

МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

УДК 517.925.42

Поступила в редакцию 27.10.2016

Received 27.10.2016

А. А. Гринь, А. В. Кузьмич

Гродненский государственный университет им. Янки Купалы, Гродно, Беларусь

**ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ ЧИСЛА ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ
С ТРЕМЯ ТОЧКАМИ ПОКОЯ НА ПЛОСКОСТИ**

Для автономных систем с гладкими правыми частями рассматривается задача точной нелокальной оценки числа предельных циклов в односвязной области вещественной фазовой плоскости, содержащей три простые точки покоя с суммарным индексом Пуанкаре +1. Для решения указанной задачи последовательно строятся две функции Дюлака – Черкаса, с помощью которых находятся замкнутые трансверсальные кривые, разбивающие односвязную область на односвязные, двусвязные и, возможно, одну трехсвязную подобласть. Эффективность разработанного подхода продемонстрирована на примерах полиномиальных систем Льенара, для которых доказано существование в каждой из двусвязных подобластей точно одного предельного цикла, в трехсвязной – точно двух предельных циклов. Установлены конфигурации этих предельных циклов. Полученные результаты могут быть применены в качественной теории и теории бифуркаций обыкновенных дифференциальных уравнений, а также в теории нелинейных колебаний.

Ключевые слова: система Льенара, функция Дюлака – Черкаса, 16-я проблема Гильберта, предельный цикл.

A. A. Grin, A. V. Kuzmich

Yanka Kupala State University of Grodno, Grodno, Belarus

**PRECISE ESTIMATIONS OF LIMIT CYCLES NUMBER OF AUTONOMOUS SYSTEMS
WITH THREE EQUILIBRIUM POINTS IN THE PLANE**

For autonomous systems with smooth right sides the problem of precise non-local estimation of the limit cycles number is considered in a simply-connected domain of a real phase plane containing three equilibrium points with a total Poincaré index +1. To solve this problem, we are constructing successively two Dulac-Cherkas functions which provide the closed transversal curves decomposing the simply-connected domain in simply-connected subdomains, doubly-connected subdomains, and possibly a three-connected subdomain. The efficiency of the developed approach is demonstrated by the examples of the polynomial Liénard systems, for which it is proved that there exist a limit cycle in each of the doubly-connected subdomains and two limit cycles in the three-connected subdomain. We determine the configurations of these limit cycles. The obtained results can be applied in the qualitative theory and in the theory of bifurcations of ordinary differential equations, as well as in the theory of nonlinear oscillations.

Keywords: Liénard system, Dulac-Cherkas function, 16th Hilbert problem, limit cycle.

Введение. Рассмотрим автономную систему на вещественной плоскости

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Q(x, y), \quad (1)$$

где $P(x, y)$, $Q(x, y)$ – непрерывно дифференцируемые по двум вещественным переменным функции. Одним из методов, позволяющим получить нелокальное решение проблемы оценки числа и локализации предельных циклов [1] системы (1), является признак Дюлака [2–4], усовершенствованный Л. А. Черкасом. При таком подходе, называемом признаком Дюлака – Черкаса,

трансверсальные кривые, соответствующие функции Дюлака, позволяют находить верхнюю оценку числа предельных циклов системы (1) в связной области Ω [5–9]. Для получения точной оценки числа предельных циклов необходимо проводить дополнительные исследования, например точек покоя в бесконечности, что возможно лишь в отдельных случаях. Поэтому целью настоящей работы является разработка способа для получения точной нелокальной оценки числа и локализации предельных циклов в односвязной области Ω , где система (1) имеет три точки покоя: седло и два антиседла. Предлагаемый нами способ основан на последовательном построении двух функций Дюлака – Черкаса, которые используются для нахождения замкнутых трансверсальных кривых, окружающих одну или три точки покоя и разбивающих область Ω на односвязные, двусвязные и, возможно, одну трехсвязную подобласти. Разработанный подход эффективно применен к полиномиальным системам Лянара, для которых доказано, что в каждой двусвязной подобласти имеется точно один предельный цикл, а в трехсвязной – два предельных цикла, определена их конфигурация.

1. Предварительные сведения. Усовершенствованный подход Л. А. Черкаса к признаку Дюлака основан на нахождении функции Дюлака – Черкаса $\Psi \in C^1(\Omega, R)$ [6, с. 199] в области Ω , и действительного числа $k \neq 0$ так, чтобы выполнялось условие

$$\Phi(x, y) = k\Psi \operatorname{div} X + \frac{\partial \Psi}{\partial x} P + \frac{\partial \Psi}{\partial y} Q > 0 (< 0), \quad \forall (x, y) \in \Omega \subset R^2, \quad (2)$$

где $X = (P, Q)$ — векторное поле, определяемое системой (1). В условии (2) обычно допускается [2–6], что функция Φ может принимать нулевое значение в области Ω на множестве меры нуль, но никакая замкнутая кривая этого множества не является предельным циклом системы (1).

З а м е ч а н и е 1. Если Ψ представляет собой функцию Дюлака – Черкаса системы (1) в области Ω , то из соотношения (2) вытекает, что $B = |\Psi|^{\frac{1}{k}}$ является функцией Дюлака в каждой подобласти Ω , где $\Psi > 0 (< 0)$, и любой предельный цикл Γ системы (1), существующий в Ω , является грубым и устойчивым (неустойчивым) при выполнении на нем условия

$$\int_{\Gamma} \operatorname{div} X dt = \int_{\Gamma} \frac{1}{k\Psi} \left(\Phi - \frac{d\Psi}{dt} \right) dt = \int_{\Gamma} \frac{\Phi}{k\Psi} dt < 0 (> 0). \quad (3)$$

При этом локализация предельных циклов в области Ω проводится с помощью трансверсальной кривой

$$W = \{(x, y) \in \Omega : \Psi(x, y) = 0\},$$

которая не может пересекаться предельными циклами системы (1). Соотношение (3) также определяет характер устойчивости точек покоя в каждой подобласти Ω , где $\Psi > 0 (< 0)$.

