

Во Тхи Ким Туен

*Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
Хюэский промышленный колледж, Хюэ, Вьетнам*

МОНОТОННЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ МОДЕЛИ ШНЭКЕНБЕРГ

В настоящей работе построена каноническая форма векторно-разностных схем. Дано определение монотонности таких разностных схем, связанное со свойством положительности разностного решения. На основе этого определения построены монотонные разностные схемы для модели Шнэкенберг с граничными условиями Дирихле и Неймана. Эта модель представляет собой полунелинейную реакционно-диффузную систему и играет важную роль при математическом моделировании в областях физической химии и биологии. При построении монотонной разностной схемы для указанной модели с граничным условием Неймана основная идея состоит в том, чтобы использовать полуполные узлы в граничных точках задания краевых условий второго рода. Представлены результаты вычислительных экспериментов, подтверждающих эффективность предложенных методов. Численное решение получено без нефизических осцилляций.

Ключевые слова: модель Шнэкенберг, монотонная разностная схема.

Vo Thi Kim Tuyen

*Belarusian State University, Minsk, Belarus
Hue Industrial College, Hue, Vietnam*

MONOTONE DIFFERENCE SCHEMES FOR THE SCHNACKENBERG MODEL

In this article the canonical form of the vector-difference schemes is constructed. The definition of the monotonicity of difference schemes is given. This definition is related to the positivity property of the difference solution. Based on this definition, the monotone difference schemes for the Schnackenberg model with the Dirichlet and Neumann boundary conditions are constructed. This model is a semi-nonlinear reaction-diffusion system, and it plays an important role in mathematical modeling in the fields of physical chemistry and biology. In constructing a monotone difference scheme for this model with the Neumann boundary condition, the idea of half-integral nodes at the boundary points under the second-kind boundary conditions is used. The results of numerical experiments have confirmed the effectiveness of the suggested methods. The numerical solution without nonphysical oscillation is obtained.

Keywords: Schnackenberg model, monotone difference scheme.

Введение. Монотонные разностные схемы играют важную роль при математическом моделировании прикладных задач, так как позволяют получить численное решение без нефизических осцилляций [1]. Исследованию монотонных разностных схем посвящена обширная литература (см., напр. [2, 3]). Следует также отметить работы по изучению свойств монотонных разностных схем для нелинейных краевых задач математической физики [4]. Значительно менее исследованы эти вопросы для систем параболических уравнений [5, 6]. В статье [7] строится монотонная разностная схема для системы пороупругости. Исследование схем для слабо связанных линейных эллиптических и квазилинейных параболических систем уравнений проведено в [8].

Целью настоящей работы является построение монотонных разностных схем для модели Шнэкенберг, которая представляет собой полунелинейную реакционно-диффузную систему. Эта модель, введенная в 1979 г., играет важную роль при математическом моделировании прикладных задач физической химии и биологии [9–11]. В математическом плане эти системы относятся к так называемым слабо связанным параболическим системам уравнений [12].

1. Модель Шнэкенберг. Модель описывает тримолекулярную химическую реакцию между двумя химическими продуктами X , Y и двумя химическими источниками A , B [11]:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = d_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - ku + u^2 v + a, & x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = d_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - u^2 v + b, & x \in \Omega, t > 0, \end{cases} \quad x \in \Omega, \quad 0 < t \leq T, \quad (1)$$

с начальными условиями

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (2)$$

где $\bar{\Omega} = \{x : 0 \leq x \leq l\}$, $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, $\partial\Omega = \{x = 0, x = l\}$, $u(x, t)$ и $v(x, t)$ – концентрации химических продуктов X и Y в момент t и положении $x \in \Omega$, положительные константы d_1, d_2 – коэффициенты диффузии химических продуктов X, Y , положительные константы a, b – концентрации химических источников A и B , константа k – положительная. Начальные концентрации $u_0(x), v_0(x), x \in \bar{\Omega}$ – неотрицательные функции.

Будем рассматривать граничные условия Дирихле (химическая реакция под воздействием внешних условий):

$$u(t, x) = \mu_1(t), \quad v(t, x) = \mu_2(t), \quad x \in \partial\Omega, t > 0, \quad (3)$$

или граничные условия Неймана (химическая реакция в закрытой среде):

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0, \quad x \in \partial\Omega, t > 0. \quad (4)$$

Тримолекулярные реакции представляют собой реакции, которые требуют участия трех индивидуальных частиц в элементарном процессе.

2. Вспомогательные результаты. Приведем несколько результатов из [8], которые используются для доказательства монотонности разностных схем для модели Шнэкенберг.

Пусть в некоторой ограниченной области $\bar{\Omega} \in R^n$ задана сетка $\bar{\omega}_h = \omega_h \cup \partial\omega_h$, где ω_h – множество внутренних узлов и $\partial\omega_h$ – множество граничных узлов.

