

С. С. Каянович

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь,

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СТЕРЖНЕВОГО ТЕЧЕНИЯ В КАНАЛЕ

В статье [1] доказано существование решений модели стержневого течения на каждом временном слое $t_m = m\tau$, $m = 0, 1, \dots, M$. В данной работе получены априорные оценки этих решений, которые не зависят от τ и позволяют выполнить предельный переход при $\tau \rightarrow 0$.

Ключевые слова: разрешимость, предельный переход, априорные оценки, гладкость, срезающая функция.

S. S. Kayanovich

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Belarus,

BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR PLUG FLOW IN THE CHANNEL

In the article [1], we have proved the existence of solutions for a model of plug flow at each time step $t_m = m\tau$, $m = 0, 1, \dots, M$. In this article, *a priori* estimates of these solutions have been obtained, which do not depend on τ and allow passing to the limit as $\tau \rightarrow 0$.

Keywords: solvability, passage to the limit, *a priori* estimates, smoothness, cut-off function.

Введение. Исследование вопроса о разрешимости модели стержневого течения было начато в работе [1]. Пространство изменения переменных (x, t) разбивалось плоскостями $t_m = m\tau$ на слои, производная по времени, которая присутствует в одном из уравнений, заменялась разностной производной, и доказывалось (при достаточно малом τ) однозначная разрешимость полученной системы на каждом временном слое.

Чтобы доказать разрешимость рассматриваемой системы в пространстве (x, t) , необходимо обосновать возможность выполнения предельного перехода при $\tau \rightarrow 0$. Для этого в данной работе устанавливаются априорные оценки самого решения краевой задачи и его производных первого и второго порядков. В случае одного уравнения краевые задачи исследовались рядом авторов [2–9]. В настоящей статье рассматривается система из трех уравнений, для одного из которых оказались полезными способы исследования, подобные тем, что были применены в вышеуказанных работах.

Отметим, что константы, которые появляются в ходе исследования и ограничивают модули самого решения и его производных, не зависят от τ и не будут увеличиваться при $\tau \rightarrow 0$. Для того чтобы данную статью можно было читать без обращения к [1], здесь сохранен необходимый минимум информации из указанной работы, но при этом внесены изменения: функция ζ теперь обозначается ζ' , константа $\beta - \beta_1$. Также усилены требования к гладкости функций: если в [1] полагалось $l \geq 3$, то теперь $l \geq 5$.

Постановка задачи. Примем следующие обозначения: $x = (x_1, x_2)$, $0 \leq x_1 \leq L$, $0 \leq x_2 \leq H$, $0 \leq t \leq T$, $\Omega = (0, L) \times (0, H)$, $S_1 = [0 \leq x_1 \leq L, x_2 = 0]$, $S_2 = [0 \leq x_1 \leq L, x_2 = H]$, $S_{iT} = S_i \times [0, T]$, $i = 1, 2$, $S_3 = [x_1 = 0, 0 \leq x_2 \leq H]$, $S_4 = [x_1 = L, 0 \leq x_2 \leq H]$, $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$ – граница Ω , $\bar{\Omega} = \Omega \cup S$, $\Omega_T = \Omega \times (0, T]$, $S_T = S \times [0, T]$, $\bar{\Omega}_T = \bar{\Omega} \times [0, T]$, $\tilde{\Omega}$ – область, ограниченная кривой \tilde{S} , $\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega} \cup \tilde{S}$, $\tilde{S} = \tilde{S}_1 \cup \tilde{S}_2 \cup \tilde{S}_3 \cup \tilde{S}_4$,

$$\text{где } \tilde{S}_1 = \left[0 \leq x_1 \leq \frac{\delta}{2}, x_2 = \theta_1(x_1) \right] \cup \left[\frac{\delta}{2} \leq x_1 \leq L - \frac{\delta}{2}, x_2 = 0 \right] \cup \left[L - \frac{\delta}{2} \leq x_1 \leq L, x_2 = \varphi_1(x_1) \right],$$

$$\tilde{S}_2 = \left[0 \leq x_1 \leq \frac{\delta}{2}, x_2 = \theta_2(x_1) \right] \cup \left[\frac{\delta}{2} \leq x_1 \leq L - \frac{\delta}{2}, x_2 = H \right] \cup \left[L - \frac{\delta}{2} \leq x_1 \leq L, x_2 = \varphi_2(x_1) \right],$$

$$\begin{aligned} \tilde{S}_3 &= [x_1 = 0, \theta_1(0) \leq x_2 \leq \theta_2(0)], \quad \tilde{S}_4 = [x_1 = L, \varphi_1(L) \leq x_2 \leq \varphi_2(L)], \quad \tilde{\Omega}_T = \tilde{\Omega} \times [0, T], \quad \tilde{S}_T = \tilde{S} \times [0, T], \\ \bar{\tilde{\Omega}}_T &= \bar{\tilde{\Omega}} \times [0, T], \quad \Omega_1 = [0 \leq x_1 \leq L, 0 < x_2 \leq \varepsilon], \quad \Omega_2 = [0 \leq x_1 \leq L, H - \varepsilon \leq x_2 < H], \\ \Omega_{iT} &= \Omega_i \times [0, T], \quad i = 1, 2, \quad \Omega' = [0 \leq x_1 \leq L, \varepsilon_1 < x_2 < H - \varepsilon_1], \quad \Omega'_T = \Omega' \times [0, T], \quad \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}, \\ S'_1 &= [0 \leq x_1 \leq L, x_2 = \varepsilon_1], \quad S'_2 = [0 \leq x_1 \leq L, x_2 = H - \varepsilon_1], \quad S'_{iT} = S'_i \times [0, T], \quad i = 1, 2, \\ \theta_i(x_1), \varphi_i(x_1), \quad (i = 1, 2) &- \text{ строго монотонные функции. Пусть, кроме того,} \\ \theta_1(0) = \varphi_1(L) = \varepsilon_1, \quad \theta_2(0) = \varphi_2(L) = H - \varepsilon_1, \quad \theta_1\left(\frac{\delta}{2}\right) = \varphi_1\left(L - \frac{\delta}{2}\right) = 0, \quad \theta_2\left(\frac{\delta}{2}\right) = \varphi_2\left(L - \frac{\delta}{2}\right) = H. \end{aligned}$$