Т е о р е м а 1 (Признак Дюлака – Черкаса) [6]. Пусть Ω является p -связной областью, где Ψ представляет функцию Дюлака – Черкаса системы (1) в Ω такую, что кривая W состоит из s овалов в Ω . Тогда система (1) имеет не более $p - 1 + s$ предельных циклов в Ω .

То есть в каждой m -связной подобласти $\tilde{\Omega}$ из Ω с границей $\partial \tilde{\Omega} \subset W \cup \partial \Omega$ число предельных циклов не превосходит $m - 1$. В случае односвязной области Ω с единственной точкой покоя – антиседлом – теорема 1 может быть сформулирована в следующем виде [6].

Т е о р е м а 2. Пусть в односвязной области Ω система (1) имеет единственную точку покоя O , являющуюся антиседлом, а Ψ представляет собой функцию Дюлака – Черкаса системы (1) при $k < 0$. Если в области Ω кривая W состоит из s вложенных друг в друга овалов ω_i , окружающих точку O , то в каждой из $s - 1$ кольцеобразных подобластей Ω_i , ограниченных соседними овалами ω_i и ω_{i+1} , система (1) имеет точно один предельный цикл, а в целом она может иметь в области Ω не более s предельных циклов.

2. Основные результаты. Уточним признак Дюлака – Черкаса для области Ω , где система (1) имеет три точки покоя: седло и два антиседла (рис. 1).

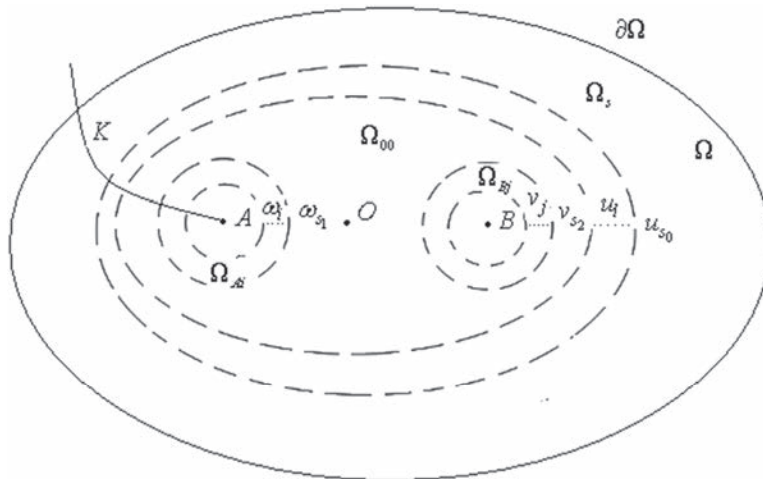


Рис. 1. Расположение точек покоя и овалов кривой W в области Ω
 Fig. 1. Location of the equilibrium points and ovals of curve W in domain Ω

Т е о р е м а 3. Пусть в односвязной области Ω система (1) имеет три точки покоя: два антиседла A и B , и одно седло O , а функция Ψ представляет собой функцию Дюлака – Черкаса системы (1) при $k < 0$. Если в области Ω кривая W состоит из:

- $s_1 \neq 0$ вложенных друг в друга овалов ω_i , окружающих только антиседло A ,
- $s_2 \neq 0$ вложенных друг в друга овалов ν_j , окружающих только антиседло B ,
- $s_0 \neq 0$ вложенных друг в друга овалов u_l , окружающих всю группу точек,

то

1) в каждой из $s_1 - 1$ кольцеобразных подобластей Ω_{Ai} , ограниченных соседними овалами ω_i и ω_{i+1} , в каждой из $s_2 - 1$ кольцеобразных подобластей Ω_{Bj} , ограниченных соседними овалами ν_j и ν_{j+1} , а также в каждой из $s_0 - 1$ кольцеобразных подобластей Ω_{li} , ограниченных соседними овалами u_l и u_{l+1} , система (1) имеет точно один предельный цикл;

2) в трехсвязной подобласти Ω_{00} , ограниченной внешними овалами ω_{s_1}, ν_{s_2} и внутренним овалом u_1 , у системы (1) может быть одна замкнутая траектория, окружающая все три точки покоя A, B, O , или две замкнутые траектории, имеющие одинаковый характер устойчивости, по одной вокруг каждого антиседла A и B ;

3) в целом система (1) может иметь в области Ω не более $s = s_1 + s_2 + s_0$ предельных циклов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Не теряя общности, будем считать, что в условии (2) выполняется соотношение $\Phi > 0$ в области Ω . Для доказательства первого утверждения теоремы воспользуемся принципом кольца Бендиксона. Для этого на кривой K , выходящей из точки A и пересекающей трансверсально овалы ω_i кривой $\Psi = 0$, окружающие точку A , выберем параметризацию с параметром τ . Тогда функция $\Psi(x, y)$ на кривой K является функцией $\varphi(\tau)$, имеющей простые нули $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{s_1}$, которые соответствуют точкам пересечения кривой K с овалами ω_i . Это означает, что функция $\varphi(\tau)$ меняет знак при переходе через каждый нуль $\tau_i, i = 1, \dots, s_1$. Тогда линии уровня $\Psi(x, y) = C$ в окрестности границы каждой кольцеобразной области Ω_{Ai} , заключенной между соседними овалами ω_i , будут иметь меньший (большой) уровень при $\varphi(\tau) < 0$ ($\varphi(\tau) > 0$)

в рассматриваемой области. Из условия $\Phi > 0$ имеем, что производная $\frac{d\Psi}{dt}$ функции Ψ в силу системы на каждом овале ω_i положительна. Следовательно, траектории системы при увеличении времени пересекают границу каждой подобласти Ω_{Ai} между двумя соседними овалами ω_i изнутри вовне при $\varphi(\tau) < 0$ и извне вовнутрь области при $\varphi(\tau) > 0$. Это доказывает существование предельного цикла в каждой рассматриваемой двусвязной подобласти Ω_{Ai} по принципу кольца. Аналогично доказывается существование предельных циклов в кольцеобразных подобластях Ω_{Bj} , окружающих точку B , а также в кольцеобразных подобластях Ω_{li} , окружающих все три точки покоя.