Рассмотрим векторное уравнение вида

$$A(P)\bar{Y}(P) = \sum_{Q \in \mathcal{M}'(P)} B(P, Q)\bar{Y}(Q) + \bar{F}(P), \quad P \in \omega_h, \quad (5)$$

аналогично скалярному случаю называемое канонической формой записи векторно-разностной схемы [2]. Здесь матрицы $A(P) = \{a_{ij}(P)\}_{m \times m}$, $B(P, Q) = \{b_{ij}(P, Q)\}_{m \times m}$ и векторно-правая часть $\bar{F}(P) = (f_1(P), f_2(P), \dots, f_m(P))^T$ заданы, векторная функция $\bar{Y}(P) = (y_1(P), y_2(P), \dots, y_m(P))^T$ неизвестна. Множество $\mathcal{M}(P) \subset \omega_h$ – шаблон уравнения (5) в узле $P \in \omega_h$, содержащее данную точку, $\mathcal{M}'(P) = \mathcal{M}(P) \setminus P$ – окрестность точки P .

Предполагаем заданными граничные условия Дирихле для всех переменных, т. е.

$$\bar{Y}(P) = \bar{\mu}(P), \quad P \in \partial\omega_h, \quad (6)$$

где $\bar{\mu}(P) = (\mu_1(P), \mu_2(P), \dots, \mu_m(P))^T$.

Определим следующие величины:

$$\max_{P \in \bar{\omega}_h} \bar{Y}(P) = \max_{1 \leq k \leq m} \left(\max_{P \in \bar{\omega}_h} y_k(P) \right), \quad \min_{P \in \bar{\omega}_h} \bar{Y}(P) = \min_{1 \leq k \leq m} \left(\min_{P \in \bar{\omega}_h} y_k(P) \right), \quad (7)$$

$$\|\bar{Y}\|_{\bar{C}} = \max_{1 \leq k \leq m} \left(\max_{P \in \bar{\omega}_h} |y_k(P)| \right), \quad \|\bar{Y}\|_{C_{\partial\omega_h}} = \max_{1 \leq k \leq m} \left(\max_{P \in \partial\omega_h} |y_k(P)| \right). \quad (8)$$

Будем использовать следующее определение из [8]: матрица $A = \{a_{ij}\}_{m \times n}$ положительна – $A = \{a_{ij}\}_{m \times n} \geq 0$, если все ее элементы положительны – $a_{ij} \geq 0, \forall i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$.

Определение [8]. Векторно-разностная схема (5)–(6) называется монотонной, если для ее решения выполнены следующие предложения:

если $\vec{F}(P) \geq 0$, $P \in \omega_h$, $\vec{\mu}(P) \geq 0$, $P \in \partial\omega_h$, то $\vec{Y}(P) \geq 0$, $P \in \bar{\omega}_h$,

если $\vec{F}(P) \leq 0$, $P \in \omega_h$, $\vec{\mu}(P) \leq 0$, $P \in \partial\omega_h$, то $\vec{Y}(P) \leq 0$, $P \in \bar{\omega}_h$.

Введем матрицы $D^{(1)}(P) = \left\{ d_{ij}^{(1)}(P) \right\}_{m \times m}$ и $D(P) = \text{diag} \{ d_{11}(P), d_{22}(P), \dots, d_{mm}(P) \}$, определяемые следующим образом:

$$D^{(1)}(P) = A(P) - \sum_{Q \in \mathcal{M}'(P)} B(P, Q), \quad d_{ii}(P) = \sum_{j=1}^m d_{ij}^{(1)}(P), \quad i = \overline{1, m}.$$

Матрицу $A(P)$ можно переписать в виде $A(P) = A^{(1)}(P) - A^{(2)}(P)$, где

$$A^{(1)}(P) = \text{diag} \{ a_{11}^{(1)}(P), a_{22}^{(1)}(P), \dots, a_{mm}^{(1)}(P) \}, \quad a_{ii}^{(1)}(P) = a_{ii}(P), \quad i = \overline{1, m},$$

$$A^{(2)}(P) = \left\{ a_{ij}^{(2)}(P) \right\}_{m \times m}, \quad a_{ii}^{(2)}(P) = 0, \quad a_{ij}^{(2)}(P) = -a_{ij}(P), \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1, m}.$$

Тогда векторное уравнение (5)–(6) запишем в виде

$$A^{(1)}(P)\vec{Y}(P) = \sum_{Q \in \mathcal{M}'(P)} B(P, Q)\vec{Y}(Q) + A^{(2)}(P)\vec{Y}(P) + \vec{F}(P), \quad P \in \omega_h, \quad (9)$$

$$\vec{Y}(P) = \vec{\mu}(P), \quad P \in \partial\omega_h. \quad (10)$$

Теорема 1 [8]. Если для матричных коэффициентов системы (9)–(10) выполнены условия

$$A^{(1)}(P) > 0, \quad A^{(2)}(P) \geq 0, \quad B(P, Q) > 0, \quad D(P) > 0 \quad \forall Q \in \mathcal{M}'(P), \quad (11)$$

тогда векторно-разностная схема (5)–(6) монотонна и для нее имеет место двусторонняя оценка вида

$$m_1 \leq y_j(P) \leq m_2, \quad P \in \bar{\omega}_h, \quad j = 1, \dots, m, \quad (12)$$

где

$$m_1 = \min \left\{ \min_{P \in \partial\omega_h} \vec{\mu}(P), \min_{P \in \omega_h} \left(D^{-1}(P) \vec{F}(P) \right) \right\}, \quad m_2 = \max \left\{ \max_{P \in \partial\omega_h} \vec{\mu}(P), \max_{P \in \omega_h} \left(D^{-1}(P) \vec{F}(P) \right) \right\}.$$

Доказательство монотонности векторно-разностной схемы проводится на основе анализа двусторонней оценки (12).