Считаем, что θ_2 симметрична θ_1 , а $\varphi_2 - \varphi_1$ относительно прямой $x_2 = \frac{H}{2}$. Таким образом, области $\bar{\tilde{\Omega}}, \tilde{\Omega}$ симметричны относительно той же прямой $x_2 = \frac{H}{2}$. Здесь ε, δ – малые положительные числа, $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$.

На рис. 1 изображен канал и обозначены некоторые участки границ.

Для постановки задачи и получения априорных оценок нам потребуется срезающая функция, которую определим так:

$$\zeta(x) = \zeta'(x)\zeta''(x),$$

где $\zeta'(x) = 1$, если $\delta \leq x_1 \leq L - \delta, 0 \leq x_2 \leq H$,

$$0 \leq \zeta'(x) \leq 1,$$

если $\left[\frac{\delta}{2} \leq x_1 \leq \delta\right] \cup \left[L - \delta \leq x_1 \leq L - \frac{\delta}{2}\right], 0 \leq x_2 \leq H$,

$$\zeta'(x) = 0,$$

если $\left[0 \leq x_1 \leq \frac{\delta}{2}\right] \cup \left[L - \frac{\delta}{2} \leq x_1 \leq L\right], [\theta_1(x_1) \leq x_2 \leq \theta_2(x_1)] \cup [\varphi_1(x_1) \leq x_2 \leq \varphi_2(x_1)]$,

$$\zeta''(x) = 1,$$

если $0 \leq x_1 \leq L, \varepsilon \leq x_2 \leq H - \varepsilon$,

$$0 \leq \zeta''(x) \leq 1,$$

если $[\varepsilon_1 \leq x_2 \leq \varepsilon] \cup [H - \varepsilon \leq x_2 \leq H - \varepsilon_1], 0 \leq x_1 \leq L$,

$$\zeta''(x) = 0,$$

$$[0 \leq x_2 \leq \varepsilon_1] \cup [H - \varepsilon_1 \leq x_2 \leq H], \left[\theta_1^{-1}(x_2) \leq x_1 \leq \varphi_1^{-1}(x_2)\right] \cup \left[\theta_2^{-1}(x_2) \leq x_1 \leq \varphi_2^{-1}(x_2)\right].$$

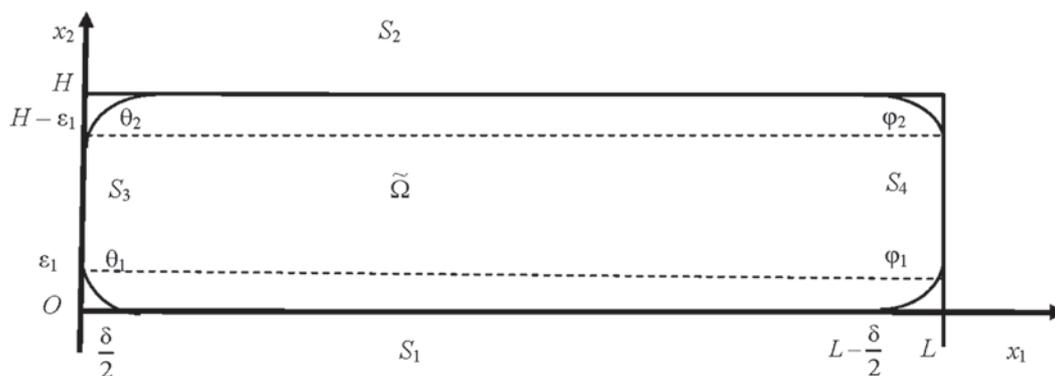


Рис. 1
Fig. 1

Будем предполагать, что $\zeta(x) \in C_{l,\alpha}(\bar{\Omega})$, $\tilde{S} \in C_{l,\alpha}$. Здесь $l \geq 5$, $\alpha \in (0,1)$, а классы функций $C_{l,\alpha}(\bar{\Omega})$, $C_{l,\alpha}(S)$ и смысл принадлежности $S \in C_{l,\alpha}$ определены в [8].

Рассмотрим задачу (плотность $\rho = 1$):

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \nu \sum_{k=1}^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_k^2} - \sum_{k=1}^2 u_k \frac{\partial u_1}{\partial x_k} - \frac{\partial p}{\partial x_1}, \quad (x,t) \in \tilde{\Omega}_T, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0, \quad (x,t) \in \tilde{\Omega}_T, \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x_k^2} + \sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = 0, \quad (x,t) \in \tilde{\Omega}_T, \quad (3)$$

$$u_1|_{t=0} = \bar{b}(x), \quad \bar{b}|_{S_1 \cup S_2} = 0, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad u_1|_{\tilde{S}_T} = \tilde{\psi}_1(s,t), \quad (s,t) \in \tilde{S}_T, \quad (4)$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} \Big|_{\tilde{S}_T} = \zeta(s) \sum_{j=1}^2 \omega_j(s,t) \cos \alpha_j, \quad (s,t) \in \tilde{S}_T, \quad (5)$$

$$u_2(s,0)|_{S_1 \cup S_2} = 0, \quad (6)$$

$$\int_0^H \frac{\partial \bar{b}(x_1, z)}{\partial x_1} dz = 0, \quad 0 \leq x_1 \leq L, \quad (7)$$

где u_1, u_2 – продольная и поперечная компоненты скорости текущей жидкости соответственно, p – давление жидкости.

