_0^t g(\tau, X(\tau), S_\tau X) d\tilde{W}(\tau)$, где $\tilde{W}(t) = \int_0^t P(\tau, X(\tau), S_\tau X) dW(\tau)$ является $\mathcal{F}_t$-согласованным броуновским движением.

Для любого $(t, X, \varphi) \in R_+ \times R^d \times E$ построим наименьшие выпуклые замкнутые множества $F(t, X, \varphi)$, $A(t, X, \varphi)$, содержащие соответственно точки $f(t, X, \varphi)$, $gg^{\mathrm{T}}(t, X, \varphi)$ и все предельные точки $f(t, X', \varphi)$, $gg^{\mathrm{T}}(t, X', \varphi')$ при $(X', \varphi') \to (X, \varphi)$.

Для произвольного множества индексов $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\} \subseteq N_d$, $\alpha_1 < \ldots < \alpha_l$, определим множество $G(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ следующим образом. Выберем строки матрицы g с номерами $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$, пусть $\alpha_{l+1} < \ldots < \alpha_d$ – номера оставшихся строк. Построим матрицу $\sigma_{\alpha_1, \ldots, \alpha_l} = (g_{\alpha_i} g^{\mathrm{T}}_{\alpha_j})^l_{i,j=1}$, где g_{α_i} – строка с номером α_i матрицы g, а также построим множество $G_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$, состоящее из всех точек $(t, x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_l})$, таких, что для любой открытой окрестности $U_{(t, x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_l})}$ точки $(t, x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_l})$ существует число $a > 0$, такое, что интеграл

$$\int\limits_{U(t, x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_l})} \sup_{(x_{\alpha_{l+1}}, \ldots, x_{\alpha_d}, \varphi) \in D_2^a} (\det \sigma_{\alpha_1, \ldots, \alpha_l}(t, x_1, \ldots, x_d, \varphi))^{-1} dt dx_{\alpha_1} \ldots dx_{\alpha_l}$$

либо не определен, либо равен бесконечности, где $D_2^a = \{(x_{\alpha_{l+1}}, \ldots, x_{\alpha_d}, \varphi) \mid (x^2_{\alpha_{l+1}} + \ldots + x^2_{\alpha_d})^{1/2} + \|\varphi\| \le a\}$, и множество $G_2(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$, состоящее из всех точек $(t, x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_l})$, принадлежащих дополнению $G_1^c(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ множества $G_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$, таких, что для любой открытой окрестности $U_{(t, x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_l})}$ точки $(t, x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_l})$ существует число $a > 0$, такое, что функция $\sup\limits_{(x_{\alpha_{l+1}}, \ldots, x_{\alpha_d}, \varphi) \in D_2^a} (\det \sigma_{\alpha_1, \ldots, \alpha_l}(t, x_1, \ldots, x_d, \varphi))^{-1} : U_{(t, x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_l})} \to [0, \infty]$ не является измеримой по Борелю (под дополнением множества $G_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$ понимаем дополнение в пространстве переменных $(t, x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_l})$, а под открытой окрестностью – окрестность, открытую в пространстве тех же переменных $(t, x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_l})$). Положим $G(\alpha_1, \ldots, \alpha_l) = G_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_l) \bigcup G_2(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$.

З а м е ч а н и е. Если $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\} = \varnothing$, то полагаем $G_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_l) = G_2(\alpha_1, \ldots, \alpha_l) = \varnothing$. Если $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\} = N_d$, то считаем, что

$$\sup_{(x_{\alpha_{l+1}}, \ldots, x_{\alpha_d}, \varphi) \in D_2^a} (\det \sigma_{\alpha_1, \ldots, \alpha_l}(t, x_1, \ldots, x_d, \varphi))^{-1} = (\det \sigma_{\alpha_1, \ldots, \alpha_l}(t, x_1, \ldots, x_d))^{-1}.$$

О п р е д е л е н и е 1. Скалярная функция $z(t, x_1, \ldots, x_d)$ удовлетворяет *условию A*, если существует множество индексов $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\} \subseteq N_d$, $\alpha_1 < \ldots < \alpha_l$, такое, что:

1) функция z при каждых фиксированных $(t, x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_l})$ непрерывна по переменным $(x_{\alpha_{l+1}}, \ldots, x_{\alpha_d}, \varphi)$, где $\{\alpha_{l+1}, \ldots, \alpha_d\} = N_d \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$;

2) в пространстве переменных $(t, x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_l})$ существует замкнутое множество V, содержащее множество $G(\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$, такое, что множество

$$\{(t, x_1, \ldots, x_d, \varphi) \mid (t, x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_l}) \in V\}$$

содержится во множестве точек непрерывности отображения z, а функция $\sigma_{\alpha_1, \ldots, \alpha_l}$ непрерывна по переменным $(x_{\alpha_{l+1}}, \ldots, x_{\alpha_d}, \varphi)$ при каждых фиксированных $(t, x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_l}) \in V^c$.

О п р е д е л е н и е 2. Функция $z(t,X,\varphi_1,\varphi_2)$, $t\in R_+$, $X\in R^d$, $\varphi_1\in R^{kd}$, $\varphi_2\in C([-h,0],R^d)$, со значениями в $R^{d\times l}$, удовлетворяет *условию B*, если для любого $a>0$ выполнено условие

$$\lim_{q\downarrow 0}\sup_{(t,X,\varphi_1,\varphi_2),(t,X,\varphi_1,\overline{\varphi}_2)\in\Gamma(0,a),|\varphi_2-\overline{\varphi}_2|\le q}|z(t,X,\varphi_1,\varphi_2)-z(t,X,\varphi_1,\overline{\varphi}_2)|=0,$$

где $\Gamma(0,a)=\{(t,X,\varphi_1,\varphi_2)\in R_+\times R^d\times R^{kd}\times C([-h,0],R^d)\,|\,t+|X|+|\varphi_1|+\|\varphi_2\|\le a\}$.

О п р е д е л е н и е 3. Функция $z:R_+\times R^d\times E\to R^m$ называется *локально ограниченной*, если для любого натурального n существует постоянная C_n, такая, что $|z(t,X,\varphi)|\le C_n$ для любых $(t,X,\varphi)\in[0,n]\times B_d^n\times E$, $\|\varphi\|\le n$. Функция $z:R_+\times R^d\times E\to R^m$ имеет *линейный порядок роста*, если существует постоянная C такая, что $|z(t,X,\varphi)|\le C(1+|X|+\|\varphi\|)$ для любых $(t,X,\varphi)\in R_+\times R^d\times E$.

О п р е д е л е н и е 4. Функция $z:R_+\times R^d\times R^{kd}\to R^m$ удовлетворяет (δ,ρ)-*локальному условию Гёльдера*, если для любого натурального n существует постоянная L_n, такая, что $|z(t,X,\varphi)-z(s,Y,\psi)|\le L_n(|t-s|^\delta+|X-Y|^\rho+|\varphi-\psi|^\rho)$ для любых $(t,X,\varphi),(s,Y,\psi)\in[0,n]\times B_d^n\times B_{kd}^n$. Функция $z:R_+\times R^d\times R^{kd}\to R^m$ удовлетворяет (δ,ρ)-*глобальному условию Гёльдера*, если постоянная L_n не зависит от n.

Для каждых $\alpha\in(0,1/2)$, $a,b\in R$, $a<b$, определим пространство $\mathcal{H}_\alpha[a,b]$ измеримых функций $z:[a,b]\to R^d$ с нормой $\|z(\cdot)\|_{\mathcal{H}_\alpha[a,b]}:=\sup\limits_{t\in[a,b]}|z(t)|_\alpha<\infty$, где

$$|z(t)|_\alpha=|z(t)|+\int_a^t\frac{|z(t)-z(s)|}{(t-s)^{\alpha+1}}ds.$$

Для произвольных $\alpha\in(0,1/2)$, $a,b\in R$, $a<b$, через $C^\alpha[a,b]$ обозначим пространство непрерывных по Гёльдеру с показателем α функций $z:[a,b]\to R^d$ с нормой

$$\|z\|_{C^\alpha[a,b]}=\sup_{t\in[a,b]}|z(t)|+\sup_{a\le s<t\le b}\frac{|z(t)-z(s)|}{(t-s)^\alpha}.$$

Пусть $C^{\alpha,p}$ $(\alpha\in(0,1/2),\ p\le 0)$ – метрическое пространство измеримых функций $z:[p,\infty)\to R^d$ с метрикой

$$d_{C^\alpha}(z_1,z_2)=\sum_{n=1}^\infty 2^{-n}\left(\|z_1-z_2\|_{C^\alpha[p,n]}\wedge 1\right).$$

Через $C_0^{\alpha,p}$, соответственно $C_0^\alpha[a,b]$, обозначим множество функций $z\in C^{\alpha,p}$, соответственно $z\in C^\alpha[a,b]$, удовлетворяющих условию

$$\lim_{q\to+0}\sup_{0<|t-s|<q}\frac{|z(t)-z(s)|}{(t-s)^\alpha}=0.$$

Отметим, что множество $C_0^{\alpha,p}$ с метрикой пространства $C^{\alpha,p}$ и множество $C_0^\alpha[a,b]$ с нормой пространства $C^\alpha[a,b]$ соответственно являются полным сепарабельным метрическим и сепарабельным банаховым пространствами.