3. Векторно-разностная схема для задачи с граничными условиями Дирихле. Построим монотонную векторно-разностную схему для задачи (1)–(3). Введем следующие равномерные пространственно-временные сетки $\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau$:

$$\bar{\omega}_\tau = \{ t_n = n\tau, \quad n = 0, 1, \dots, N_0, \quad \tau N_0 = T \}, \quad \bar{\omega}_\tau = \omega_\tau \cup \{ t_0 = 0 \},$$

$$\bar{\omega}_h = \omega_h \cup \partial\omega_h, \quad \omega_h = \left\{ x_i = ih, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad h = \frac{L}{N} \right\}, \quad \partial\omega_h = \{ x_0 = 0, x_N = L \}.$$

Для нахождения приближенных значений исходных функций будем использовать следующие сеточные функции:

$$y_{1,i}^{n+1} = y_1(x_i, t + \tau), \quad y_{2,i}^{n+1} = y_2(x_i, t + \tau), \quad i = \overline{0, N}.$$

На сетке $\bar{\omega}_{h\tau}$ аппроксимируем систему (1)–(3) разностной схемой вида

$$\begin{cases} \hat{y}_{1,t,i} = d_1 \hat{y}_{1,\bar{x}x,i} - k \hat{y}_{1,i} + y_{1,i}^2 \hat{y}_{2,i} + a, & i = 0, \dots, N-1, \\ \hat{y}_{2,t,i} = d_2 \hat{y}_{2,\bar{x}x,i} - y_{1,i}^2 \hat{y}_{2,i} + b, \end{cases} \quad (13)$$

$$y_{1,i}^0 = u_0(x_i), \quad y_{2,i}^0 = v_0(x_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (14)$$

$$\hat{y}_1(x) = \hat{\mu}_1, \quad \hat{y}_2(x) = \hat{\mu}_2, \quad x \in \partial\omega_h. \quad (15)$$

Запишем ее в каноническом виде (9):

$$A_i^{(1)} \bar{Y}_i^{n+1} = B_{1i} \bar{Y}_{i-1}^{n+1} + B_{2i} \bar{Y}_{i+1}^{n+1} + A_i^{(2)} \bar{Y}_i^{n+1} + \bar{F}_i^n, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (16)$$

$$\bar{Y}_i^0 = \bar{U}_0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (17)$$

$$\bar{Y}^{n+1}(x) = \bar{\mu}^{n+1}, \quad x \in \partial\omega_h. \quad (18)$$

Здесь

$$Y_i^{n+1} = (y_{1,i}^{n+1}, y_{2,i}^{n+1})^T, \quad i = \overline{0, N} - \text{неизвестная векторная функция};$$

$$\bar{F}_i^n = \bar{Y}_i^n + \tau \bar{F}_1 = (y_{1,i}^n + \tau a, y_{2,i}^n + \tau b)^T, \quad i = \overline{1, N-1} - \text{вектор правой части};$$

$$\bar{\mu}^{n+1} = (\mu_1^{n+1}, \mu_2^{n+1})^T;$$

$$A_i^{(1)}, A_i^{(2)}, B_{1i}, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad B_{2i}, \quad i = \overline{1, N-1} - \text{квадратные матрицы коэффициентов размеров } 2 \times 2:$$

$$A_i^{(1)} = \text{diag} \left\{ 1 + \frac{2\tau}{h^2} d_1 + \tau k, 1 + \frac{2\tau}{h^2} d_2 + \tau (y_{1,i}^n)^2 \right\}, \quad A_i^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & \tau (y_{1,i}^n)^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1, N-1},$$

$$B_{1,i} = \text{diag} \left\{ \frac{\tau}{h^2} d_1, \frac{\tau}{h^2} d_2 \right\}, \quad B_{2,i} = \text{diag} \left\{ \frac{\tau}{h^2} d_1, \frac{\tau}{h^2} d_2 \right\}, \quad i = \overline{1, N-1}.$$

Так как все входящие в (16) матрицы положительны, то имеет место

Теорема 2. Векторно-разностная схема (16)–(18) является монотонной.