При этом для уравнения (2) (при $t > 0$) задача ставится следующим образом (функция u_1 перед этим доопределяется при соответствующем значении времени в четырех криволинейных треугольниках, расположенных по углам $\bar{\Omega}_T$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0, \quad (x,t) \in \Omega_{1T}, \quad u_2|_{S_{1T}} = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0, \quad (x,t) \in \Omega_{2T}, \quad u_2|_{S_{2T}} = 0, \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \quad (x,t) \in \Omega'_T, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \Big|_{S'_{1T}} = g_1(x_1, \varepsilon_1, t), \quad u_2|_{S'_{2T}} = g_2(x_1, H - \varepsilon_1, t), \end{aligned}$$

где

$$g_1(x_1, \varepsilon_1, t) = - \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \Big|_{S'_{1T}}, \quad g_2(x_1, H - \varepsilon_1, t) = - \int_H^{H-\varepsilon_1} \frac{\partial u_1(x_1, z, t)}{\partial x_1} dz.$$

Такая постановка задачи позволяет найти решение уравнения (2), удовлетворяющее условиям прилипания на обеих стенках канала.

В условиях (4) и (5) $\tilde{\psi}_1(s,t) \in C_{l,\alpha}(\tilde{S}_T)$, $\tilde{\psi}_1|_{t=0} = \bar{b}(s)$, $x = s \in \tilde{S}$, $\tilde{\psi}_1 = 0$ при $\frac{\delta}{2} \leq x_1 \leq L - \frac{\delta}{2}$, $[x_2 = 0] \cup [x_2 = H]$, $t \in [0, T]$; $\frac{\partial p}{\partial n} \Big|_{\tilde{S}_T}$ – производная по направлению вектора \bar{n} внутренней нормали к \tilde{S}_T ; α_i – угол между вектором \bar{n} и осью Ox_i ; $\omega_i(s,t) = \nu \sum_{k=1}^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} - \sum_{k=1}^2 u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_i}{\partial t}$, $(s,t) \in \tilde{S}_T$, при $t = 0$ $\frac{\partial u_i}{\partial t} = 0$.

В работе [11] предложен численный метод решения задачи (1)–(7), при реализации которого были получены распределения поперечной и продольной компонент скорости течения жидкости, а также распределение давления. Сравнение последнего проводилось по длине канала (результаты представлены на рис. 3, а, б в [11]).

Представим распределения поперечной и продольной компонент скорости, найденные в [11] и позволяющие четко определить понятие стержневого течения жидкости (рис. 2 и 3 соответственно). Обозначения, принятые в данной работе, находятся в следующих соотношениях:

$$x_2 = y + h, \quad u_2 = v, \quad H = 2h, \quad x_1 = x, \quad u_1 = u.$$

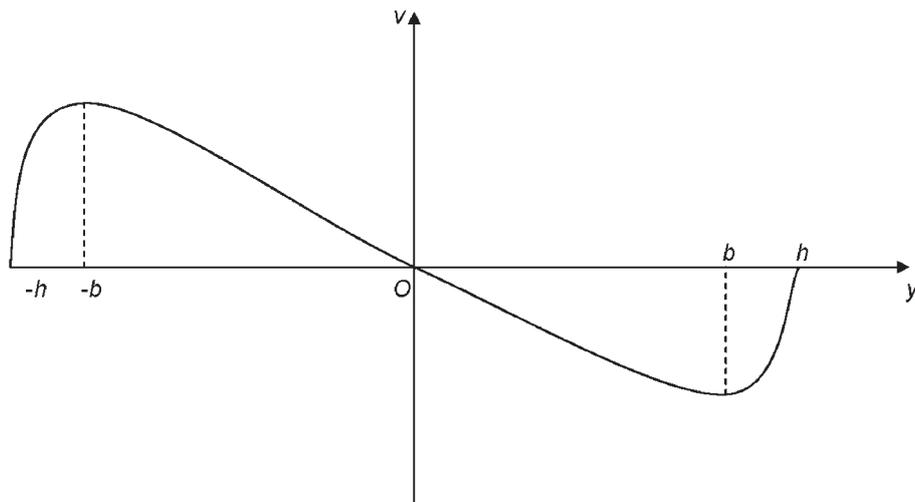


Рис. 2. Распределение поперечной компоненты скорости по ширине канала
 Fig. 2. Distribution of the transverse velocity component over the channel width

На рис. 2 представлено распределение поперечной компоненты скорости u_2 ($u_2 = v$) в направлении координаты x_2 ($x_2 = y$) в сечении канала $x_1 = c$ ($0 < c < L$).

О п р е д е л е н и е 1. Область течения, в которой $\frac{\partial v}{\partial y} < 0$ ($-b < y < b$), называется *стержнем течения* (см. рис. 2).

На рис. 3 показано распределение продольной компоненты скорости u_1 ($u_1 = u$) в направлении координаты $x_2 = y$ в двух сечениях канала $x_1 = c_1$ (кривая 1) и $x_1 = c_2$ (кривая 2), где $0 \leq c_1 < c_2 < L$. Как видим, при движении по каналу в направлении от входа к выходу пограничные слои расширяются, а ядро течения сужается. В масштабе рис. 3 при произвольном значении $x_1 = c$, где $0 < c < L$, точки $y = h$, $y = b$ (а также точки $y = -h$, $y = -b$) почти сливаются. Значит, стержень включает в себя ядро течения и значительные части пограничных слоев, образующихся около стенок канала, т. е. стержень течения занимает почти всю его область, кроме тоненьких оболочек между ним и каждой из стенок.