Теперь докажем второе утверждение теоремы. В трехсвязной подобласти Ω_{00} согласно классическому признаку Дюлака может существовать не более двух замкнутых траекторий. Теория Пуанкаре – Бендиксона [2] допускает следующие случаи существования предельных циклов:

- 1) в подобласти Ω_{00} нет замкнутых траекторий;
- 2) существует одна замкнутая траектория, окружающая только точку A или только точку B ;
- 3) существует одна замкнутая траектория, окружающая одновременно все три точки покоя A, O, B ;
- 4) существуют две вложенные друг в друга замкнутые траектории, окружающие только точку A или только точку B ;
- 5) существуют две вложенные друг в друга замкнутые траектории, окружающие одновременно все три точки покоя A, O, B ;
- 6) существуют две замкнутые траектории, одна из которых окружает только точку A или только точку B , а вторая траектория окружает одновременно все три точки покоя A, O, B , а также первую замкнутую траекторию;
- 7) существуют две замкнутые траектории, одна из которых окружает только точку A , а вторая траектория окружает только точку B .

Теперь рассмотрим влияние функции $\Psi(x, y)$, используя соотношение (3), на возможность реализации вышеперечисленных случаев, учитывая, что овалы ω_{s1} , ν_{s2} и u_1 как границы подобласти Ω_{00} при $t \rightarrow +\infty$ пересекаются траекториями системы только изнутри вовне (только извне вовнутрь) если $\Psi > 0$ ($\Psi < 0$) в подобласти Ω_{00} . Не теряя общности, будем полагать, что $\Psi < 0$ в Ω_{00} , тогда траектории системы могут пересекать овалы ω_{s1} , ν_{s2} и u_1 только трансверсально изнутри вовне, а любая особая траектория в подобласти Ω_{00} должна быть неустойчивой.

Существование функции Дюлака – Черкаса приводит к противоречию с фактами классической качественной теории при рассмотрении случаев 1, 2, 4–6, что исключает описанные в них расположения предельных циклов. А именно, согласно теории Пуанкаре – Бендиксона [2] обе ω -сепаратрисы седла O должны или приходить в подобласть Ω_{00} извне при $t \rightarrow +\infty$ или стремиться к неустойчивой особой траектории при $t \rightarrow -\infty$. В случае 1 существование функции Ψ исключает такую возможность для обеих ω -сепаратрис. В случае 2 существование функции Ψ исключает такую возможность для одной из двух ω -сепаратрис.

Предположим, что выполняется один из случаев 4–6. Тогда в силу соотношения (3) обе замкнутые траектории должны быть неустойчивыми, из чего следует, что между ними должна существовать еще устойчивая замкнутая траектория. Но это невозможно, поскольку в трехсвязной подобласти Ω_{00} не может быть более двух замкнутых траекторий.

В случаях 3 и 7 противоречий нет, и возможные фазовые портреты представлены на рис. 2 и 3 (A, B) соответственно, где предельные циклы изображены сплошной линией. В случае 7 движение изображающей точки на двух предельных циклах при $t \rightarrow +\infty$ может проходить как в одном направлении (рис. 3, A), так и в противоположных направлениях (рис. 3, B).