Доказательство. По индукции предполагаем, что $y_{1,i}^n \geq 0, y_{2,i}^n \geq 0$. Покажем теперь, что сеточные функции $y_{1,i}^{n+1}, y_{2,i}^{n+1}$ также неотрицательны для всех i . Для удобства сначала докажем, что $y_{2,i}^{n+1} \geq 0, i = 0, 1, \dots, N$. Если минимум функции $y_{2,i}^{n+1}$ достигается на границе $\partial\omega_h$, тогда

$$y_{2,i}^{n+1} \geq \min_{0 \leq i \leq N} y_{2,i}^{n+1} = \mu_2^{n+1} \geq 0. \quad (19)$$

Если минимум функции $y_{2,i}^{n+1}$ достигается в какой-то внутренней точке $x_{i,0} : 1 \leq i^0 \leq N-1$, то из уравнения (13) находим

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{2\tau}{h^2} d_2 + \tau (y_{1,i^0}^n)^2 \right) y_{2,i^0}^{n+1} &= \frac{\tau}{h^2} d_2 y_{2,i^0-1}^{n+1} + \frac{\tau}{h^2} d_2 y_{2,i^0+1}^{n+1} + y_{2,i^0}^n + \tau b, \\ y_{2,i^0}^{n+1} &\geq \frac{1}{1 + \tau (y_{1,i^0}^n)^2} (y_{2,i^0}^n + \tau b) \geq 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Из (19) и (20) получим $y_{2,i}^{n+1} \geq 0, i = 0, 1, \dots, N$.

Теперь докажем, что $y_{1,i}^{n+1} \geq 0, i = 0, 1, \dots, N$.

Если минимум функции $y_{1,i}^{n+1}$ достигается на границе $\partial\omega$, тогда

$$y_{1,i}^{n+1} \geq \min_{0 \leq i \leq N} y_{1,i}^{n+1} = \mu_1^{n+1} \geq 0. \quad (21)$$

Если $\min_{0 \leq i \leq N} y_{1,i}^{n+1} = y_{1,i^*}^{n+1}, 1 \leq i^* \leq N-1$, тогда из уравнения (13) получаем

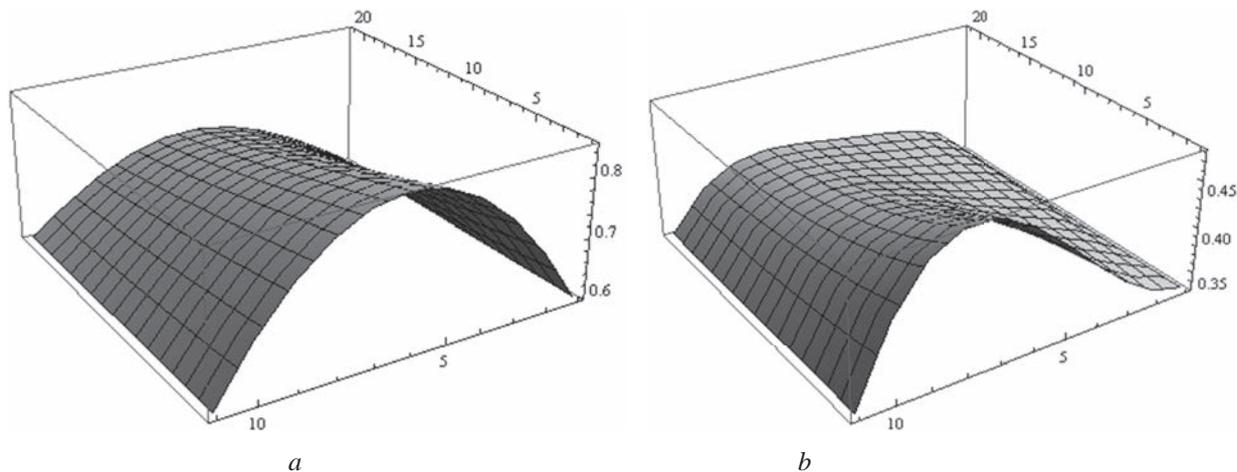


Рис. 1. Численные решения: *a* – для функции $u(x,t)$; *b* – для функции $v(x,t)$
 Fig. 1. Numerical solutions: *a* – of the function $u(x,t)$; *b* – of the function $v(x,t)$

$$\left(1 + \frac{2\tau}{h^2}d_1 + \tau k\right)y_{1,i}^{n+1} = \frac{\tau}{h^2}d_1y_{1,i}^{n+1} + \frac{\tau}{h^2}d_1y_{1,i}^{n+1} + \tau\left(y_{1,i}^n\right)^2 y_{2,i}^{n+1} + y_{1,i}^n + \tau a,$$

$$(1 + \tau k)y_{1,i}^{n+1} \geq \tau\left(y_{1,i}^n\right)^2 y_{2,i}^{n+1} + y_{1,i}^n + \tau a \geq y_{1,i}^n + \tau a,$$

$$y_{1,i}^{n+1} \geq \min_{0 \leq i \leq N} y_{1,i}^{n+1} \geq \frac{1}{1 + \tau k}\left(y_{1,i}^n + \tau a\right) \geq 0. \quad (22)$$

Из (21) и (22) для всех $i = 0, \dots, N$ получим

$$y_{1,i}^{n+1} \geq 0.$$

Следовательно, теорема доказана.