О п р е д е л е н и е 5. Пусть заданы вероятностная мера ν на $\left(C^{1/2}[-h,0],\beta\left(C^{1/2}[-h,0]\right)\right)$ и число $\eta\in(0,1/2)$. Если существует процесс $X(t)$, $t\ge -h$, заданный на некотором вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{F},P)$ с потоком σ-алгебр $(\mathcal{F}_t)_{t\ge 0}$, удовлетворяющий условиям:

1) процесс $X(t)$, $t\in[-h,0]$, является $\mathcal{F}_0$-измеримым и для любого $A\in\beta(C^{1/2}[-h,0])$ выполняется равенство $P((X(t),\ t\in[-h,0])\in A)=\nu(A)$;

2) существует $(\mathcal{F}_t)$-момент остановки τ со значениями в $(0,+\infty]$ п.н., такой, что процесс $X(t)$, $t\in R_+$, является измеримым $\mathcal{F}_t$-согласованным, для почти всех $\omega\in\Omega$ траектории процесса $X(t)$

непрерывны по Гёльдеру с показателем η на любом отрезке из $[0,\tau)$, а также $\limsup\limits_{t\to\tau-0}|X(t)|=\infty$ при $\tau<\infty$;

3) существуют стандартное $\mathcal{F}_t$-броуновское движение $W(t)$ и $\mathcal{F}_0$-измеримое дробное броуновское движение $B^H(t)$;

4) существуют измеримые $\mathcal{F}_t$-согласованные процессы $v(t)$, $u(t)$, $t\in R_+$, такие, что $v(t,\omega)\in F(t,X(t,\omega),S_tX(\omega))$, $uu^{\mathrm{T}}(t,\omega)\in A(t,X(t,\omega),S_tX(\omega))$ для $(\mu\times P)$-почти всех $(t,\omega)\in[0,\tau)\times\Omega$;

5) для любого момента остановки σ, $0\le\sigma<\tau$, и любого $L\in R_+$ почти наверное выполняется условие

$$\int\limits_0^{L\wedge\sigma}(|v(s)|+|u(s)|^2)ds+\|b(\cdot,X(\cdot),T.X)\|_{\mathcal{H}_\eta[0,L\wedge\sigma]}<\infty;$$

6) с вероятностью 1 для всех $t\in[0,\tau)$ выполняется соотношение

$$X(t)=X(0)+\int\limits_0^t v(s)ds+\int\limits_0^t u(s)dW(s)+\int\limits_0^t b(s,X(s),T_sX)dB^H(s),$$

то набор $(\Omega,\mathcal{F},P,\mathcal{F}_t,X,v,u,W,B^H,\tau)$ (или, короче, $X(t)$) называется β-слабым решением уравнения (1) с начальным распределением ν, имеющим непрерывные по Гёльдеру порядка η траектории (до момента взрыва τ). Если $v(t,\omega)=f(t,X(t,\omega),S_tX(\omega))$, $u(t,\omega)=g(t,X(t,\omega),S_tX(\omega))$ для $(\mu\times P)$-почти всех $(t,\omega)\in[0,\tau)\times\Omega$, то β-слабое решение называется слабым решением.

В определении β-слабого решения интеграл по стандартному броуновскому движению – интеграл Ито, интеграл по дробному броуновскому движению – потраекторный интеграл Римана – Стилтьеса.

Т е о р е м а 1. *Пусть функции* $f(t,X,\varphi)$, $g(t,X,\varphi)$ *измеримы по Борелю и локально ограничены, функция* $b(t,X,\varphi_1)$ *удовлетворяет* (δ,ρ)*-локальному условию Гёльдера, где* $\delta>1-H$, $\rho>2-2H$. *Тогда для любой заданной на* $(C^{1/2}[-h,0],\beta(C^{1/2}[-h,0]))$ *вероятностной меры* ν *и любого* $\eta\in(0,1/2)$ *уравнение* (1) *имеет* β*-слабое решение с начальным распределением* ν*, непрерывными по Гёльдеру с показателем* η *траекториями и бесконечным моментом взрыва п.н.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем стандартное вероятностное пространство $(\Omega,\mathcal{F},P)$, где $\Omega=[0,1)$, $\mathcal{F}$ – σ-алгебра измеримых по Лебегу подмножеств множества Ω, P – мера Лебега на Ω. Определим на этом вероятностном пространстве случайный процесс $\xi(t)$, $t\in[-h,0]$, с распределением ν, броуновское движение $W(t)$ и дробное броуновское движение $B^H(t)$ с индексом Херста H так, что броуновское движение $W(t)$ не зависит от случайного процесса $\xi(t)$ и дробного броуновского движения $B^H(t)$. Для каждого натурального n разобьем промежуток $[0,+\infty)$ точками $t_i^n=i/n$, $i\in\{0,1,2,...\}$, положим $k_n(t)=t_i^n$ при $t\in[t_i^n,t_{i+1}^n)$ и определим процессы $X_n(t,\omega)$, $t\ge-h$, так, что $X_n(t,\omega)=\xi(t,\omega)$ при $t\in[-h,0]$, а для любых $(t,\omega)\in[t_i^n,t_{i+1}^n)\times\Omega$, $i=0,1,2,...$, справедливо равенство

$$X_n(t)=\xi(0)+\int\limits_0^t f(s,X_n(k_n(s)),S_{k_n(s)}X_n)ds+\int\limits_0^t g(s,X_n(k_n(s)),S_{k_n(s)}X_n)dW(s)+$$
$$+\int\limits_0^t b(s,X_n(k_n(s)),T_{k_n(s)}X_n)dB^H(s).$$

Для каждых натуральных n и l определим случайные величины

$$\tau_n^l=\inf\{t\in R_+\,\|\,X_n(t)|>l\}$$

и случайные процессы

$$X_n^l(t)=X_n(t\wedge\tau_n^l).$$

Если $|X_n(t)|\le l$ для всех $t\in R_+$, то мы полагаем $\tau_n^l=+\infty$.

Для каждого натурального l и любого $T \in R_+$ определим метрическое пространство $L_{1,l}^{\sigma,T}$ как замкнутый шар с центром в нуле радиуса C_l в пространстве $L_\infty([0,T],R^d)$ с метрикой, порождающей *-слабую топологию пространства $L_\infty([0,T],R^d)$, где C_l – постоянная из условия локальной ограниченности функции f. Через $L_{1,l}^{\sigma,\mathrm{loc}}(R_+,R^d)$ обозначим метрическое пространство, состоящее из функций $h: R_+ \to R^d$, таких, что при каждом $T \in R_+$ функция $h(t)$, $t \in [0,T]$, принадлежит пространству $L_{1,l}^{\sigma,T}$. Аналогично определим метрическое пространство $L_{1,l}^{\sigma,\mathrm{loc}}(R_+,R^{d\times d})$.