О п р е д е л е н и е 2. Течение жидкости, которое имеет структуру, представленную на рис. 2, 3, называется *стержневым течением*.

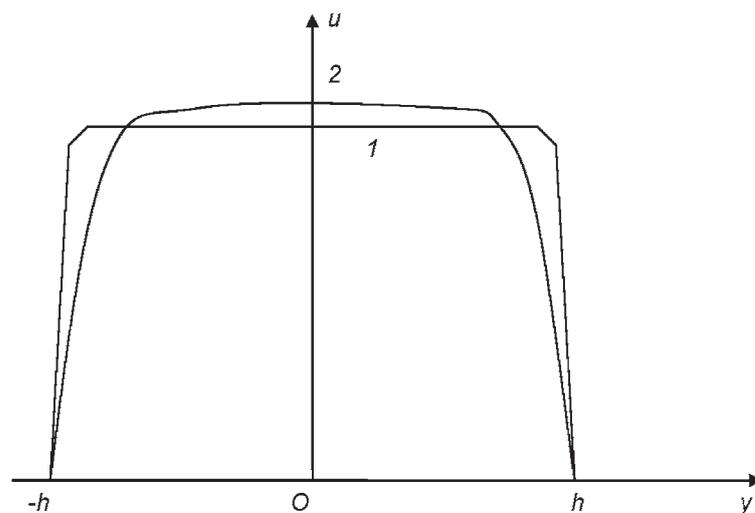


Рис. 3. Распределение продольной скорости по ширине канала:
 кривая 1 – сечение на входе в канал; кривая 2 – сечение на некотором расстоянии от входа в канал

Fig. 3. Distribution of the transverse velocity component over the channel width:
 curve 1 – cross section at the channel inlet; curve 2 – cross section at some distance from the channel inlet

Переходим к задаче (1)–(7). При $t = 0$ функция $u_1(x, 0) = \bar{b}(x)$ задана. Найдем при $t = 0$ функцию u_2 , решая (2) с граничным условием $u_2|_{S_1} = 0$ ($0 \leq x_1 \leq L, 0 < x_2 \leq H$) [1].

Зная функции u_1, u_2 , решаем (3) с условием ($t = 0$)

$$\frac{\partial p}{\partial n}\Big|_{\tilde{S}_T} = \zeta(s) \sum_{j=1}^2 \omega_j(s, t) \cos \alpha_j, \quad (s, t) \in \tilde{S}_T,$$

где $\frac{\partial p}{\partial n}\Big|_{\tilde{S}_T}$ – производная по направлению вектора \bar{n} внутренней нормали к \tilde{S} , α_i – угол между вектором \bar{n} и осью Ox_i ,

$$\omega_i = v \sum_{k=1}^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} - \sum_{k=1}^2 u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}.$$

Разобьем пространство (x, t) плоскостями $t_m = m\tau$, $m = 0, 1, 2, \dots, M$, на слои и предположим, для сокращения записи, что $M\tau = T$. Пусть $\tilde{\Omega}_m$ есть сечение $\tilde{\Omega}_T$ плоскостью $t_m = m\tau$, \tilde{S}_m – его граница $\tilde{\Omega}_m = \tilde{\Omega}_m \cup \tilde{S}_m$.

На каждом слое $\tilde{\Omega}_m$ определим функции, которые будем обозначать $u_{1,m}, u_{2,m}, p_m, m = \overline{0, M}$. Выше было найдено решение при $t = 0$, т. е. решение $u_{1,0}, u_{2,0}, p_0$. Для нахождения функции u_1 на слоях $\tilde{\Omega}_m$ полагаем:

$$u_1|_{\tilde{S}_T} = \tilde{\psi}_1(s, t), \quad (s, t) \in \tilde{S}_T,$$

где $\tilde{\psi}_1(s, t) \in C_{l,\alpha}(\tilde{S}_T)$, $\tilde{\psi}_1|_{t=0} = \bar{b}(s)$, $x = s \in \tilde{S}$; $\tilde{\psi}_1 = 0$ при $\frac{\delta}{2} \leq x_1 \leq L - \frac{\delta}{2}$, $[x_2 = 0] \cup [x_2 = H]$, $t \in [0, T]$, и преобразуем задачу для u_1 в задачу с нулевым граничным условием. Вводя в рассмотрение функцию $f(x, t)$, удовлетворяющую при любом $t \in [0, T]$ условию $f \in C_{l+1,\alpha}(\tilde{\Omega})$, $f|_{\tilde{S}_T} = \tilde{\psi}_1|_{\tilde{S}_T}$, и новую искомую функцию $w(x, t)$, удовлетворяющую равенству $u_1(x, t) = w(x, t) + f(x, t)$, для $w(x, t)$ получаем задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} - v \sum_{k=1}^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_k^2} + (w + f) \frac{\partial w}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial w}{\partial x_2} + \frac{\partial f}{\partial x_1} w + u_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + F(x, t) + \frac{\partial p}{\partial x_1} = 0, \quad (8) \\ w|_{\tilde{S}_T} = 0, \quad w|_{t=0} = \bar{b}(x) - f|_{t=0}, \quad x \in \tilde{\Omega}, \quad \bar{b}(x) - f|_{t=0} = 0, \quad x = s \in \tilde{S}, \end{aligned}$$

где

$$F(x, t) = \frac{\partial f}{\partial t} - v \sum_{k=1}^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} + f \frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad F \in C_{l-1,\alpha}(\tilde{\Omega}).$$