Вычислительный эксперимент 1. Рассмотрим вычислительный эксперимент для модели Шнэкенберг. Соответствующая модель взята из [13] со следующими входными данными: $a = 0,6$; $b = 0,2$; $d_1 = d_2 = 1/40$; $k = 1,2$; $0 \leq x \leq 1$; $0 \leq t \leq 1$; $u(0,t) = u(1,t) = 0,6$; $v(0,t) = v(1,t) = b/a$; $u_0(x) = 0,2 + x(1 - x)$; $v_0(x) = b/a + x^2(1 - x)$.

Нетрудно убедиться, что все входные данные положительны для всех $x \in [0,1]$, поэтому по теореме 2 построенная схема (16)–(18) монотонна и соответствующие компоненты вектора решения $\vec{Y} = (y_1, y_2)^T$ неотрицательны.

Введем шаги $h = 1/10$ и $\tau = 1/20$. Решая эту схему методом матричной прогонки, получим численное решение нефизических осцилляций, изображенное на рис. 1.

4. Векторно-разностная схема для задачи с граничными условиями Неймана. В этом разделе рассмотрим модель Шнэкенберг (1)–(2) с граничными условиями Неймана (4). Построим для этой модели монотонную разностную схему. Основная идея состоит в том, чтобы использовать полущелые узлы при аппроксимации граничных условий второго рода [1].

Можно переписать задачу (1)–(2) с граничными условиями (4) с использованием потоков

$$W_1(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}, \quad W_2(x,t) = \frac{\partial v(x,t)}{\partial x}:$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = d_1 \frac{\partial W_1}{\partial x} - ku + u^2v + a, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = d_2 \frac{\partial W_2}{\partial x} - u^2v + b, \end{cases} \quad (23)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad v(x,0) = v_0(x), \quad (24)$$

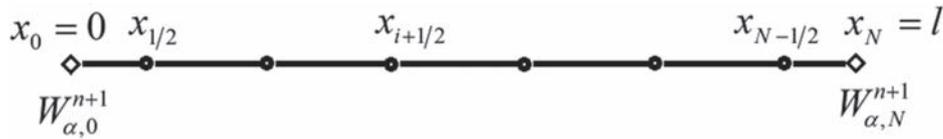


Рис. 2. Пространственные сетки
Fig. 2. Space grids

$$W_1(t, 0) = W_2(t, 0) = 0, \quad (25)$$

$$W_1(l, t) = W_2(l, t) = 0. \quad (26)$$

Введем следующие равномерные пространственно-временные сетки $\omega_{h\tau} = \omega_h \times \bar{\omega}_\tau$ (рис. 2):

$$\bar{\omega}_\tau = \{t_n = n\tau, n = 0, 1, \dots, N_0, \tau N_0 = T\}, \quad \bar{\omega}_\tau = \omega_\tau \cup \{t_0 = 0\},$$

$$\omega_h = \left\{ x_{i+1/2} = (i+1/2)h, i = \overline{0, N-1}, h = \frac{l}{N} \right\}.$$

Для нахождения приближенных значений исходных функций будем использовать следующие сеточные функции:

$$y_{1,i+1/2}^{n+1} = y_1(x_{i+1/2}, t + \tau), \quad y_{2,i+1/2}^{n+1} = y_2(x_{i+1/2}, t + \tau), \quad i = 0, \dots, N-1;$$

т. е. приближенные значения сеточного решения будем вычислять в полужелтых узлах.

На сетке $\omega_{h\tau}$ исходную дифференциальную задачу (23)–(26) аппроксимируем следующей разностной схемой:

$$\begin{cases} \hat{y}_{1,t i+1/2} = d_1 \frac{\hat{W}_{1h,i+1} - \hat{W}_{1h,i}}{h} - k \hat{y}_{1,i+1/2} + y_{1,i+1/2}^2 \hat{y}_{2,i+1/2} + a, & i = 0, \dots, N-1, \\ \hat{y}_{2,t i+1/2} = d_2 \frac{\hat{W}_{2h,i+1} - \hat{W}_{2h,i}}{h} - y_{1,i+1/2}^2 \hat{y}_{2,i+1/2} + b, & i = 0, \dots, N-1, \end{cases} \quad (27)$$

$$y_{1,i}^0 = u_0(x_i), \quad y_{2,i}^0 = v_0(x_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad (28)$$

$$\hat{W}_{1h,1} = \hat{W}_{2h,1} = 0, \quad (29)$$

$$\hat{W}_{1h,N} = \hat{W}_{2h,N} = 0, \quad (30)$$

где $\hat{W}_{\alpha h,i} = \hat{y}_{\alpha, \bar{x}, i+1/2} = \frac{\hat{y}_{\alpha, i+1/2} - \hat{y}_{\alpha, i-1/2}}{h}$, $\alpha = 1, 2$.