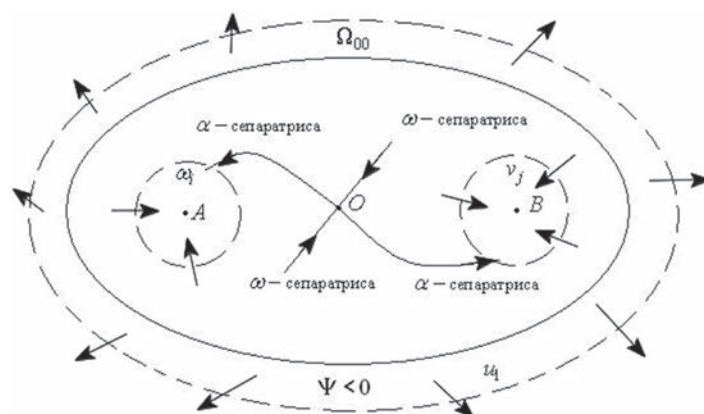


Рис. 2. Фазовый портрет для случая 3 из теоремы 3

Fig 2. Phase portrait for case 3 from theorem 3

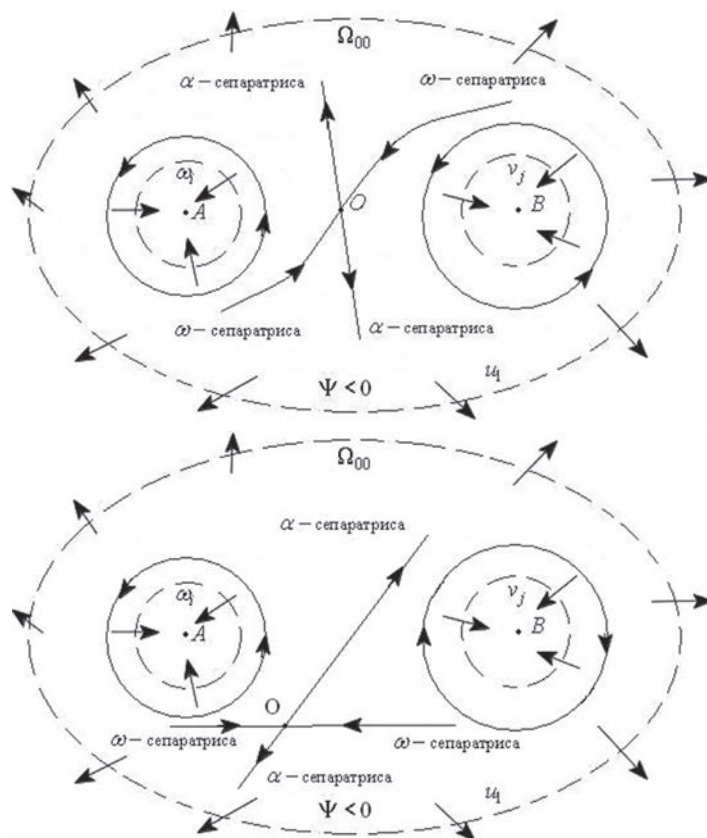


Рис. 3. Фазовые портреты для случая 7 из теоремы 3

Fig 3. Phase portraits for case 7 from theorem 3

Дополнительный предельный цикл может существовать в двусвязной области Ω_s , расположенной между внешним овалом u_{s_0} кривой W и границей $\partial\Omega$ области Ω . Таким образом, в области Ω система (1) имеет $s_1 + s_2 + s_0 - 2$, или $s_1 + s_2 + s_0 - 1$, или $s = s_1 + s_2 + s_0$ предельных циклов.

З а м е ч а н и е 2. Если в условии теоремы 3 кривая W не имеет овалов ω_i , окружающих точку A , т. е. $s_1 = 0$ (или овалов ν_j , окружающих точку B , т. е. $s_2 = 0$), то вместо трехсвязной подобласти Ω_{00} будет двусвязная подобласть Ω_{s_2} (Ω_{s_1}), в которой система (1) имеет точно один предельный цикл, окружающий только точку B (или только точку A).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для определенности будем полагать, что в подобласти Ω_{s_2} (Ω_{s_1}) выполняются условия $\Phi > 0$, $\Psi < 0$. Теория Пуанкаре – Бендиксона для системы (1) в двусвязной подобласти Ω_{s_2} (Ω_{s_1}) допускает следующие случаи:

- 1) нет замкнутых траекторий;
- 2) существует замкнутая траектория, окружающая все три точки покоя A , O , B ;
- 3) существует замкнутая траектория, окружающая только точку покоя B (A).

В первом случае обе ω -сепаратрисы седла O должны или приходить в подобласть Ω_{s_2} (Ω_{s_1}) извне при $t \rightarrow +\infty$, или стремиться к неустойчивой особой траектории при $t \rightarrow -\infty$. Существование функции Ψ исключает такую возможность для одной из ω -сепаратрис. Во втором случае две α -сепаратрисы при $t \rightarrow +\infty$ должны или покидать подобласть Ω_{s_2} (Ω_{s_1}) или стремиться к устойчивой особой траектории. Существование функции Ψ делает это невозможным для одной из α -сепаратрис. В третьем случае противоречия нет.

Однако теорема 3 не дает точной оценки числа предельных циклов системы (1), поскольку для выяснения вопроса о существовании или отсутствии предельного цикла во внешней двусвязной подобласти Ω_s нужно провести дополнительные исследования и определить влияние других особых траекторий, расположенных вне области Ω , или построить дополнительную трансверсальную замкнутую кривую, охватывающую внешний овал u_{s_0} . Также дополнительные

исследования нужно провести в трехсвязной подобласти Ω_{00} , чтобы выяснить, какой из случаев – 3 или 7 имеет место в конкретной ситуации.

Рассмотрим теперь в условиях теоремы 3 способ определения точного числа предельных циклов системы (1) в двусвязной подобласти Ω_s , который основан на построении в ней замкнутой трансверсальной кривой, охватывающей внешний овал u_{s_0} , за счет нахождения в области Ω второй функции Дюлака – Черкаса $\tilde{\Psi}(x, y)$.

Т е о р е м а 4. Пусть выполняются условия теоремы 3 и дополнительно для системы (1) в области Ω существует функция Дюлака – Черкаса $\tilde{\Psi}(x, y)$ при $\tilde{k} < 0$ такая, что кривая $\tilde{W}$ состоит из $s_0 + 1$ овала $\tilde{u}_l$ в Ω , окружающих все три точки покоя A, B, O , причем внешний овал $\tilde{u}_{s_0+1}$ окружает внешний овал u_{s_0} кривой W . Тогда система (1) в области Ω имеет точно s предельных циклов, окружающих все три точки покоя A, B, O .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Существование функции Дюлака – Черкаса $\Psi(x, y)$, определяющей в области Ω s_0 овалов, окружающих все три точки покоя A, B, O , в силу теоремы 2 доказывает наличие у системы (1) $s_0 - 1$ предельных циклов в кольцеобразных областях Ω_l , $l = 1, \dots, s_0 - 1$, границами которых являются соседние овалы u_l и u_{l+1} , а также дает возможность для существования одного предельного цикла в двусвязной подобласти Ω_s . Существование второй функции Дюлака – Черкаса $\tilde{\Psi}(x, y)$, определяющей в области Ω $s_0 + 1$ овалов, окружающих все три точки покоя A, B, O , в силу теоремы 2 доказывает наличие у системы (1) s_0 предельных циклов в кольцеобразных областях $\tilde{\Omega}_l$, $l = 1, \dots, s_0$, границами которых являются соседние овалы $\tilde{u}_l$ и $\tilde{u}_{l+1}$ кривой $\tilde{W}$, а также дает возможность для существования одного предельного цикла в подобласти $\tilde{\Omega}_{s+1}$, расположенной между внешним овалом $\tilde{u}_{s_0+1}$ кривой $\tilde{W}$ и границей $\partial\Omega$ области Ω . Одновременное существование функций Ψ и $\tilde{\Psi}$ гарантирует наличие одного предельного цикла в подобласти $\Omega_s \setminus \tilde{\Omega}_{s+1}$ и исключает возможность существования предельного цикла в подобласти $\tilde{\Omega}_{s+1}$. Это доказывает, что система (1) в области Ω имеет ровно s_0 предельных циклов, охватывающих все три точки покоя A, B, O .