Для каждого натурального l и любого $\eta \in (0,1/2)$ определим пространство

$$\mathcal{S}_\eta^l = C_0^{\eta,-h} \times L_{1,l}^{\sigma,\mathrm{loc}}(R_+,R^d) \times L_{1,l}^{\sigma,\mathrm{loc}}(R_+,R^{d\times d}) \times C_0^{\eta,0} \times \overline{R}_+$$

с метрикой

$$d_{\mathcal{S}_{\eta,\varepsilon}^l}((x_1,x_2,x_3,x_4,x_5),((y_1,y_2,y_3,y_4,y_5))) =$$
$$= d_{C^\eta}(x_1,y_1) + d_{L_{1,l}^{\sigma,\mathrm{loc}}(R_+,R^d)}(x_2,y_2) + d_{L_{1,l}^{\sigma,\mathrm{loc}}(R_+,R^{d\times d})}(x_3,y_3) + d_{C^\eta}(x_4,y_4) + d_{\overline{R}_+}(x_5,y_5).$$

Для произвольного $\eta \in (0,1/2)$ определим пространство $\mathcal{S}_\eta = \otimes_{l=1}^\infty \mathcal{S}_\eta^l$ с метрикой $d_{\mathcal{S}_\eta}((z_1^l)_{l=1}^\infty,(z_2^l)_{l=1}^\infty) = \sum_{l=1}^\infty 2^{-l}(d_{\mathcal{S}_\eta^l}(z_1^l,z_2^l) \wedge 1)$.

Пространства $\mathcal{S}_\eta^l$, $\mathcal{S}_\eta$ являются полными сепарабельными метрическими. Пусть $v_n^l(s) = f(s, X_n^l(k_n(s)), S_{k_n(s)}X_n^l)$, $q_n^l(s) = g(s, X_n^l(k_n(s)), S_{k_n(s)}X_n^l)$, $r_n^l(s) = b(s, X_n^l(k_n(s)), T_{k_n(s)}X_n^l)$, $w_n^l = q_n^l(q_n^l)^{\mathrm{T}}$.

Из доказательства теоремы 1 [13] вытекает, что для каждого $\eta \in (0,1/2)$ последовательность $\Psi_n = (X_n^l, v_n^l, w_n^l, B^H, \tau_n^l)_{l=1}^\infty$, $n \ge 1$, плотна в пространстве $\mathcal{S}_\eta$.

По теореме Прохорова [15, с. 16] для любого $\eta \in (0,1/2)$ из последовательности P^{Ψ_n}, $n \in N$, можно выбрать подпоследовательность $P^{\Psi_{n_k}}$, слабо сходящуюся к некоторой вероятностной мере Θ при $k \to \infty$ (здесь и далее для упрощения обозначений вместо n_k будем снова писать n). Из доказательства теоремы Скорохода [15, с. 18] следует, что можно построить последовательность случайных величин $\overline{\Psi}_{n_k} = (\overline{X}_{n_k}^l, \overline{v}_{n_k}^l, \overline{w}_{n_k}^l, \overline{B}_{n_k}^H, \overline{\tau}_{n_k}^l)_{l=1}^\infty$, $k \in N$, и случайную величину $\overline{\Psi} = (\overline{X}^l, \overline{v}^l, \overline{w}^l, \overline{B}^H, \overline{\tau}^l)_{l=1}^\infty$ на некотором вероятностном пространстве $(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{F}}, \overline{P})$ со значениями в пространстве $\mathcal{S}_\eta$ (здесь n_k – некоторая подпоследовательность последовательности натуральных чисел, в дальнейшем вместо n_k будем опять писать n) такие, что выполняются следующие условия:

1) $P^{\Psi_n} = P^{\overline{\Psi}_n}$ для любого $n \in N$; $P^{\overline{\Psi}} = \Theta$; $\overline{\Psi}_n \underset{n\to\infty}{\to} \overline{\Psi}$ в $\mathcal{S}_\eta$ п.н.;

2) $\overline{\tau}_n^l = \inf\{t \in R_+ \,\|\, X_n^{l'} | \ge l\}$ для любых $l' \ge l$; $\overline{X}_n^l(t + \overline{\tau}_n^l) = \overline{X}_n^l(\overline{\tau}_n^l)$ для любых $t \in R_+$, если $\overline{\tau}_n^l < \infty$;

3) $\overline{X}^l(t) = \overline{X}^{l+1}(t)$, $\overline{v}^l(t) = \overline{v}^{l+1}(t)$, $\overline{w}^l(t) = \overline{w}^{l+1}(t)$ при $t \le \overline{\tau}^l$; $|\overline{X}^l(\overline{\tau}^l)| = l$, если $0 < \overline{\tau}^l < \infty$; $\overline{\tau}^l \le \overline{\tau}^{l+1}$ для любых натуральных l;

4) процессы $\overline{B}_n^H$ и $\overline{B}^H$ являются дробными броуновскими движениями, измеримыми относительно σ-алгебр $\overline{\mathcal{F}}_{n,0}$ и $\overline{\mathcal{F}}_0$ соответственно, где $\overline{\mathcal{F}}_{n,t} = \mathcal{F}_t((\overline{X}_n^l, \overline{v}_n^l, \overline{w}_n^l, \overline{B}_n^H)_{l=1}^\infty)$ и $\overline{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_t((\overline{X}^l, \overline{v}^l, \overline{w}^l, \overline{B}^H)_{l=1}^\infty)$.

Пусть $\overline{\tau} = \lim_{l\to\infty} \overline{\tau}^l$, $\overline{X}(t) = \overline{X}^l(t)$, $\overline{v}(t) = \overline{v}^l(t)$, $\overline{w}(t) = \overline{w}^l(t)$ при $t < \overline{\tau}^l$; для $t \ge \overline{\tau}$ положим $\overline{X}(t) = 0$, $\overline{v}(t) = 0$, $\overline{w}(t) = 0$. Случайная величина $\overline{\tau}$ является $\overline{\mathcal{F}}_t$-моментом остановки, процесс $\overline{X}(t)$ является $\overline{\mathcal{F}}_t$-согласованным и имеет непрерывные по Гёльдеру порядка η траектории до момента $\overline{\tau}$, процесс $\overline{v}(t)$ имеет измеримые траектории. Кроме того, $\limsup_{t\to\overline{\tau}-0} |\overline{X}(t)| = \infty$ при условии $\overline{\tau} < \infty$. Процессы $\overline{v}(t)$, $\overline{w}(t)$ являются измеримыми $\overline{\mathcal{F}}_t$-согласованными. Обозначим $\overline{r}_n^l(t) = \sigma(t, \overline{X}_n^l(k_n(t)), T_{k_n(t)}\overline{X}_n^l)$, $\overline{r}^l(t) = \sigma(t, \overline{X}^l(t), T_t\overline{X}^l)$.

Из полунепрерывности сверху по $(X,\varphi)\in R^d\times E$ многозначных функций $F(t,X,\varphi)$, $A(t,X,\varphi)$ следует, что для любого натурального l для $(\mu\times\overline{P})$-почти всех $(t,\omega)\in R_+\times\overline{\Omega}$ выполняются включения

$$\overline{v}^{\,l}(t,\omega)\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{\mathrm{co}}\bigcup_{k=n}^{\infty}\overline{v}_k^{\,l}(t,\omega)\subset F(t,\overline{X}^{\,l}(t,\omega),S_t\overline{X}^{\,l}(\cdot,\omega)),$$
$$\overline{w}^{\,l}(t,\omega)\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{\mathrm{co}}\bigcup_{k=n}^{\infty}\overline{w}_k^{\,l}(t,\omega)\subset A(t,\overline{X}^{\,l}(t,\omega),S_t\overline{X}^{\,l}(\cdot,\omega)).$$

Следовательно, для $(\mu\times\overline{P})$-почти всех $(t,\omega)\in[0,\overline{\tau})\times\overline{\Omega}$ выполняются включения $\overline{v}(t)\in F(t,\overline{X}(t),S_t\overline{X})$, $\overline{w}(t)\in A(t,\overline{X}(t),S_t\overline{X})$.

Выберем произвольно: $l,L\in N$, s, $t\in R_+$, $s\le t$; дважды непрерывно дифференцируемую функцию $h:R^d\to R$, ограниченную вместе с частными производными до второго порядка включительно; непрерывную ограниченную $(\beta_s(\mathcal{J}))$-измеримую функцию $q:\mathcal{J}\to R$, где $\mathcal{J}=C_0^{\eta,-h}\times L_{1,L}^{\sigma,\mathrm{loc}}(R_+,R^d)\times L_{1,L}^{\sigma,\mathrm{loc}}(R_+,R^{d\times d})\times C_0^{\eta,0}$.