В дальнейшем подставим уравнения (29) и (30) в уравнения (27), при $i = 0$ и $i = N$ соответственно, и запишем эту схему в каноническом виде (9):

$$A_{i+1/2}^{(1)} \bar{Y}_{i+1/2}^{n+1} = B_{1i+1/2} \bar{Y}_{i-1/2}^{n+1} + B_{2i} \bar{Y}_{i+3/2}^{n+1} + A_{i+1/2}^{(2)} \bar{Y}_{i+1/2}^{n+1} + \bar{F}_{i+1/2}^n, \quad i = 1, 2, \dots, N-2, \quad (31)$$

$$A_{1/2}^{(1)} \bar{Y}_{1/2}^{n+1} = B_{2,1/2} \bar{Y}_{3/2}^{n+1} + A_{1/2}^{(2)} \bar{Y}_{1/2}^{n+1} + \bar{F}_{1/2}^n, \quad i = 0, \quad (32)$$

$$A_{N-1/2}^{(1)} \bar{Y}_{N-1/2}^{n+1} = B_{1N-1/2} \bar{Y}_{N-3/2}^{n+1} + A_{N-1/2}^{(2)} \bar{Y}_{N-1/2}^{n+1} + \bar{F}_{N-1/2}^n, \quad i = N-1, \quad (33)$$

где

$$\bar{Y}_{i+1/2}^{n+1} = \left(y_{1,i+1/2}^{n+1}, y_{2,i+1/2}^{n+1} \right)^T, \quad i = 0, \dots, N-1 - \text{неизвестная векторная функция};$$

$$\bar{F}_{i+1/2}^n = \left(y_{1,i+1/2}^n + \tau a, y_{2,i+1/2}^n + \tau b \right)^T, \quad i = 0, \dots, N-1 - \text{вектор правой части};$$

$$A_{i+1/2}^{(1)}, A_{i+1/2}^{(2)}, B_{1i+1/2}, B_{2i+1/2}, \quad i = 0, \dots, N-1 - \text{квадратные матрицы коэффициентов размеров } 2 \times 2:$$

$$A_{i+1/2}^{(1)} = \text{diag} \left\{ 1 + \frac{2\tau}{h^2} d_1 + \tau, 1 + \frac{2\tau}{h^2} d_2 + \tau \left(y_{1,i+1/2}^n \right)^2 \right\}, \quad i = 1, \dots, N-2,$$

$$A_{1/2}^{(1)} = \text{diag} \left\{ 1 + \frac{\tau}{h^2} d_1 + \tau, 1 + \frac{\tau}{h^2} d_2 + \tau (y_{1,1/2}^n)^2 \right\},$$

$$A_{N-1/2}^{(1)} = \text{diag} \left\{ 1 + \frac{\tau}{h^2} d_1 + \tau, 1 + \frac{\tau}{h^2} d_2 + \tau (y_{1,N-1/2}^n)^2 \right\},$$

$$A_{i+1/2}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & \tau (y_{1,i+1/2}^n)^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 0, \dots, N-1,$$

$$B_{1,i+1/2} = \text{diag} \left\{ \frac{\tau}{h^2} d_1, \frac{\tau}{h^2} d_2 \right\}, \quad i = 1, \dots, N-1,$$

$$B_{2,i} = \text{diag} \left\{ \frac{\tau}{h^2} d_1, \frac{\tau}{h^2} d_2 \right\}, \quad i = 0, \dots, N-2.$$

Все матричные коэффициенты в схеме (31)–(33) положительные, отсюда на основе определения [8] мы приходим к следующей теореме.

Теорема 3. *Векторно-разностная схема (31)–(33) является монотонной.*

Доказательство. Эта теорема доказывается аналогичным образом, как и теорема 2.

По индукции предполагаем, что $y_{1,i+1/2}^n \geq 0, y_{2,i+1/2}^n \geq 0$, и покажем, что сеточные функции $y_{1,i+1/2}^{n+1} \geq 0, y_{2,i+1/2}^{n+1} \geq 0, i = 0, 1, \dots, N-1$.

Сначала докажем, что $y_{2,i+1/2}^{n+1} \geq 0, i = 0, \dots, N-1$. Если функция $y_{2,i+1/2}^{n+1}$ достигает минимума в какой-то внутренней точке $x_{i^0+1/2}, 1 \leq i^0 \leq N-2$, то из (31) следует

$$y_{2,i^0+1/2}^{n+1} \geq \frac{1}{1 + \tau (y_{1,i^0+1/2}^n)^2} (y_{2,i^0+1/2}^n + \tau b) \geq 0. \quad (34)$$

Если функция $y_{2,i+1/2}^{n+1}$ достигает минимума в какой-то внутренней точке $x_{1/2}$, то

$$y_{2,1/2}^{n+1} \geq \frac{1}{1 + \tau (y_{1,1/2}^n)^2} (y_{2,1/2}^n + \tau b) \geq 0. \quad (35)$$