3. Построение функции Дюлака – Черкаса. В монографии [6] представлены различные приемы построения функции Дюлака – Черкаса, позволяющей получить оценки числа предельных циклов с помощью применения теорем 1 и 2. В частности, если функцию $\Psi(x, y)$ искать в виде

$$\Psi = \Psi(x, y, C) = \sum_{j=1}^n C_j \Psi_j(x, y), \quad C = (C_1, \dots, C_n), \quad (4)$$

где C_j – вещественные константы, то функция Φ из условия (2) также будет являться линейной комбинацией известных функций $\Phi_j(x, y)$ с теми же коэффициентами

$$\Phi = \Phi(x, y, C) = \sum_{j=1}^n C_j \Phi_j(x, y),$$

положительность которой в ограниченной области Ω при условии $\|C\|^2 = \sum_{j=1}^n C_j^2$ равносильна следующей сеточной задаче линейного программирования:

$$L \rightarrow \max, \sum_{j=1}^n C_j \Phi_j(x_q, y_q) - L \geq 0, |C_j| \leq 1, L \in R \quad (5)$$

на сетке узлов (x_q, y_q) , $q = 1, \dots, N_0$, взятой в области Ω , $N_0 = n_x \cdot n_y$, где n_x, n_y – число узлов сетки вдоль осей Ox и Oy соответственно. Задача (5) является задачей линейного программирования с переменными C_j , $j = \overline{1, n}$, и L . Пусть $C^* = (C_1^*, C_2^*, \dots, C_n^*), L^*$ – решение задачи (5), в котором $L^* > 0$. Выбор чисел n, k и N_0 производится экспериментально и зависит от вида правых частей системы (1), а также от размера области Ω . После решения задачи (5) средствами анализа строго проверяем, что найденная функция Ψ действительно удовлетворяет неравенству (2) в области Ω .

В ограниченной области Ω функцию $\tilde{\Psi}(x, y)$ также можно искать с помощью редукции к сеточной задаче линейного программирования, аналогичной задаче (5):

$$\tilde{L} \rightarrow \max, \sum_{j=1}^{\tilde{n}} \tilde{C}_j \tilde{\Phi}_j(x_{\tilde{q}}, y_{\tilde{q}}) - \tilde{L} \geq 0, |\tilde{C}_j| \leq 1, \tilde{L} \in R, \tilde{C} = (\tilde{C}_1, \dots, \tilde{C}_{\tilde{n}}) \quad (6)$$

на сетке узлов $(x_{\tilde{q}}, y_{\tilde{q}})$, $\tilde{q} = 1, \dots, \tilde{N}_0$, взятой в области Ω , где $\tilde{N}_0 = \tilde{n}_x \cdot \tilde{n}_y$, $\tilde{\Phi} = \sum_{j=1}^{\tilde{n}} \tilde{C}_j \tilde{\Phi}_j$.

Функцию Дюлака – Черкаса $\Psi(x, y)$ или $\tilde{\Psi}(x, y)$ для полиномиальных систем (1) удобно искать в виде полинома степени p , где $n = \frac{(p+1)(p+2)}{2}$, в частности

$$\Psi = C_1 + C_2x + C_3y + C_4x^2 + C_5xy + C_6y^2 + \dots + C_ny^p. \quad (7)$$

В случае системы Лъенара

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -g(x) - f(x)y, \quad g(0) = 0, \quad (8)$$

функцию Дюлака – Черкаса Ψ удобно строить с помощью метода сведения функции Φ к функции, зависящей только от одной фазовой переменной [6, с. 229]. Для этого функцию Ψ строим в виде полинома степени $n-1$, $n \geq 3$ относительно фазовой переменной y с коэффициентами, зависящими от переменной x :

$$\Psi = \sum_{i=1}^n \Psi_i(x, C) y^{n-i}, \quad (9)$$

где $C = (C_1, \dots, C_n)$ – константы интегрирования, которые появляются при нахождении функций $\Psi_1 = C_1$, $\Psi_2 = (k+n-1)FC_1 + C_2$, $\Psi_i = \int \Psi'_i(x) dx + C_i$, $i = \overline{3, n}$ за счет интегрирования по x следующих дифференциальных уравнений:

$$\Psi'_1 = 0, \quad \Psi'_2 = (k+n-1)fC_1, \quad F(x) = \int_0^x f(u) du, \quad \Psi'_i = (k+n-i+1)f\Psi_{i-1} + (n-i+2)g\Psi_{i-2}, \quad i = \overline{3, n}.$$

Тогда функция Φ имеет вид $\Phi(x, C)$, и выполнить условие (5) удобно за счет решения задачи линейного программирования

$$L \rightarrow \max, \sum_{i=1}^n C_i \Phi_i(x_l) - L \geq 0, \quad |C| \leq 1, \quad (10)$$

где x_l , $l = \overline{1, N_0}$, являются узлами сетки на отрезке $[x_1, x_{N_0}]$, который соответствует полосе $\Omega_x = \{(x, y) : x \in [x_1, x_{N_0}], y \in R\}$ локализации предельных циклов системы (8).