Из определения процессов $X_n^l(t)$ и соотношения $P^{\overline{\Psi}_n}=P^{\Psi_n}$ с помощью формулы Ито получаем равенство

$$E_n\left(\left(h\left(\overline{X}_n^{\,l}(t)\right)-h\left(\overline{X}_n^{\,l}(s)\right)-\sum_{i=1}^{r2}\int_{s\wedge\overline{\tau}_n^l}^{t\wedge\overline{\tau}_n^l}\overline{r}_n^{\,l,i}(\tau)\frac{\partial h\left(\overline{X}_n^{\,l}(\tau)\right)}{\partial x_i}d\overline{B}_n^{H,i}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\int_{s\wedge\overline{\tau}_n^l}^{t\wedge\overline{\tau}_n^l}\left(\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\overline{w}_n^{\,l,ij}\frac{\partial^2h\left(\overline{X}_n^{\,l}(\tau)\right)}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{d}\overline{v}_n^{\,l,i}\frac{\partial h\left(\overline{X}_n^{\,l}(\tau)\right)}{\partial x_i}\right)d\tau\right)q\left(\overline{X}_n^{\,L},\overline{v}_n^{\,L},\overline{w}_n^{\,L},\overline{B}_n^{H}\right)\right)=0.$$

Из сходимости $\overline{\Psi}_n\underset{n\to\infty}{\to}\overline{\Psi}$ в $\mathcal{S}_\eta$ п.н. и доказательства теоремы 1 [13] вытекает равенство

$$E\left(\left(h\left(\overline{X}^{\,l}(t)\right)-h\left(\overline{X}^{\,l}(s)\right)-\sum_{i=1}^{r2}\int_{s\wedge\overline{\tau}^l}^{t\wedge\overline{\tau}^l}\overline{r}^{\,l,i}(\tau)\frac{\partial h\left(\overline{X}^{\,l}(\tau)\right)}{\partial x_i}d\overline{B}^{H,i}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\int_{s\wedge\overline{\tau}^l}^{t\wedge\overline{\tau}^l}\left(\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\overline{w}^{\,l,ij}\frac{\partial^2h\left(\overline{X}^{\,l}(\tau)\right)}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{d}\overline{v}^{\,l,i}\frac{\partial h\left(\overline{X}^{\,l}(\tau)\right)}{\partial x_i}\right)d\tau\right)q\left(\overline{X}^{\,L},\overline{v}^{\,L},\overline{w}^{\,L},\overline{B}^{H}\right)\right)=0.$$

Отсюда следует, что для любого натурального l процесс

$$h\left(\overline{X}^{\,l}(t)\right)-h\left(\overline{X}^{\,l}(s)\right)-\sum_{i=1}^{r2}\int_{s\wedge\overline{\tau}^l}^{t\wedge\overline{\tau}^l}\overline{r}^{\,l,i}(\tau)\frac{\partial h\left(\overline{X}^{\,l}(\tau)\right)}{\partial x_i}d\overline{B}^{H,i}-$$
$$-\int_{s\wedge\overline{\tau}^l}^{t\wedge\overline{\tau}^l}\left(\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\overline{w}^{\,l,ij}\frac{\partial^2h\left(\overline{X}^{\,l}(\tau)\right)}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{d}\overline{v}^{\,l,i}\frac{\partial h\left(\overline{X}^{\,l}(\tau)\right)}{\partial x_i}\right)d\tau$$

является $\overline{\mathcal{F}}_t$-мартингалом.

Матрица $\overline{w}(t,\omega)$ является симметрической неотрицательно определенной, представим ее в виде $\overline{w}(t,\omega)=Q(t,\omega)D(t,\omega)Q^{\mathrm{T}}(t,\omega)$, где $Q(t,\omega)$ – ортогональная матрица, $D(t,\omega)$ – диагональная матрица с неотрицательными элементами, при этом все компоненты матриц $Q(t,\omega)$, $D(t,\omega)$ являются измеримыми $\overline{\mathcal{F}}_t$-согласованными процессами. Пусть $\overline{u}(t,\omega)=Q(t,\omega)\sqrt{D(t,\omega)}$, тогда для $(\mu\times\overline{P})$- почти всех $(t,\omega)\in[0,\overline{\tau})\times\overline{\Omega}$ выполняется включение $\overline{u}(t,\omega)\overline{u}^{\mathrm{T}}(t,\omega)\in A(t,\overline{X}(t,\omega),S_t\overline{X}(\cdot,\omega))$.

Из предложения 1.38 работы [11] вытекает, что на расширении вероятностного пространства $(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{F}},\tilde{P})$ с потоком $\tilde{\mathcal{F}}_t$ вероятностного пространства $(\overline{\Omega},\overline{\mathcal{F}},\overline{P})$ с потоком $\overline{\mathcal{F}}_t$ можно определить $\tilde{\mathcal{F}}_t$-броуновское движение $\tilde{W}(t)$ такое, что вероятностью 1 для всех $t\in[0,\tilde{\tau})$ выполняется соотношение

$$\bar{X}(t)=\bar{X}(0)+\int_0^t \bar{v}(s)ds+\int_0^t \bar{u}(s)d\tilde{W}(s)+\int_0^t \sigma(s,\bar{X}(s),T_s\bar{X})d\bar{B}^H(s).$$

Таким образом, $\bar{X}(t)$ – слабое решение уравнения (1) с начальным распределением ν и непрерывными по Гёльдеру с показателем η траекториями. Теорема доказана.

Из теоремы 1 и доказательства теоремы 2 из работы [13] вытекает следующее утверждение.

Следствие. *Пусть функции $f(t,X,\varphi)$, $g(t,X,\varphi)$ измеримы по Борелю, имеют линейный порядок роста и непрерывны по переменным (X,φ) при каждом $t\in R_+$, функция $b(t,X,\varphi_1)$ ограничена и удовлетворяет (δ,ρ)-глобальному условию Гёльдера, где $\delta>1-H$, $\rho>2-2H$. Тогда для любой заданной на $(C^{1/2}[-h,0],\beta(C^{1/2}[-h,0]))$ вероятностной меры ν и любого $\eta\in(0,1/2)$ уравнение* (1) *имеет слабое решение с начальным распределением ν, непрерывными по Гёльдеру с показателем η траекториями и бесконечным моментом взрыва п.н.*

Пусть $g^{(1)}$, $b^{(1)}$ – $(l\times d)$- и $(l\times r_2)$-матрицы, составленные из первых l строк матриц g и b соответственно; $g^{(2)}$, $b^{(2)}$ – $((d-l)\times d)$- и $((d-l)\times r_2)$-матрицы, составленные из оставшихся строк матриц g и b соответственно; $f^{(1)}$ – вектор, состоящий из первых l компонент вектора f; $f^{(2)}$ – вектор, составленный из оставшихся компонент вектора f; $X=(x,y)$, $x\in R^l$, $y\in R^{d-l}$, $\sigma^{(1)}=g^{(1)}g^{(1)\mathrm{T}}$, G_1 – множество всех точек $(t,x)\in R_+\times R^l$, таких, что для любой открытой в $R_+\times R^l$ окрестности $U_{(t,x)}$ точки (t,x) существует такое число $a>0$, что интеграл

$$\int_{U_{(t,x)}}\sup_{|y|+\|\varphi\|\le a}(\det\sigma^{(1)}(\tau,z,y,\varphi))^{-1}d\tau dz$$

либо не определен, либо равен бесконечности; G_2 – множество всех точек $(t,x)\in G_1^c$, таких, что для любой открытой в $R_+\times R^l$ окрестности $U_{(t,x)}$ точки (t,x) существует число $a>0$, такое, что функция $(\tau,z)\to\sup_{|y|+\|\varphi\|\le a}(\det\sigma^{(1)}(\tau,z,y,\varphi))^{-1}$, $(\tau,z)\in U_{(t,x)}$, не является измеримой по Борелю; $G=G_1\bigcup G_2$. Если $V\subseteq R_+\times R^l$, то $V^c=(R_+\times R^l)\setminus V$, $(V)_\gamma=\{(t,x)\in R_+\times R^l \mid \inf_{(s,y)\in V}(|t-s|+|x-y|)\le\gamma\}$, $(V)_\gamma^c=(R_+\times R^l)\setminus(V)_\gamma$, $(V)_\gamma=\varnothing$, если $V=\varnothing$.

Запишем уравнение (1) в следующем виде:

$$\begin{cases} dx(t)=f^{(1)}(t,X(t),S_tX)dt+g^{(1)}(t,X(t),S_tX)dW(t)+b^{(1)}(t,X(t),T_tX)dB^H(t),\\ dy(t)=f^{(2)}(t,X(t),S_tX)dt+g^{(2)}(t,X(t),S_tX)dW(t)+b^{(2)}(t,X(t),T_tX)dB^H(t),\end{cases} \qquad (2)$$

где $x(t)\in R^l$, $y(t)\in R^{d-l}$.