Если функция $y_{2,i+1/2}^{n+1}$ достигает минимума в какой-то внутренней точке $x_{N-1/2}$, то

$$y_{2,N-1/2}^{n+1} \geq \frac{1}{1 + \tau (y_{1,N-1/2}^n)^2} (y_{2,N-1/2}^n + \tau b) \geq 0. \quad (36)$$

Из (34), (35), (36) получим

$$y_{2,i+1/2}^{n+1} \geq 0, \quad i = 0, \dots, N-1. \quad (37)$$

Аналогично, используя результат $y_{2,i+1/2}^{n+1} \geq 0, i = 0, \dots, N-1$, находим

$$y_{1,i+1/2}^{n+1} \geq \min_{0 \leq i \leq N-1} y_{1,i+1/2}^{n+1} \geq \frac{1}{1 + \tau} (y_{1,i+1/2}^n + \tau a) \geq 0, \quad i = 0, \dots, N-1. \quad (38)$$

Из (37) и (38) теорема доказана.

Вычислительный эксперимент 2. Теперь рассмотрим задачу (23)–(26) с входными данными из [11]: $0 \leq x \leq 3\pi; 0 \leq t \leq 100; a = (\beta - \alpha)/2; b = (\beta + \alpha)/2; \alpha = 0,02; \beta = 0,3; d_1 = 0,01; d_2 = 1; k = 1;$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} = 0, \quad x \in \partial\Omega, \text{ начальные функции } u_0(x) = 0,3 + 0,001 \sin x; v_0(x) = 1,778.$$

Так как входные данные положительные, то построенная схема (31)–(33) является монотонной. Полученное соответствующее численное решение без нефизических осцилляций изображено на рис. 3.

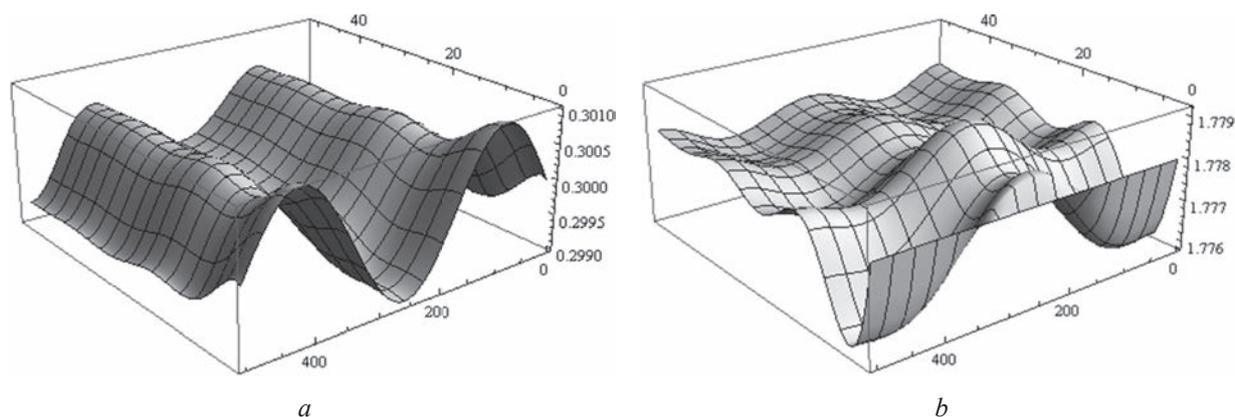


Рис. 3. Численные решения: a – для функции $u(x,t)$; b – для функции $v(x,t)$
 Fig. 3. Numerical solutions: a – of the function $u(x,t)$; b – of the function $v(x,t)$

З а м е ч а н и е. Аналогичным образом можно построить монотонную разностную схему для модели Шнэкенберг с граничными условиями смешанного типа, как это сделано в работе [1].

Благодарности

Автор выражает благодарность профессору П. П. Матусу за помощь, оказанную в работе

Acknowledgements

The author is grateful to Professor Piotr Matus for help in this work.