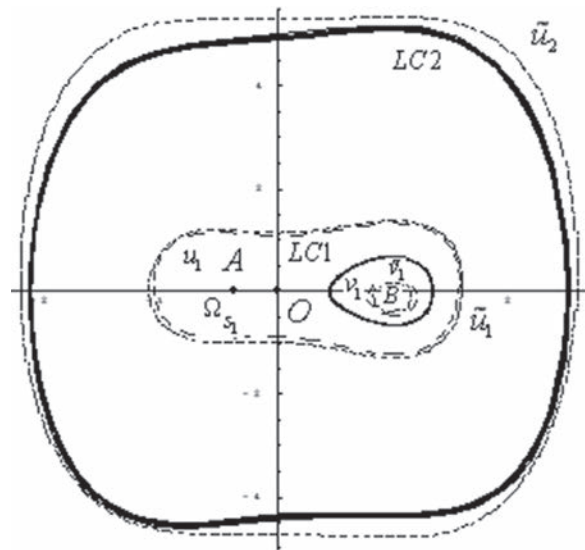
4. Примеры. Покажем теперь практическую эффективность теорем 3 и 4 в некоторых случаях системы Лъенара.

Пример 1. Для системы Лъенара в первой форме

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = x(1-x)(1+2x) - 0.1(-2+x+1.2x^2)y, \quad (11)$$

имеющей в конечной части фазовой плоскости три точки покоя: $A(-0.5; 0)$, $B(1; 0)$ – фокусы и $O(0; 0)$ – седло, с помощью метода сведения функции $\Phi(x, y)$ к функции, зависящей только от одной фазовой переменной, и решения сеточной задачи линейного программирования (10) в полосе $\Omega_x = \{(x, y) : x \in [-1.2; 1.7], y \in R\}$ на равномерной сетке с количеством узлов $N_0 = 150$ построена функция Дюлака – Черкаса $\Psi(x, y)$ вида (9) при $n = 8$, $k = -1.5$. Найденное решение задачи (10) имеет вид

$$C^* = (-0.3739, 0.999812, -0.100051, 0.999812, -0.127654, -0.999812, -0.183349, -0.650099).$$

Рис. 4. Расположение овалов кривых W и $\tilde{W}$, а также предельных циклов системы (11)Fig 4. Location of the ovals of the curves W and $\tilde{W}$, and of the limit cycles of system (11)

При этом в полосе Ω_x выполняется неравенство $\Phi > 0$, и кривая W состоит из двух овалов v_1 и u_1 , окружающих соответственно только точку B и всю группу точек. На рис. 4 эти овалы изображены крупной пунктирной линией. Существование такой функции Ψ означает, что в соответствии с теоремой 3 и замечанием 2 система (11) имеет предельный цикл $LC1$, окружающий только точку B , и может иметь предельный цикл $LC2$, окружающий овал u_1 и вместе с ним все три точки A , B и O . Для проверки существования такого предельного цикла с помощью метода сведения функции $\tilde{\Phi}(x, y)$ к функции, зависящей только от одной фазовой переменной, и решения сеточной задачи линейного программирования (10) в полосе $\tilde{\Omega}_x = \{(x, y) : x \in [-3; 3], y \in \mathbb{R}\}$ на равномерной сетке с количеством узлов $N_0 = 150$ построена вторая функция Дюлака – Черкаса $\tilde{\Psi}(x, y)$ вида (9) при $n = 10$, $k = -1.5$. Найденное решение задачи (10) имеет вид

$$\tilde{C}^* = (0.000887, -0.021562, -0.008507, 0.48476, 0.000132, 0.999796, -0.193633, -0.999796, -0.289041, -0.784093).$$

При этом в полосе $\tilde{\Omega}_x$ выполняется неравенство $\tilde{\Phi} > 0$, и кривая $\tilde{W}$ состоит из трех овалов $\tilde{v}_1, \tilde{u}_1$ и $\tilde{u}_2$. Овал $\tilde{v}_1$ окружает только точку B , а овалы $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2$ – всю группу точек. На рис. 4 эти овалы изображены мелкой пунктирной линией. Таким образом, в соответствии с теоремами 3 и 4 система (11) в полосе $\tilde{\Omega}_x$ имеет точно два предельных цикла: один устойчивый $LC1$, окружающий только точку покоя B , второй неустойчивый $LC2$ – всю группу точек.

Пример 2. Система Лъенара (8) с помощью подстановки $y = u + F(x)$, $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ и переобозначения переменной u на y приводится к второй форме

$$\frac{dx}{dt} = y - F(x), \quad \frac{dy}{dt} = -g(x). \quad (12)$$

Для системы Лъенара (12) в виде

$$\dot{x} = y - (x - 0.351667x^3), \quad \dot{y} = x(1 - x^2), \quad (13)$$

имеющей в конечной части фазовой плоскости три точки покоя: $A(-1; -0.648333)$, $B(1; 0.648333)$ – фокусы и $O(0; 0)$ – седло, с помощью решения сеточной задачи линейного программирования (5) в области $\Omega = \{(x, y) : x \in [-1.7; 1.7], y \in [-1.7; 1.7]\}$ при $n = 153$, $k = -1.2$ на равномерной сетке с количеством узлов $N_0 = 4355$ построена функция Дюлака – Черкаса $\Psi(x, y)$ в виде полинома (7) степени $p = 16$. Найденное решение задачи (5) имеет вид