Используя рассуждения доказательства леммы 1 [14], приходим к следующему утверждению.

Лемма 1. *Пусть функции $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, $g^{(1)}$, $g^{(2)}$ измеримы по Борелю и локально ограничены, функции $b^{(1)}$, $b^{(2)}$ удовлетворяют (δ,ρ)-локальному условию Гёльдера, $\delta>1-H$, $\rho>2-2H$; $X(t)=(x(t),y(t))$ – слабое решение системы* (2), *имеющее непрерывные по Гёльдеру порядка $\eta\in[(1-H)/\rho,1/2)$ траектории; $\psi(t,x,y)$ – неотрицательная измеримая по Борелю функция такая, что для любого $q>0$ отображение $(t,x)\to\sup_{|y|+\|\varphi\|\le q}\psi(t,x,y,\varphi)$ измеримо по Борелю. Тогда для любых $a>0$, $T>0$ выполняется неравенство*

$$E\left(\int_0^{T\wedge\tau^a}\left(\det\sigma^{(1)}\left(\tau,X(\tau),S_\tau X\right)\right)^{1/(l+1)}\psi\left(\tau,X(\tau),S_\tau X\right)d\tau\right)\le c_1\left(\int_{[0,T]\times B_l^a}\sup_{|y|+\|\varphi\|\le a}\psi^{l+1}(s,x,y,\varphi)dsdx\right)^{c_2},$$

где $\tau^a=\inf\{t\in R_+ \,\|\, X(t)|>a\}$, положительные постоянные c_1 и c_2 зависят лишь от a,T,l,d.

Для любого натурального n определим функции $J_n(t,x)=n^{l+1}I_1(nt)I_2(nx)$, где $I_1(t)=\alpha_1\exp\left(-\frac{1}{1-t^2}\right)1_{(-1,1)}(t)$, $I_2(x)=\alpha_2\exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right)1_{B_l^1}(x)$, постоянные α_1, α_2 выбраны так, что $\int_R I_1(t)dt=\int_{R^l}I_2(x)dx=1$.

Л е м м а 2. *Пусть* $f(t,x,y,\varphi)$ *– вещественная измеримая по Борелю непрерывная по* (y,φ) *локально ограниченная функция, удовлетворяющая условию B,* $f_n(t,x,y,\varphi)=f(t,x,y,\varphi)*J_n(t,x)$, $n\ge 1$. *Тогда для любых* $a\in R_+$, $T\in R_+$, $\gamma>0$, $p\ge 1$ *справедливо равенство*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{([0,T]\times B_l^a)\cap(G)_\gamma^c}\sup_{|y|+\|\varphi\|\le a}(\det\sigma^{(1)}(t,x,y,\varphi))^{-1}\times\sup_{|y|+\|\varphi\|\le a}|f_n(t,x,y,\varphi)-f(t,x,y,\varphi)|^{p(l+1)}\,dtdx=0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем произвольные $a\in R_+$, $T\in R_+$, $\gamma>0$, $p\ge 1$. Пусть $\tilde D=([0,T]\times B_l^a)\cap(G)_\gamma^c$. Для любых $m\in N$, $a\in R_+$ определим множество

$$Q_a^m=\{(y,\varphi_1,\varphi_2)\,|\,y\in B_{d-l}^a,\ \varphi_1\in B_{kd}^a,\ \varphi_2\in R^m[t],\|\varphi\|_2\le a\},$$

где $R^m[t]$ – множество многочленов с действительными коэффициентами степени не выше m, заданных на $[-h,0]$. Из доказательства леммы 2 [6] вытекает, что для каждых фиксированных $m\in N$, $a\in R_+$, $T\in R_+$, $p\ge 1$, $\gamma>0$ справедливо соотношение

$$\int_{\tilde D}\sup_{|y|+\|\varphi\|\le a}(\det\sigma^{(1)}(t,x,y,\varphi))^{-1}\sup_{(y,\varphi)\in Q_a^m}|f_n(t,x,y,\varphi)-f(t,x,y,\varphi)|^{p(l+1)}\,dtdx\underset{n\to\infty}{\to}0. \tag{3}$$

Возьмем произвольное $\varepsilon>0$. Согласно условию B и теореме Вейерштрасса существует $m_0=m_0(\varepsilon)$, такое, что

$$\sup_{(t,x,y,\varphi),(t,x,y,\varphi')\in\mathcal{A},|\varphi-\varphi'|\le 1/m_0}|f(t,x,y,\varphi_1,\varphi_2)-f(t,x,y,\varphi_1,\varphi_2')|^{p(l+1)}\le\varepsilon^{p(l+1)}, \tag{4}$$

где $\mathcal{A}=[0,a+1]\times B_l^{a+1}\times\mathcal{B}$, $\mathcal{B}=\{(y,\varphi)\in B_{d-l}^a\times E\,\|\,y\,|+\|\varphi\|\le a\}$, $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2)$, $\varphi'=(\varphi_1,\varphi_2')$, $\varphi_2'\in R^{m_0}[t]$.

Используя соотношение (4), приходим к неравенствам

$$\int_{\tilde D}\sup_{|y|+\|\varphi\|\le a}(\det\sigma^{(1)}(t,x,y,\varphi))^{-1}\times$$
$$\times\sup_{(y,\varphi),(y,\varphi')\in\mathcal{B},|\varphi-\varphi'|\le 1/m_0}|f(t,x,y,\varphi_1,\varphi_2)-f(t,x,y,\varphi_1,\varphi_{2'})|^{p(l+1)}\,dtdx\le C_1\varepsilon^{p(l+1)}, \tag{5}$$

$$\int_{\tilde D}\sup_{|y|+\|\varphi\|\le a}(\det\sigma^{(1)}(t,x,y,\varphi))^{-1}\times$$
$$\times\sup_{(y,\varphi),(y,\varphi')\in\mathcal{B},|\varphi-\varphi'|\le 1/m_0}|f_n(t,x,y,\varphi_1,\varphi_2)-f_n(t,x,y,\varphi_1,\varphi_{2'})|^{p(l+1)}\,dtdx\le C_1\varepsilon^{p(l+1)}, \tag{6}$$

где C_1, C_2 – универсальные постоянные.

Из соотношения (3) вытекает существование числа $n_0=n_0(\varepsilon,m_0)$, такого, что неравенство

$$\int_{\tilde D}\sup_{|y|+\|\varphi\|\le a}(\det\sigma^{(1)}(t,x,y,\varphi))^{-1}\times$$
$$\times\sup_{(y,\varphi')\in Q_a^{m0}}|f_n(t,x,y,\varphi_1,\varphi_{2'})-f(t,x,y,\varphi_1,\varphi_{2'})|^{p(l+1)}\,dtdx\le\varepsilon^{p(l+1)} \tag{7}$$

справедливо для всех $n\ge n_0$.

Используя неравенства (5)–(7), заключаем, что справедливо соотношение

$$\int_{\tilde D}\sup_{|y|+\|\varphi\|\le a}(\det\sigma^{(1)}(t,x,y,\varphi))^{-1}\sup_{|y|+\|\varphi\|\le a}|f_n(t,x,y,\varphi)-f(t,x,y,\varphi)|^{p(l+1)}\,dtdx\le(C_1+C_2+1)\varepsilon^{p(l+1)}$$

для всех $n\ge n_0(\varepsilon,m_0)$. Лемма доказана.