Список использованных источников

1. Матус, П. П. Монотонные разностные схемы для линейного параболического уравнения с граничными условиями смешанного типа / П. П. Матус, В. Т. К. Туен, Ф. Ж. Гаспар // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2014. – Т. 58, № 5. – С. 18–22.
2. Самарский, А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М.: Наука, 1977. – 656 с.
3. Matus, P. P. The maximum principle and some its applications / P. P. Matus // Comput. Meth. Appl. Math. – 2002. – Vol. 2, N 1. – P. 50–91.
4. Матус, П. П. Монотонные разностные схемы для нелинейных параболических уравнений / П. П. Матус, И. В. Рыбак // Дифференц. уравнения. – 2003. – Т. 39, № 7.
5. Farago, I. Discrete maximum principle and adequate discretizations of linear parabolic problems / I. Farago, R. Horvath // SIAM J. Sci. Comput. – 2006. – Vol. 28, iss. 6. – P. 2313–2336.
6. Farago, I. Discrete maximum principles for nonlinear parabolic pde systems / I. Farago, J. Karatson, S. Korotov // IMA J. Numerical Analysis. – 2012. – Vol. 32, iss. 4. – P. 1541–1573.
7. Francisco, J. Numerical methods for a one-dimensional non-linear Biot's model / J. Francisco [et al.] // Comp. Appl. Math. – 2016. – Vol. 293. – P. 62–72.
8. Гаспар, Ф. Ж. Монотонные разностные схемы для систем эллиптических и параболических уравнений / Ф. Ж. Гаспар, П. П. Матус, В. Т. К. Туен, Л. М. Хиен // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2016. – Т. 60, № 5. – С. 29–33.
9. Murray, J. D. Mathematical Biology / J. D. Murray – 2nd ed. – Berlin: Springer-Verlag, 1993.
10. Saad A. Manaa. Some numerical methods for Schnackenberg model / Saad A. Manaa // Int. J. Engineering Inventions. – 2013. – Vol. 2, iss. 2. – P. 71–78.
11. Liu, P. Bifurcation analysis of reaction-diffusion Schnackenberg model / P. Liu // J. Math. Chem. – 2013. – Vol. 51, iss. 8. – P. 2001–2019.
12. Mitidieri, E. Weakly couple elliptic systems and positivity / E. Mitidieri, G. Sweer // Mathematische Nachrichten. – 1995. – Vol. 173, iss. 1. – P. 259–286.
13. Saad A. Manaa. Numerical Solution of Brusselator Model by Finite Difference Method / Saad A. Manaa, Rostam K. Saeed, Fadhil H. Easif // J. App. Sci. Research. – 2010. – Vol. 6 (11). – P. 1632–1646.

References

1. Matus P.P., Tuyen V., Gaspar F. Monotone difference schemes for linear parabolic equation with mixed boundary conditions. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi* [Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus], 2014, vol. 58, no. 5, pp. 18–22. (in Russian)
2. Samarskiy A.A. *The theory of difference schemes*. Moscow, Nauka, 1977. 656 p. (in Russian)
3. Matus P.P. The maximum principle and same its applications. *Computational Methods in Applied Mathematics*, 2002, vol. 2, no. 1, pp. 50–91. doi: 10.2478/cmam-2002-0004.
4. Matus P.P., Rybak I.V. Monotone difference schemes for nonlinear parabolic equations. *Differential equations*, 2003, vol. 39, no. 7, pp. 1013–1022. doi: 10.1023/B:DIEQ.0000009197.94879.5c.

5. Farago I., Horvath R. Discrete maximum principle and adequate discretizations of linear parabolic problems. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2006, vol. 28, no. 6, pp. 2313–2336. doi:10.1137/050627241.
6. Farago I., Karatson J., Korotov S. Discrete maximum principles for nonlinear parabolic pde systems. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 2012, vol. 32, no. 4, pp. 1541–1573. doi: 10.1093/imanum/drr050.
7. Gaspar F.J., Lisbona F.J., Matus P., Tuyen V. T. K. Numerical methods for a one-dimensional non-linear Biot's model. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2016, vol. 293, pp. 62–72. doi:10.1016/j.cam.2015.03.039.
8. Gaspar F.J., Matus P., Tuyen V. T. K., Hieu L.M. Monotone difference schemes for systems of elliptic and parabolic equations systems. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi* [Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus], 2016, vol. 60, no. 5, pp. 29–33. (in Russian)
9. Murray J.D. *Mathematical Biology*. 2nd ed. Springer-Verlag Berlin, 1993.
10. Manaа S.A. Some numerical methods for Schnackenberg model. *International Journal of Engineering Inventions*, 2013, vol. 2, no. 2, pp. 71–78.
11. Liu P., Shi J., Wang Y., Feng X. Bifurcation analysis of reaction–diffusion Schnackenberg model. *Journal of Mathematical Chemistry*, 2013, vol. 51, no. 8, pp. 2001–2019. doi: 10.1007/s10910-013-0196-x.
12. Mitidieri E., Sweer G. Weakly coupled elliptic systems and positivity. *Mathematische Nachrichten*, 1995, vol. 173, no. 1, pp. 259–286. doi: 10.1002/mana.19951730115.
13. Manaа S.A., Saeed R.K., Easif F.H. Numerical Solution of Brusselator Model by Finite Difference Method. *Journal of Applied Sciences Research*, 2010, vol. 6, no. 11, pp. 1632–1646.

Информация об авторе

Во Тхи Ким Туен – аспирант, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: vokimtuyen188@gmail.com

Для цитирования

Во Тхи Ким Туен. Монотонные разностные схемы для модели Шнэкенберг / Во Тхи Ким Туен // Вест. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2016. – № 4. – С. 38–46.

Information about the author

Vo Thi Kim Tuyen – Postgraduate, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus); the teacher, Hue Industrial College (Hue, Vietnam). E-mail: vokimtuyen188@gmail.com

For citation

Vo Thi Kim Tuyen. Monotone difference schemes for the Schnackenberg model. *Vesti Natsyional'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series], 2016, no. 4, pp. 38–46. (in Russian)