$$\begin{aligned}
 C^* = & (0.838868, -0.001237, 0.000541, 0.096024, -0.171371, -0.062015, \\
 & 0.001073, 0.001087, 0.004712, -0.004594, -0.171371, -0.171371, 0.035799, \\
 & 0.171371, 0.061481, 0.002786, 0.007066, -0.01711, -0.002555, 0.007576, \\
 & 0.002188, 0.076251, -0.099992, -0.171371, 0.171371, 0.171371, 0.171371, \\
 & -0.171371, -0.007323, -0.019457, 0.017525, 0.002791, 0.00486, 0.003473, \\
 & -0.009928, -0.001725, -0.042819, 0.171371, -0.133172, 0.171371, 0.171371, \\
 & 0.035816, -0.171371, -0.152245, -0.078961, 0.007375, 0.020558, -0.012407, \\
 & 0.005082, -0.002054, -0.011076, -0.001945, 0.009681, -0.000472, 0.002453, \\
 & 0.117375, 0.171371, 0.171371, -0.142911, -0.171371, -0.171371, -0.112638, \\
 & -0.171371, 0.152204, 0.171371, 0.171371, -0.003945, -0.010246, 0.006868, \\
 & -0.006811, -0.002349, 0.005683, 0.004411, -0.002974, 0.003889, -0.008573, \\
 & 0.003169, -0.001614, -0.104607, -0.171371, -0.011977, -0.136675, 0.092708, \\
 & -0.0358, 0.171371, 0.171371, 0.171371, -0.114082, -0.085167, -0.073482, \\
 & -0.105678, 0.001081, 0.002329, -0.002072, 0.002619, 0.000955, -0.000817, \\
 & -0.000935, 0.000434, -0.002821, 0.002986, -0.001665, 0.002552, -0.001183, \\
 & 0.000472, 0.035751, 0.040013, -0.020143, 0.093655, -0.043404, 0.060341, \\
 & -0.079686, 0.028167, -0.122805, -0.007541, -0.062467, 0.086517, 0.020745, \\
 & 0.015762, 0.028252, -0.000117, -0.000189, 0.000233, -0.000313, -0.000081, \\
 & 0.000018, 0.000032, -0.000109, 0.000443, -0.000304, 0.00038, -0.000462, \\
 & 0.000237, -0.000237, 0.000133, -0.000049, -0.004282, -0.00196, 0.003841, \\
 & -0.013182, 0.00725, -0.010039, 0.013859, -0.015645, 0.018638, -0.015645, \\
 & 0.018638, -0.004248, 0.023779, -0.006538, 0.003805, -0.013958, 0.000375, \\
 & -0.001353, -0.003011).
 \end{aligned}$$

При этом в области Ω выполняется неравенство $\Phi > 0$, и кривая W состоит из трех овалов v_1, ω_1 и u_1 , окружающих соответственно только точку A , только точку B и все три точки. На рис. 5 эти овалы изображены мелкой пунктирной линией. Существование такой функции Ψ означает, что в соответствии с теоремой 3 система (13) может иметь два предельных цикла, окружающих овалы v_1, ω_1 , и может иметь предельный цикл, окружающий овал u_1 .

Затем для системы (13), следуя работе И. Н. Сидоренко¹, с помощью метода сведения функции $\tilde{\Phi}(x, y)$ к функции, зависящей только от одной фазовой переменной, и решения сеточной задачи линейного программирования (10) в полосе $\tilde{\Omega}_x = \{(x, y) : x \in [-2.6; 2.6], y \in R\}$ на равномерной сетке с количеством узлов $N_0 = 500$ построена функция Дюлака – Черкаса $\tilde{\Psi}(x, y)$ вида (9) при $n = 9, k = -1$. Найденное решение задачи (10) имеет вид

$$\tilde{C}^* = (0.459621, 0, -0.999774, 0, -0.10952, 0, -0.538428, 0, 0.0190266).$$

При этом в полосе $\tilde{\Omega}_x$ выполняется неравенство $\tilde{\Phi} > 0$, и кривая $\tilde{W}$ состоит из четырех овалов $\tilde{\omega}_1, \tilde{v}_1, \tilde{u}_1$ и $\tilde{u}_2$. Овал $\tilde{\omega}_1$ окружает только точку A , овал $\tilde{v}_1$ – только точку B , а овалы $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2$ – всю группу точек. На рис. 5 эти овалы изображены крупной пунктирной линией. Таким образом, в соответствии с теоремами 3 и 4, а также на основании результатов исследования поведения сепаратрис седла O в подобласти Ω_{00} приходим к выводу, что система (13) в полосе $\tilde{\Omega}_x$ имеет точно три предельных цикла: один устойчивый $LC1$, окружающий только точку покоя A , второй устойчивый $LC2$, окружающий только точку покоя B , третий неустойчивый $LC3$, окружающий всю

¹ Сидоренко И. Н. Предельные циклы «нормального размера» систем Лъенара, квадратичных и кубических систем: дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.01.02. Могилев, 2010. – 100 л.

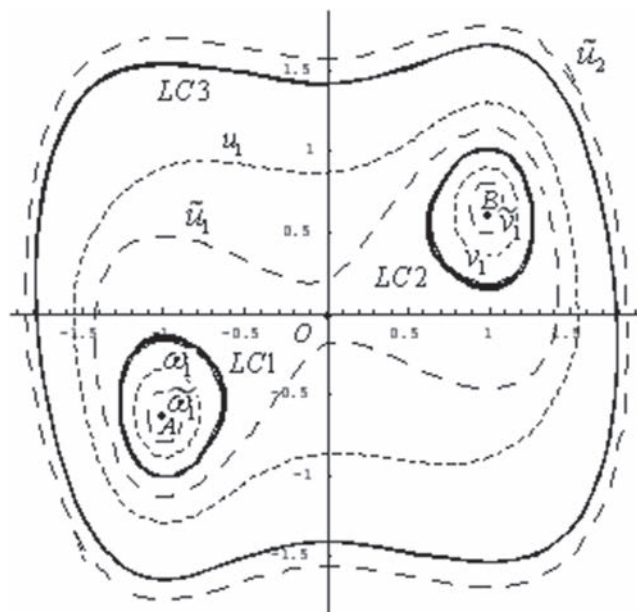


Рис. 5. Расположение овалов кривых W и $\tilde{W}$, а также предельных циклов системы (13)

Fig 5. Location of ovals of the curves W and $\tilde{W}$, and of the limit cycles of system (13)

группу точек. При этом движение изображающей точки на всех циклах при $t \rightarrow +\infty$ происходит по часовой стрелке.

Заключение. Таким образом, в настоящей работе предложен способ для точной нелокальной оценки числа предельных циклов, основанный на последовательном построении функции Дюлака – Черкаса. Практическая эффективность разработанного подхода продемонстрирована на примере полиномиальных систем Льенара.