Л е м м а 3. *Пусть функции* $f(t,X,\varphi)$, $g(t,X,\varphi)$ *измеримы по Борелю, ограничены и удовлетворяют условию B, функция* $b(t,X,\varphi_1)$ *ограничена и удовлетворяет* (δ,ρ)*-локальному условию Гёльдера,* $\delta>1-H$, $\rho>2-2H$, *существует постоянная* $\lambda>0$, *такая, что* $\det\sigma(t,X,\varphi)\ge\lambda$ *для всех* $t\in R_+$, $X\in R^d$, $\varphi\in E$. *Тогда для любой заданной на* $(C^{1/2}[-h,0],\beta(C^{1/2}[-h,0]))$ *вероятностной меры* ν

и любого $\eta\in(0,1/2)$ *уравнение* (1) *имеет слабое решение с начальным распределением* ν*, непрерывными по Гёльдеру с показателем* η *траекториями и бесконечным моментом взрыва п.н.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем произвольное $\eta\in((1-H)/\rho,1/2)$. Пусть $f_k(t,X,\varphi)=f(t,X,\varphi)*J_k(t,X)$, $g_k(t,X,\varphi)=g(t,X,\varphi)*J_k(t,X)$. Тогда для любого натурального k функции $f_k(t,X,\varphi)$ и $g_k(t,X,\varphi)$ являются равномерно по k ограниченными и непрерывными. Известно, что матрицы g_k являются равномерно (по k, t, X) невырожденными, т. е. существует постоянная $\beta>0$, такая, что $\lambda^T g_k(t,X,\varphi)\lambda\geq\beta|\lambda|^2$ для любых $\lambda\in R^d$, $k\in N$, $(t,X,\varphi)\in R_+\times R^d\times E$ [2, с. 123]. Выберем произвольное $\eta_1\in(\eta,1/2)$. Из следствия вытекает, что для любого натурального k уравнение

$$dX(t)=f_k(t,X(t),S_tX)dt+g_k(t,X(t),S_tX)dW(t)+b(t,X(t),T_tX)dB^H(t)$$

имеет слабое решение $(\Omega_k,\mathcal{F}_k,P_k,F_{k,t},X_k,W_k,B_k^H,\infty)$ с начальным распределением ν и непрерывными по Гёльдеру с показателем η_1 траекториями.

Из доказательства леммы 3 [14] вытекает, что последовательность X_k, $k\geq 1$, плотна в C_0^η. Следовательно, для любого $\varepsilon\in(0,H)$ последовательность (X_k,W_k,B_k^H), $k\geq 1$, плотна в $C_0^\eta\times C_0^{H-\varepsilon}\times C_0^\eta$. Из теорем Прохорова и Скорохода [15, с. 16–18] вытекает существование последовательности процессов $(\bar{X}_{k_l},\bar{W}_{k_l},\bar{B}_{k_l}^H)$, где k_l – подпоследовательность последовательности натуральных чисел, и процессов $\bar{X},\bar{W},\bar{B}^H$, определенных на некотором вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{F},P)$, таких, что $P^{(X_{k_l},W_{k_l},B_{k_l}^H)}=P^{(\bar{X}_{k_l},\bar{W}_{k_l},\bar{B}_{k_l}^H)}$ для любого натурального l и $(\bar{X}_{k_l},\bar{W}_{k_l},\bar{B}_{k_l}^H)\underset{l\to\infty}{\to}(\bar{X},\bar{W},\bar{B}^H)$ в $C_0^\eta\times C_0^{H-\varepsilon}\times C_0^\eta$ п.н. (для простоты обозначений k_l обозначаем через k). Процессы $\bar{W}_k$ и $\bar{W}$ являются стандартными броуновскими движениями, согласованными с потоками $\bar{\mathcal{F}}_{k,t}=\mathcal{F}_t(\bar{X}_k,\bar{W}_k,\bar{B}_k^H)$ и $\bar{\mathcal{F}}_t=\mathcal{F}_t(\bar{X},\bar{W},\bar{B}^H)$ соответственно; процессы $\bar{B}_k^H$ и $\bar{B}^H$ являются дробными броуновскими движениями, измеримыми относительно σ-алгебр $\bar{\mathcal{F}}_{k,0}$ и $\bar{\mathcal{F}}_0$ соответственно.

Из определения процессов $X_k(t)$ и соотношения $P^{(X_k,W_k,B_k^H)}=P^{(\bar{X}_k,\bar{W}_k,\bar{B}_k^H)}$ вытекает, что с вероятностью 1 для любых $t\geq 0$, $k\in N$ справедливо равенство

$$\bar{X}_k(t)=\bar{X}_k(0)+\int_0^t f_k(s,\bar{X}_k(s),S_s\bar{X}_k)ds+\int_0^t g_k(s,\bar{X}_k(s),S_s\bar{X}_k)d\bar{W}_k(s)+$$
$$+\int_0^t b(s,\bar{X}_k(s),T_s\bar{X}_k)d\bar{B}_k^H(s). \tag{8}$$

Возьмем произвольное $t\in R_+$. Из доказательства леммы 2 [14] и лемм 1, 2 вытекают соотношения

$$\lim_{k\to\infty}E\left(\int_0^t|f_k\left(s,\bar{X}_k(s),S_s\bar{X}_k\right)-f\left(s,\bar{X}(s),S_s\bar{X}\right)|\,ds\right)=0, \tag{9}$$

$$\lim_{k\to\infty}E\left(\int_0^t|g_k\left(s,\bar{X}_k(s),S_s\bar{X}_k\right)-g\left(s,\bar{X}(s),S_s\bar{X}\right)|^2\,ds\right)=0. \tag{10}$$

Из равенства (10) предложения 1.39 [11] вытекает, что для любого $t\in R_+$ выполняется соотношение

$$\lim_{k\to\infty}E\left|\int_0^t g_k\left(s,\bar{X}_k(s),S_s\bar{X}_k\right)d\bar{W}_k(s)-\int_0^t g\left(s,\bar{X}(s),S_s\bar{X}\right)d\bar{W}(s)\right|^2=0. \tag{11}$$

Кроме того, из доказательства леммы 5 работы [13] следует, что с вероятностью 1 для любого $t\in R_+$ имеет место сходимость

$$\int_0^t b\left(s,\bar X_k(s),T_s\bar X_k\right)d\bar B_k^H(s)\underset{k\to\infty}{\to}\int_0^t \bar b\left(s,\bar X(s),T_s\bar X\right)d\bar B^H(s). \tag{12}$$

Из соотношений (8), (9), (11), (12) и сходимости $\bar X_k \underset{k\to\infty}{\to} \bar X$ в $C(R_+,R^d)$ п.н. вытекает, что с вероятностью 1 для всех $t\in R_+$ выполняется равенство

$$\bar X(t)=\bar X(0)+\int_0^t f\left(s,\bar X(s),S_s\bar X\right)ds+\int_0^t g\left(s,\bar X(s),S_s\bar X\right)d\bar W(s)+\int_0^t b\left(s,\bar X(s),T_s\bar X\right)d\bar B^H(s).$$

Таким образом, $\bar X(t)$ – слабое решение уравнения (1) с начальным распределением ν, непрерывными по Гёльдеру с показателем η траекториями и бесконечным моментом взрыва п.н. Лемма 3 доказана.

Т е о р е м а 2. *Пусть функции $f(t,X,\varphi)$, $g(t,X,\varphi)$ измеримы по Борелю и локально ограничены, компоненты функций $f(t,X,\varphi)$, $\sigma(t,X,\varphi)$ удовлетворяют условиям A и B, функция $b(t,X,\varphi_1)$ удовлетворяет (δ,ρ)-локальному условию Гёльдера, $\delta>1-H$, $\rho>2-2H$, тогда для любой заданной на $\left(C^{1/2}[-h,0],\beta(C^{1/2}[-h,0])\right)$ вероятностной меры ν и любого $\eta\in(0,1/2)$ уравнение* (1) *имеет слабое решение $X(t)$ с начальным распределением ν и непрерывными по Гёльдеру с показателем η траекториями.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для каждого натурального n построим матрицы f_n, g_n, b_n следующим образом: пусть $\sigma_n=T\Lambda_nT^{\mathrm T}$, где

$$\Lambda_n=\operatorname{diag}((\lambda_1+1/n)\wedge n,\ldots,(\lambda_d+1/n)\wedge n);$$
$$g_n=T\operatorname{diag}(\sqrt{(\lambda_1+1/n)\wedge n},\ldots,\sqrt{(\lambda_d+1/n)\wedge n});$$
$$f_n=\operatorname{col}(f_n^1,\ldots,f_n^d),\ f_n^i(t,X,\varphi)=(f^i(t,X,\varphi)\vee(-n))\wedge n,\ i\in\{1,\ldots,d\};$$
$$b_n=(b_n^{ij}),\ i=1,\ldots,d,\ j=1,\ldots,r_2,\ b_n^{ij}(t,X,\varphi_1)=(b^{ij}(t,X,\varphi_1)\vee(-n))\wedge n.$$

Для каждого натурального n существует постоянная $\alpha_n>0$, такая, что неравенство $\det g_ng_n^{\mathrm T}(t,X,\varphi)\ge\alpha_n$ выполняется для всех $(t,X,\varphi)\in R_+\times R^d\times E$, кроме того, $\lim_{n\to\infty}f_n(t,X,\varphi)=f(t,X,\varphi)$, $\lim_{n\to\infty}g_n(t,X,\varphi)=g(t,X,\varphi)$ в каждой точке $(t,X,\varphi)\in R_+\times R^d\times E$, $\lim_{n\to\infty}b_n(t,X,\varphi_1)=b(t,X,\varphi_1)$ в каждой точке $(t,X,\varphi_1)\in R_+\times R^d\times R^{kd}$.