Вводя обозначения $g_{\bar{t}}(x, t_m) = \frac{1}{\tau} \left(g_m - \overset{\vee}{g}_m \right)$, $g_m = g(x, t_m)$, $\overset{\vee}{g}_m = g(x, t_{m-1})$, полагая $w_m = u_{1,m} - f_m$ и заменяя $\frac{\partial w}{\partial t}$ на разностную производную $w_{\bar{t}}(x, t_m)$, запишем уравнение (8) в виде

$$\begin{aligned} v \sum_{k=1}^2 \frac{\partial^2 w_m}{\partial x_k^2} - (w_m + f_m) \frac{\partial w_m}{\partial x_1} - \overset{\vee}{u}_{2,m} \frac{\partial w_m}{\partial x_2} - \frac{\partial f_m}{\partial x_1} w_m - \overset{\vee}{u}_{2,m} \frac{\partial f_m}{\partial x_2} - \frac{1}{\tau} w_m + \frac{1}{\tau} \overset{\vee}{w}_m - F_m - \frac{\partial \overset{\vee}{p}_m}{\partial x_1} = 0, \quad (9) \\ w_m|_{\tilde{S}_m} = 0, \quad F_m = f_{\bar{t}}(x, t_m) - v \sum_{k=1}^2 \frac{\partial^2 f_m}{\partial x_k^2} + f_m \frac{\partial f_m}{\partial x_1}. \end{aligned}$$

Будем полагать, что в $\tilde{\Omega}_T$ функция $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ полуограничена снизу, т. е.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} \geq \beta_1 = \text{const}. \quad (10)$$

Тогда при выполнении неравенства $\frac{1}{\tau} + \beta_1 > 0$ уравнение (9) с нулевым граничным условием при $m = 1$ имеет единственное решение $w_1 \in C_{l,\alpha}(\bar{\tilde{\Omega}})$. Зная w_1 , из соотношения $u_1 = w + f$ находим $u_{1,1} \in C_{l,\alpha}(\bar{\tilde{\Omega}}_1)$. Продолжим $u_{1,1}$, найденную на $\bar{\tilde{\Omega}}$, на всю область $\bar{\Omega}$, доопределив ее в четырех криволинейных треугольниках, расположенных по углам $\bar{\Omega}$. Рассмотрим, например, треугольник с вершинами $(0,0), (0,\varepsilon_1), (\frac{\delta}{2},0)$. Его криволинейная сторона задается уравнением $x_2 = \theta_1(x_1)$ ($x_1 = \theta_1^{-1}(x_2)$). Полагаем $u_{1,1}(x) = u_{1,1}(x_1, x_2) = u_{1,1}(\theta_1^{-1}(x_2), x_2)$ при $0 \leq x_1 \leq \theta_1^{-1}(x_2)$, $0 \leq x_2 \leq \varepsilon_1$. На остальные криволинейные треугольники продолжение осуществляется аналогично. Функцию $u_{1,1}(x)$ ($t = \tau$), определенную указанным образом на всей $\bar{\Omega}$, обозначаем $u_1(x)$ и решаем уравнение (2) для нахождения $u_2(x)$. Отметим, что условие вида (7) для $u_1(x)$ в общем случае не выполняется и не удастся найти функцию u_2 , удовлетворяющую условию $u_2|_{S_1 \cup S_2} = 0$, решая только уравнение (2).

Поэтому решаем (2) в областях $\Omega_1 = [0 \leq x_1 \leq L, 0 < x_2 \leq \varepsilon]$ и $\Omega_2 = [0 \leq x_1 \leq L, H - \varepsilon \leq x_2 < H]$ с граничными условиями

$$u_2|_{x_2=0} = 0, \quad u_2|_{x_2=H} = 0.$$

Для любого x_2 : $0 < x_2 \leq \varepsilon$ получаем:

$$u_2(x_1, x_2) = - \int_0^{x_2} \frac{\partial u_1(x_1, z)}{\partial x_1} dz, \quad u_2(x_1, H - x_2) = - \int_H^{H-x_2} \frac{\partial u_1(x_1, z)}{\partial x_1} dz.$$

Затем интегрируем уравнение

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$$

в области $[0 \leq x_1 \leq L, \varepsilon_1 < x_2 < H - \varepsilon_1]$, $(\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2})$, с граничными условиями

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \Big|_{x_2=\varepsilon_1} = - \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \Big|_{x_2=\varepsilon_1}, \quad u_2|_{x_2=H-\varepsilon_1} = - \int_H^{H-\varepsilon_1} \frac{\partial u_1(x_1, z)}{\partial x_1} dz.$$

Зная функции u_1, u_2 , решаем (3) с условием ($t = \tau$):

$$\frac{\partial p}{\partial n} \Big|_{\tilde{S}} = \zeta(s) \sum_{j=1}^2 \omega_j(s) \cos \alpha_j, \quad s \in \tilde{S}, \tag{11}$$

где $\frac{\partial p}{\partial n} \Big|_{\tilde{S}}$ – производная по направлению вектора \bar{n} внутренней нормали к \tilde{S} , α_i – угол между вектором \bar{n} и осью Ox_i , $\omega_i = v \sum_{k=1}^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} - \sum_{k=1}^2 u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_i}{\partial t}$, а $\frac{\partial u_i}{\partial t}$ заменена разностной производной

$$u_{i\bar{t}}(x, t_1) = \frac{1}{\tau} \left(u_{i,1} - u_{i,1}^v \right).$$

Итак, при $t = t_1 = \tau$ получены функции w_1, u_1, u_2, p , т. е. найдены $w_1, u_{1,1}, u_{2,1}, p_1$ на слое $\tilde{\Omega}_1$. Переходим на слой $\tilde{\Omega}_2$ и находим $w_2, u_{1,2}, u_{2,2}, p_2$ и т. д.