Список использованных источников

1. Ilyashenko, Y. Centennial history of Hilbert's 16th problem / Y. Ilyashenko // Bull. Amer. Math. Soc. – 2002. – Vol. 39. – P. 301–355.
2. Качественная теория динамических систем второго порядка / А. А. Андронов [и др.]. – М.: Наука. 1966. – 568 с.
3. Ye, Y. Theory of limit cycles / Y. Ye // Transl. of AMS Monographs, Providence, RI, 66. – 1986. – P. 435.
4. Qualitative theory of differential equations / Z. Zhang [et al.] // Translations of Mathematical monographs. Providence, RI, American Mathematical Society. – 1992. – Vol. 101. – P. 461.
5. Черкас, Л. А. Функция Дюлака полиномиальных автономных систем на плоскости / Л. А. Черкас // Дифференц. уравнения. – 1997. – Т. 33, № 5. – С. 689–699.
6. Черкас, Л. А. Конструктивные методы исследования предельных циклов автономных систем второго порядка (численно-алгебраический подход) / Л. А. Черкас, А. А. Гринь, В. И. Булгаков. – Гродно, 2013. – 489 с.
7. Черкас, Л. А. О функции Дюлака для системы Куллеса / Л. А. Черкас, А. А. Гринь // Дифференц. уравнения. – 2010. – Т. 46, № 6. – С. 811–819.
8. Cherkas, L. A. Dulac-Cherkas functions for generalized Lienard systems / L. A. Cherkas, A. A. Grin, K. R. Schneider [Electronic resource] // Electron. J. Qualitative Theory of Differential Equations. – 2011. – N 35. – P. 1–23. – Mode of access: <http://www.math.u-szeged.hu/ejqtde/>.
9. Кузьмич, А. В. Выделение класса обобщенных систем Куллеса с единственным предельным циклом / А. В. Кузьмич // Вестн. ГрГУ им. Янки Купалы. Сер 2, Математика. Физика. Информатика, вычислительная техника и управление. – 2015. – № 3 (199). – С.18–26.

References

1. Ilyashenko Y. Centennial history of Hilbert's 16th problem. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 2002, vol. 39, pp. 301–355. doi: 10.1090/s0273-0979-02-00946-1.
2. Andronov A.A., Leontovich E.A., Gordon I.I., Majer A.G. *Qualitative theory of second order dynamic systems*. Moscow, Nauka Publ., 1966. 568 p. (in Russian)
3. Ye Y., Cai S.L., Chen L.S., Huang K.C., Luo D.J., Ma Z.E., Yang X.A. *Theory of limit cycles, Translations of Mathematical Monographs*, vol. 66. Providence, American Mathematical society, 1986. 435 p.
4. Zhang Z., Ding T., Huang W., Dong Z. *Qualitative theory of differential equations. Translations of Mathematical monographs, vol.101*. Providence, American Mathematical Society, 1992. 461 p.

5. Cherkas L.A. Dulac function for polynomial autonomous system in plane. *Differerntial equations*, 1997, vol. 33, no. 5, pp. 692–701.
6. Cherkas L.A., Grin A.A., Bulgakov V.I. *Constructive methods of investigation of limit cycles of second order autonomous systems (numerical-algebraic approach)*. Grodno, 2013. 489 p. (in Russian)
7. Cherkas L.A., Grin A.A. On a Dulac function for the Kukles system. *Differentsial'nye uravneniia - Differerntial equations*, 2010, vol. 46, no. 6, pp. 818–826. doi:10.1134/S0012266110060066.
8. Cherkas, L.A., Grin, A.A., Schneider, K.R. Dulac-Cherkas functions for generalized Lienard systems. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, 2011, no. 35. Available at: <http://www.math.u-szeged.hu/ejqtde/>.
9. Kuzmich A.V. Emphasizing of a class of Kukles generalized systems with the unique limit cycle. *Vestnik GrGU im. Ianki Kupaly. Ser. 2. Matematika. Fizika. Informatika, vychislitel'naya tehnika i upravlenie* [Vesnik of Yanka Kupala State University of Grodno. Series 2. Mathematics. Physics. Informatics, Computer Technology and its Control], 2015, no. 3 (199), pp.18–26. (in Russian)

Информация об авторах

Гринь Александр Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой математического анализа, дифференциальных уравнений и алгебры факультета математики и информатики, Гродненский государственный университет им. Янки Купалы (ул. Ожешко, 22, 230020, г. Гродно, Республика Беларусь). E-mail: grin@grsu.by

Кузьмич Андрей Викторович – старший преподаватель кафедры фундаментальной и прикладной математики факультета математики и информатики, Гродненский государственный университет им. Янки Купалы (ул. Ожешко, 22, 230020, г. Гродно, Республика Беларусь). E-mail: andrei-ivn@mail.ru

Для цитирования

Гринь, А. А. Точные оценки числа предельных циклов автономных систем с тремя точками покоя на плоскости / А. А. Гринь, А. В. Кузьмич // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2016. – № 4. – С. 7–17.

Information about the authors

Hryn Aliaksandr Aliaksandrovich – Ph. D. (Physics and Mathematics), Assistant Professor, Head of the Department of Mathematical Analysis, Differential Equations and Algebra, Faculty of Mathematics and Informatics, Yanka Kupala State University of Grodno (22, Ozheshko Str., 230020, Grodno, Republic of Belarus). E-mail: grin@grsu.by

Kuzmich Andrei Victorovich – Senior lecturer, Department of Fundamental and Applied Mathematics, Faculty of Mathematics and Informatics, Yanka Kupala State University of Grodno (22, Ozheshko Str., 230020, Grodno, Republic of Belarus). E-mail: andrei-ivn@mail.ru

For citation

Grin A.A., Kuzmich A.V. Precise estimations of limit cycles number of autonomous systems with three equilibrium points in the plane. *Vesti Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematichnykh navuk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series], 2016, no. 4, pp. 7–17. (in Russian)