Зафиксируем произвольное $\eta\in((1-H)/\rho,1/2)$ и выберем произвольное $\eta_1\in(\eta,1/2)$. По лемме 3 для любого натурального n уравнение

$$dX(t)=f_n(t,X(t),S_tX)dt+g_n(t,X(t),S_tX)dW(t)+b_n(t,X(t),T_tX)dB^H(t)$$

имеет слабое решение $(\Omega_n,\mathcal F_n,P_n,\mathcal F_{n,t},X_n,W_n,B_n^H,\infty)$ с начальным распределением ν и непрерывными по Гёльдеру с показателем η_1 траекториями.

Для каждых натуральных n и m определим случайные величины

$$\tau_n^m=\inf\{t\in R_+\,\|\,X_n(t)|>m\}$$

и случайные процессы

$$X_n^m(t)=X_n(t\wedge\tau_n^m).$$

Из доказательства теоремы 1 получаем, что последовательность

$$\Psi_n=(X_n^m,B_n^H,\tau_n^m)_{m=1}^\infty,\ n\ge1,$$

плотна в пространстве $\mathcal S_\eta$.

По теореме Прохорова из последовательности P^{Ψ_n}, $n\in N$, можно выбрать подпоследовательность $P^{\Psi_{n_k}}$, слабо сходящуюся к некоторой вероятностной мере Θ при $k\to\infty$ (здесь и далее для упрощения обозначений вместо n_k будем снова писать n). Из доказательства теоремы Скорохода следует, что можно построить последовательность случайных величин $\overline{\Psi}_{n_k} = (\overline{X}^m_{n_k}, \overline{B}^H_{n_k}, \overline{\tau}^m_{n_k})^\infty_{m=1}$, $k \in N$, и случайную величину $\overline{\Psi} = (\overline{X}^m, \overline{B}^H, \overline{\tau}^m)^\infty_{m=1}$ на некотором вероятностном пространстве $(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{F}}, \overline{P})$ со значениями в пространстве $\mathcal{S}$ (здесь n_k – некоторая подпоследовательность последовательности натуральных чисел, в дальнейшем вместо n_k будем опять писать n), такие, что выполняются следующие условия:

1) $P^{\Psi_n} = P^{\overline{\Psi}_n}$ для любого $n \in N$; $P^{\overline{\Psi}} = \Theta$; $\overline{\Psi}_n \underset{n\to\infty}{\to} \overline{\Psi}$ в $\mathcal{S}_\eta$ п.н.;

2) $\overline{\tau}^m_n = \inf\{t \in R_+ \,\|\, X^{m'}_n | \geq m\}$ для любых $m' \geq m$; $\overline{X}^m_n(t + \overline{\tau}^m_n) = \overline{X}^m_n(\overline{\tau}^m_n)$ для любых $t \in R_+$, если $\overline{\tau}^m_n < \infty$;

3) $\overline{X}^m(t) = \overline{X}^{m+1}(t)$ при $t \leq \overline{\tau}^m$; $|\overline{X}^m(\overline{\tau}^m)| = m$, если $0 < \overline{\tau}^m < \infty$; $\overline{\tau}^m \leq \overline{\tau}^{m+1}$ для любых натуральных m;

4) процессы $\overline{B}^H_n$ и $\overline{B}^H$ являются дробными броуновскими движениями, измеримыми относительно σ-алгебр $\overline{\mathcal{F}}_{n,0}$ и $\overline{\mathcal{F}}_0$ соответственно, где $\overline{\mathcal{F}}_{n,t} = \mathcal{F}_t((\overline{X}^m_n, \overline{B}^H_n)^\infty_{m=1})$ и $\overline{\mathcal{F}}_t = \mathcal{F}_t((\overline{X}^m, \overline{B}^H)^\infty_{m=1})$.

Пусть $\overline{\tau} = \lim\limits_{m\to\infty} \overline{\tau}^m$, $\overline{X}(t) = \overline{X}^m(t)$ при $t < \overline{\tau}^m$; для $t \geq \overline{\tau}$ положим $\overline{X}(t) = 0$. Случайная величина $\overline{\tau}$ является $\overline{\mathcal{F}}_t$-моментом остановки, процесс $\overline{X}(t)$ является $\overline{\mathcal{F}}_t$-согласованным и имеет непрерывные по Гёльдеру с показателем η траектории на любом отрезке из $[0, \overline{\tau})$ п.н., кроме того, $\limsup\limits_{t\to\overline{\tau}-0} |\overline{X}(t)| = \infty$ при условии $\overline{\tau} < \infty$.

Выберем произвольно: $m, M \in N$, $s, t \in R_+$, $s \leq t$; дважды непрерывно дифференцируемую функцию $h: R^d \to R$, ограниченную вместе с частными производными до второго порядка включительно; непрерывную ограниченную $(\beta_s(C(R_+, R^d)))$-измеримую функцию $q: C(R_+, R^d) \to R$.

Из определения процессов $X^m_n(t)$ и соотношения $P^{\overline{\Psi}_n} = P^{\Psi_n}$ с помощью формулы Ито получаем равенство

$$E_n\Bigg(\Bigg(h(\overline{X}^m_n(t)) - h(\overline{X}^m_n(s)) - \sum_{i=1}^{r_2} \int_{s\wedge\overline{\tau}^m_n}^{t\wedge\overline{\tau}^m_n} b^i_n(\tau, \overline{X}^m_n(\tau), T_\tau \overline{X}^m_n) \frac{\partial h(\overline{X}^m_n(\tau))}{\partial x_i} d\overline{B}^{H,i}_n - \\ - \int_{s\wedge\overline{\tau}^m_n}^{t\wedge\overline{\tau}^m_n} \Bigg(\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} \sigma^{ij}_n(\tau, \overline{X}^m_n(\tau), S_\tau \overline{X}^m_n) \frac{\partial^2 h(\overline{X}^m_n(\tau))}{\partial x_i \partial x_j} + \\ + \sum_{i=1}^{d} f^i_n(\tau, \overline{X}^m_n(\tau), S_\tau \overline{X}^m_n) \frac{\partial h(\overline{X}^m_n(\tau))}{\partial x_i}\Bigg) d\tau\Bigg) q(\overline{X}^M_n)\Bigg) = 0. \tag{13}$$

Из доказательства леммы 2 [14], доказательства леммы 5 работы [13], лемм 1, 2 и соотношения (13) вытекает равенство

$$E\Bigg(\Bigg(h(\overline{X}^m(t)) - h(\overline{X}^m(s)) - \sum_{i=1}^{r_2} \int_{s\wedge\overline{\tau}^m}^{t\wedge\overline{\tau}^m} b^i(\tau, \overline{X}^m(\tau), T_\tau \overline{X}^m) \frac{\partial h(\overline{X}^m(\tau))}{\partial x_i} d\overline{B}^{H,i} - \\ - \int_{s\wedge\overline{\tau}^m}^{t\wedge\overline{\tau}^m} \Bigg(\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} \sigma^{ij}(\tau, \overline{X}^m(\tau), S_\tau \overline{X}^m) \frac{\partial^2 h(\overline{X}^m(\tau))}{\partial x_i \partial x_j} + \\ + \sum_{i=1}^{d} f^i(\tau, \overline{X}^m(\tau), S_\tau \overline{X}^m) \frac{\partial h(\overline{X}^m(\tau))}{\partial x_i}\Bigg) d\tau\Bigg) q(\overline{X}^M)\Bigg) = 0. \tag{14}$$

Из равенства (14) следует, что для любого натурального m процесс

$$h(\overline{X}^m(t)) - h(\overline{X}^m(s)) - \sum_{i=1}^{r_2} \int_{s\wedge\overline{\tau}^m}^{t\wedge\overline{\tau}^m} b^i(\tau, \overline{X}^m(\tau), T_\tau \overline{X}^m) \frac{\partial h(\overline{X}^m(\tau))}{\partial x_i} d\overline{B}^{H,i} -$$

$$-\int\limits_{s\wedge\bar{\tau}^m}^{t\wedge\bar{\tau}^m}\left(\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d}\sigma^{ij}(\tau,\bar{X}^m(\tau),S_\tau\bar{X}^m)\frac{\partial^2 h(\bar{X}^m(\tau))}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{d}f^i(\tau,\bar{X}^m(\tau),S_\tau\bar{X}^m)\frac{\partial h(\bar{X}^m(\tau))}{\partial x_i}\right)d\tau$$

является $\bar{\mathcal{F}}_t$-мартингалом.