Оценка модуля решения w_m . Рассматривая уравнение (9), опуская нижний индекс m и вводя обозначения $\frac{\partial z}{\partial x_i} = z_{x_i}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_i^2} = z_{x_i x_i}, w + f = \bar{f}, u_2 f_{x_2} + F + p_{x_1} = d$, получаем

$$w_{\bar{t}} - v \sum_{k=1}^2 w_{x_k x_k} + \bar{f} w_{x_1} + u_2 w_{x_2} + f_{x_1} w + d = 0. \tag{12}$$

В уравнении (12) делаем замену $w = ge^{\beta t}$ ($t = t_m$) и замечаем, что

$$w_t = \frac{1}{\tau} \left(ge^{\beta t} - \overset{\vee}{g} e^{\beta(t-\tau)} \pm ge^{\beta(t-\tau)} \right) = \frac{1}{\tau} e^{\beta(t-\tau)} \left(g - \overset{\vee}{g} \right) + \frac{1}{\tau} ge^{\beta t} (1 - e^{-\beta\tau}).$$

Получаем

$$g_t^- e^{-\beta\tau} - \overset{\vee}{v} \sum_{k=1}^2 g_{x_k x_k} + \bar{f} g_{x_1} + u_2 g_{x_2} + g \left(\frac{1 - e^{-\beta\tau}}{\tau} + f_{x_1} \right) + \frac{d}{e^{\beta t}} = 0. \quad (13)$$

Легко показать, что при $\beta = \text{const} > 0$ $\frac{1 - e^{-\beta\tau}}{\tau} > \beta e^{-\beta\tau}$ и, если $\tau_1 = \text{const} > 0$ такая, что верно неравенство $\frac{1}{\tau_1} + \frac{e^2}{2} \beta_1 > 0$, то существует $\beta > 0$, например $\beta = \frac{2}{\tau_1}$, и при $0 < \tau < \tau_1$ верна цепочка неравенств (см. (10))

$$\beta e^{-\beta\tau} + f_{x_1} \geq \beta e^{-\beta\tau} + \beta_1 > \beta e^{-\beta\tau_1} + \beta_1 > 0. \quad (14)$$

Для функции g , удовлетворяющей уравнению (13), возможны три случая: а) ее максимум в области $\tilde{\Omega}_T$ достигается при $t = 0$, и тогда $g \leq \max \left[\bar{b}(x) - f|_{t=0} \right]$; б) $g \leq 0$; в) положительный максимум достигается в некоторой внутренней точке $(x_0, t_{m_0}) \in \tilde{\Omega}_T$, $m_0 \geq 1$. В этом последнем случае в точке (x_0, t_{m_0}) выполняются условия

$$g_t \geq 0, \quad \forall g_{x_i x_i} \leq 0, \quad i = 1, 2, \quad g_{x_i} = 0, \quad i = 1, 2,$$

и из (13) следует

$$g \left(\frac{1 - e^{-\beta\tau}}{\tau} + f_{x_1} \right) + \frac{d}{e^{\beta t}} \leq 0,$$

а с учетом (14) получаем

$$g \leq \frac{-de^{-\beta t}}{\beta e^{-\beta\tau_1} + \beta_1}.$$

Аналогично устанавливается оценка для g снизу. В результате получаем

$$|w_m| \leq C_1, \quad \text{где } C_1 = e^{\beta T} \left[\max_{x \in \tilde{\Omega}} \left| \bar{b}(x) - f|_{t=0} \right| + \max_{\tilde{\Omega}_T} \left| \frac{de^{-\beta t}}{\beta e^{-\beta\tau_1} + \beta_1} \right| \right]. \quad (15)$$

Оценка первых производных w_m по x_i . Сначала оценим указанные производные на границе \tilde{S}_T , оценивая их на левой, правой, нижней и верхней частях этой границы. Рассмотрим левую часть границы $S'_3 \times [0, T]$,

$$S'_3 = [0 \leq x_2 < \varepsilon_1, x_1 = \theta_1^{-1}(x_2)] \cup [\varepsilon_1 \leq x_2 \leq H - \varepsilon_1, x_1 = 0] \cup [H - \varepsilon_1 < x_2 \leq H, x_1 = \theta_2^{-1}(x_2)],$$

функцию

$$x_1 = \psi(x_2) = \begin{cases} \theta_1^{-1}(x_2), & 0 \leq x_2 < \varepsilon_1 \\ 0, & \varepsilon_1 \leq x_2 \leq H - \varepsilon_1 \\ \theta_2^{-1}(x_2), & H - \varepsilon_1 < x_2 \leq H \end{cases},$$

которая задает S'_3 , и функцию $\chi(x) = \chi(x_1, x_2) = N_1 e^{-N_2(x_1 - \psi(x_2))}$ ($N_1 > 0, N_2 > 0$). Вводя обозначения

$$D_1 = \overset{\vee}{v} \sum_{k=1}^2 \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} - \bar{f} \frac{\partial}{\partial x_1} - u_2 \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad D_2 = \left(\int_0^t \frac{\partial}{\partial s} ds \right)_t - D_1,$$

получаем

$$D_1\chi = N_1 \left[vN_2^2 \left(1 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_2} \right)^2 \right) + N_2 \left(v \frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2} + \bar{f} - u_2 \frac{\partial\psi}{\partial x_2} \right) \right] e^{-N_2(x_1 - \psi(x_2))}.$$

Наибольшее положительное значение $\chi(x)$ принимает на S'_3 , так как для любой точки $x \in \bar{\tilde{\Omega}}$ $x_1 - \psi(x_2) \geq 0$, а для любой точки $x \in S'_3$ $x_1 - \psi(x_2) = 0$, и при достаточно больших N_1, N_2

$$D_1\chi > \max_{\substack{(x,t) \in \tilde{\Omega}_T \\ |w| \leq C_1}} |f_{x_1} w + d|, \quad \chi|_{S'_3} = N_1 \geq \chi(x) + \left| \bar{b}(x) - f \right|_{t=0} \Big|_{x \in \tilde{\Omega}}. \quad (16)$$