Из предложения 1.38 [11] следует, что на расширении вероятностного пространства $(\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{F}},\tilde{P})$ с потоком $\tilde{\mathcal{F}}_t$ вероятностного пространства $(\bar{\Omega},\bar{\mathcal{F}},\bar{P})$ с потоком $\bar{\mathcal{F}}_t$ можно определить $\tilde{\mathcal{F}}_t$-броуновское движение $\tilde{W}(t)$, $\tilde{\mathcal{F}}_0$-измеримое дробное броуновское движение $\tilde{B}(t)$, $\tilde{\mathcal{F}}_t$-согласованный процесс $\tilde{X}(t)$, $\tilde{\mathcal{F}}_t$-момент остановки $\tilde{\tau}$, такие, что процесс $\tilde{X}(t)$ имеет непрерывные по Гёльдеру с показателем η траектории на любом отрезке из $[0,\tilde{\tau})$ п.н., $\limsup\limits_{t\to\tilde{\tau}-0}|\tilde{X}(t)|=\infty$ при $\tilde{\tau}<\infty$ и с вероятностью 1 для всех $t\in[0,\tilde{\tau})$ выполняется соотношение

$$\tilde{X}(t)=\tilde{X}(0)+\int\limits_0^t f(s,\tilde{X}(s),S_s\tilde{X})ds+\int\limits_0^t g(s,\tilde{X}(s),S_s\tilde{X})d\tilde{W}(s)+\int\limits_0^t \sigma(s,\tilde{X}(s),T_s\tilde{X})d\tilde{B}^H(s).$$

Таким образом, $\tilde{X}(t)$ – слабое решение уравнения (1) с начальным распределением ν и непрерывными по Гёльдеру с показателем η траекториями. Теорема доказана.

П р и м е р 1. Рассмотрим систему стохастических дифференциально-функциональных уравнений

$$dx_1(t)=\left(h(x_1(t))+tx_2^2(t)+\int\limits_{-1}^{0}x_1(t+\tau)d\tau\right)dt+h(x_2(t))dW_1(t)+x_1^2(t-1)dB_1^H(t),$$
$$dx_2(t)=h(x_2(t)+1)dt+x_2(t)dW_1(t), \quad (15)$$

где $h(x)=1$ при $x\geq 0$, $h(x)=-1$ при $x<0$.

Рассмотрим функцию f. Первая компонента $f^1(t,x_1,x_2,\varphi_2)=h(x_1)+tx_2^2+\int\limits_{-1}^{0}\varphi_2(\tau)d\tau$ непрерывна по переменным (x_2,φ_2) при каждых фиксированных (t,x_1). Возьмем первую строку матрицы g, видим, что множество $G(1)$ пусто. Функция $f^2(t,x_1,x_2)=h(x_2+1)$ непрерывна по переменной x_1 при каждых фиксированных (t,x_2). Возьмем вторую строку матрицы g, находим, что $G(2)=\{(t,x_2)\,|\,x_2=0\}$. Множество $\{(t,x_1,0)\}$ содержится во множестве точек непрерывности отображения f^2. Следовательно, компоненты функции f удовлетворяет условию A. Функция σ непрерывна, поэтому компоненты функции σ удовлетворяют условию A. По теореме 2 для любой заданной на $(C^{1/2}[-1,0],\beta(C^{1/2}[-1,0]))$ вероятностной меры ν система (15) имеет слабое решение с начальным распределением ν.

П р и м е р 2. Рассмотрим систему стохастических дифференциальных уравнений

$$dx_1(t)=(\operatorname{sgn}x_1(t)+x_2(t-1))dt+dW_1(t)+dB_1^H(t),$$
$$dx_2(t)=(1-2\operatorname{sgn}x_2(t))dt. \quad (16)$$

Функция $f^2(t,x_1,x_2)=1-2\operatorname{sgn}x_2$ не удовлетворяет условию A, так как $G(2)=R_+\times R, G(1,2)=R_+\times R^2$, а функция $f^2(t,x_1,x_2)$ не является непрерывной на $R_+\times R^2$. Следовательно, теорема 2 не применима к системе (16). Легко видеть, что система (16) не имеет слабых решений с начальным условием $x_1(t)=x_2(t)=0$, $t\in[-1,0]$. Тем не менее, согласно теореме 1, уравнение (16) имеет β-слабое решение с любым наперед заданным начальным распределением ν.

П р и м е р 3. Рассмотрим одномерное стохастическое дифференциальное уравнение

$$dx(t)=f(x_t)dt+dW(t)+dB^H(t), \quad (17)$$

где $x_t=\{x(t+\tau)\,|\,-1\leq\tau\leq 0\}\in C([-1,0],R)$ функция $f:C([-1,0],R)\to[0,1]$ такова, что f непрерывна и $f(a_n(\cdot))=1$, $f(b_n(\cdot))=0$ $\forall n\in N$, $a_n(t)=(1+t)^{2n}$, $b_n(t)=(1+t)^{2n-1}$ (существование такой функции вытекает из [16, с. 173]). Поскольку функция f не удовлетворяет условию B, то теорема 2 не применима к уравнению (17). Тем не менее, согласно следствию, уравнение (17) имеет слабое решение с любым наперед заданным начальным распределением ν и бесконечным моментом взрыва.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (грант Ф14М-020).

Литература

1. *Ito K., Nisio M.* // J. Math. 1967. Vol. 11, N 5. P. 117–174.
2. *Крылов Н. В.* Управляемые процессы диффузионного типа. М., 1977.
3. *Nisio M.* // Osaka J. Math. 1973. Vol. 10, N 1. P. 185–208.
4. *Веретенников А. Ю.* // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1983. Т. 47, № 1. С. 188–196.
5. *Rozkosz A., Slominski L.* // Stochastic Processes and their Applications. 1997. Vol. 68. P. 285–302.
6. *Леваков А. А., Васьковский М. М.* // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43, № 8. С. 1029–1042.
7. *Kurenok V. P., Lepeyev A. N.* // Rocky Mountain J. Math. 2008. Vol. 38, N 1. P. 139–174.
8. *Леваков А. А.* // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33, № 2. С. 212–220.
9. *Aubin J. P., Da Prato G.* // Stochastic Analysis and Appl. 1998. Vol. 16. P. 1–15.
10. *Леваков А. А., Васьковский М. М.* // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43, № 10. С. 1324–1333.
11. *Леваков А. А.* Стохастические дифференциальные уравнения. Минск, 2009.
12. *Васьковский М. М.* // Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. 2008. № 1. С. 64–70.
13. *Леваков А. А., Васьковский М. М.* // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50, № 2. С. 187–200.
14. *Леваков А. А., Васьковский М. М.* // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50, № 8. С. 1060–1076.
15. *Ватанабэ С., Икэда Н.* Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М., 1986.
16. *Александров П. С.* Введение в теорию множеств и общую топологию. М., 1977.

M. M. VASKOUSKI

EXISTENCE OF WEAK SOLUTIONS OF STOCHASTIC DELAY DIFFERENTIAL EQUATIONS DRIVEN BY STANDARD AND FRACTIONAL BROWNIAN MOTIONS

Summary

In the article, the Krylov type estimates are obtained for the functional of solutions to stochastic delay differential equations driven by standard and fractional Brownian motions. Main ideas to obtain these estimates are to use the Nualart type estimates for the pathwise integral with respect to fractional Brownian motions and to use Krylov's methods for Ito's equations. With the help of the obtained estimates and basing on the Skorokhod and Prokhorov theorems, we have found sufficient conditions of existence of weak solutions of stochastic delay differential equations driven by standard and fractional Brownian motions with discontinuous right-hand sides and with a degenerate diffusion operator.

.