Рассмотрим функцию $w + \chi$ ($w = w_m, m = \overline{0, M}$). Для нее (в силу (12) и (16))

$$D_2(w + \chi) = w_t^- - D_1 w - D_1 \chi = -f_{x_1} w - d - D_1 \chi < 0$$

в области $\tilde{\Omega}_T$, тогда как в точке максимума функции $w + \chi$ должно быть $D_2(w + \chi) \geq 0$. Далее

$$(w + \chi)|_{S'_3} = N_1 \geq (w + \chi)|_{\tilde{S}}, \quad (w + \chi)|_{t=0} = \chi(x) + \left| \bar{b}(x) - f \right|_{t=0} \Big|_{x \in \tilde{\Omega}} \leq N_1.$$

Отсюда следует, что свое наибольшее значение $w + \chi$ принимает на $S'_{3,T} = S'_3 \times [0, T]$ и $\frac{\partial w}{\partial n} \Big|_{S'_{3,T}} \geq -\frac{\partial \chi}{\partial n} \Big|_{S'_{3,T}}$.

Рассмотрение функции $w - \chi$ позволяет установить неравенство $\frac{\partial w}{\partial n} \Big|_{S'_{3,T}} \leq \frac{\partial \chi}{\partial n} \Big|_{S'_{3,T}}$, а рассмотрение остальных трех частей границы приводит к оценке

$$|w_{x_i}|_{\tilde{S}_T} \leq C_{2s}. \quad (17)$$

Далее могут быть установлены оценки во внутренних точках $\tilde{\Omega}_T$:

$$|w_{x_i}|_{\tilde{\Omega}_T} \leq C_2, \quad |w_{x_i x_j}|_{\tilde{\Omega}_T} \leq C_3, \quad \bar{\tilde{\Omega}}_T \subset \tilde{\Omega}_T, \quad (18)$$

но поскольку устанавливаются они похожими способами, а вторая из оценок (18) доказывается сложнее, то первую из этих оценок будем считать установленной, а второе неравенство из (18) будем доказывать.

Оценка вторых производных w_m по $x_i x_j$. Введем вспомогательные функции $g_i (i = 1, 2)$ следующим образом:

$$w_{x_i} = b(g_i), \quad b(g_i) = -2C_2 + 3aC_2 e \int_0^{g_i} e^{-s} ds, \quad (19)$$

где C_2 – константа из (18), $a > 1$, $h > 1$ – константы, которые определяются ниже. Из (19) следует

$$w_{x_i x_k} = b'(g_i) g_{ix_k} = 3aeC_2 e^{-g_i} g_{ix_k}, \quad w_{x_i x_k x_k} = b'(g_i) g_{ix_k x_k} - b'(g_i) h g_i^{h-1} g_{ix_k}^2.$$

Дифференцируем (12) по x_i ($f_{x_1} = \tilde{f}$, $w_m = w$):

$$w_{ix_i}^- - v \sum_{k=1}^2 w_{x_k x_k x_i} + \bar{f} w_{x_1 x_i} + u_2 \overset{\vee}{w}_{x_2 x_i} = -\bar{f}_{x_i} w_{x_1} - u_{2x_i} \overset{\vee}{w}_{x_2} - (\tilde{f} w)_{x_i} - d_{x_i},$$

обозначаем правую часть через I_1 , подставляем в последнее уравнение найденные выражения для $w_{x_i x_k}$, $w_{x_i x_k x_k}$, и делим его на $b'(g_i)$:

$$\frac{e^{g_i^h}}{\tau} \left(\frac{g_i^{(m)}}{g_i^{(m-1)}} \int e^{-s^h} ds \right) - \nu \sum_{k=1}^2 g_{ix_k x_k} + \nu h g_i^{h-1} \sum_{k=1}^2 (g_{ix_k})^2 + \bar{f} g_{ix_1} + u_2 \overset{\vee}{g}_{ix_2} = \frac{I_1}{b'(g_i)} \equiv I_2.$$

Полученное равенство дифференцируем по x_j :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} \left(e^{g_i^h} \left(m \frac{g_i^{(m)}}{g_i^{(m-1)}} \int e^{-s^h} ds \right) \right)_{x_j} - \nu \sum_{k=1}^2 g_{ix_j x_k x_k} + \nu h(h-1) g_i^{h-2} g_{ix_j} \sum_{k=1}^2 (g_{ix_k})^2 + 2\nu h g_i^{h-1} \sum_{k=1}^2 g_{ix_k} g_{ix_j x_k} + \\ + \bar{f} g_{ix_j x_1} + u_2 \overset{\vee}{g}_{ix_j x_2} + \bar{f}_{x_j} g_{ix_1} + u_{2x_j} \overset{\vee}{g}_{ix_2} = I_{2x_j} \equiv I_3. \end{aligned} \quad (20)$$

Введем в рассмотрение функции $r_{ij} = \zeta g_{ix_j}$. Верны следующие равенства:

$$\zeta g_{ix_j x_k} = r_{ijx_k} - \frac{\zeta_{x_k}}{\zeta} r_{ij}, \quad \zeta g_{ix_j x_k x_k} = r_{ijx_k x_k} - 2 \frac{\zeta_{x_k}}{\zeta} r_{ijx_k} + \left(\frac{2\zeta_{x_k}^2}{\zeta^2} - \frac{\zeta_{x_k x_k}}{\zeta} \right) r_{ij}.$$

Умножая (20) на ζ и используя последние равенства, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\zeta}{\tau} \left(e^{g_i^h} \left(m \frac{g_i^{(m)}}{g_i^{(m-1)}} \int e^{-s^h} ds \right) \right)_{x_j} - \nu \sum_{k=1}^2 \left[r_{ijx_k x_k} - 2 \frac{\zeta_{x_k}}{\zeta} r_{ijx_k} + \left(\frac{2\zeta_{x_k}^2}{\zeta^2} - \frac{\zeta_{x_k x_k}}{\zeta} \right) r_{ij} \right] + \\ + \nu h(h-1) g_i^{h-2} r_{ij} \sum_{k=1}^2 (g_{ix_k})^2 + 2\nu h g_i^{h-1} \sum_{k=1}^2 g_{ix_k} \left(r_{ijx_k} - \frac{\zeta_{x_k}}{\zeta} r_{ij} \right) + \\ + \bar{f} \left(r_{ijx_1} - \frac{\zeta_{x_1}}{\zeta} r_{ij} \right) + u_2 \left(r_{ijx_2} - \frac{\zeta_{x_2}}{\zeta} r_{ij} \right) + \bar{f}_{x_j} r_{i1} + u_{2x_j} \overset{\vee}{r}_{i2} = \zeta I_3. \end{aligned} \quad (21)$$

Умножаем (21) на $\zeta^2 r_{ij}$ и полученные равенства ($j=1,2$) суммируем по j от 1 до 2 (при этом опустим первое самое громоздкое слагаемое, которое ниже оценим отдельно):

$$\begin{aligned} -\nu \zeta^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \left[r_{ij} r_{ijx_k x_k} - 2 \frac{\zeta_{x_k}}{\zeta} r_{ij} r_{ijx_k} + \left(\frac{2\zeta_{x_k}^2}{\zeta^2} - \frac{\zeta_{x_k x_k}}{\zeta} \right) r_{ij}^2 \right] + \nu h(h-1) g_i^{h-2} \sum_{j=1}^2 r_{ij}^2 \sum_{k=1}^2 r_{ik}^2 + \\ + 2\nu h g_i^{h-1} \sum_{j=1}^2 r_{ij} \sum_{k=1}^2 r_{ik} (\zeta r_{ijx_k} - \zeta_{x_k} r_{ij}) + \zeta^2 \sum_{j=1}^2 r_{ij} \left(\bar{f}_{x_j} r_{i1} + u_{2x_j} \overset{\vee}{r}_{i2} \right) + \zeta \bar{f} \sum_{j=1}^2 (\zeta r_{ij} r_{ijx_1} - \zeta_{x_1} r_{ij}^2) + \\ + \zeta u_2 \sum_{j=1}^2 (\zeta r_{ij} r_{ijx_2} - \zeta_{x_2} r_{ij}^2) = \zeta^3 \sum_{j=1}^2 r_{ij} I_3. \end{aligned} \quad (22)$$

Оценим слагаемое, которое было опущено при получении (22):

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{\zeta^4}{\tau} \sum_{j=1}^2 \left[g_{ix_j} \left(m \frac{g_i^{(m)}}{g_i^{(m-1)}} \int e^{-s^h} ds \right) \right]_{x_j} = \\ &= \frac{\zeta^4}{\tau} \sum_{j=1}^2 \left[g_{ix_j} \left(m \frac{g_i^{(m)}}{g_i^{(m-1)}} \int e^{-s^h} ds + e^{-g_i^h} g_{ix_j} \right) - e^{-g_i^h} g_{ix_j} \right]_{x_j} = \\ &= \frac{\zeta^4}{\tau} \sum_{j=1}^2 \left[g_{ix_j} \left(m \frac{g_i^{(m)}}{g_i^{(m-1)}} \int e^{-s^h} ds + g_{ix_j} \right) - e^{g_i^h(m) - g_i^h(m-1)} g_{ix_j} \right]_{x_j}. \end{aligned}$$

Пусть $J_2 = h g_i^{h-1} \left(m \frac{g_i^{(m)}}{g_i^{(m-1)}} \int e^{-s^h} ds \right)$. Тогда при $g_i(m-1) \leq g_i(m)$ верна цепочка неравенств

$$J_2 \geq h \int_{g_i(m-1)}^{g_i(m)} s^{h-1} e^{g_i^h(m)-s^h} ds = -e^{g_i^h(m)-s^h} \Big|_{g_i(m-1)}^{g_i(m)} = e^{g_i^h(m)-g_i^h(m-1)} - 1.$$

При $g_i(m-1) \geq g_i(m)$ верна цепочка

$$|J_2| \leq h \int_{g_i(m)}^{g_i(m-1)} s^{h-1} e^{g_i^h(m)-s^h} ds = -e^{g_i^h(m)-s^h} \Big|_{g_i(m)}^{g_i(m-1)} = 1 - e^{g_i^h(m)-g_i^h(m-1)},$$

из которой следует $J_2 \geq e^{g_i^h(m)-g_i^h(m-1)} - 1$. Значит, в обоих случаях $J_2 \geq e^{g_i^h(m)-g_i^h(m-1)} - 1$. Поэтому

$$\begin{aligned} J_1 &\geq \frac{\zeta^4}{\tau} \sum_{j=1}^2 \left[g_{ix_j}(m) \left(g_{ix_j}(m) \left(e^{g_i^h(m)-g_i^h(m-1)} - 1 \right) + g_{ix_j}(m) - e^{g_i^h(m)-g_i^h(m-1)} g_{ix_j}(m-1) \right) \right] = \\ &= \frac{\zeta^4}{\tau} \sum_{j=1}^2 \left[g_{ix_j}(m) e^{g_i^h(m)-g_i^h(m-1)} \left(g_{ix_j}(m) - g_{ix_j}(m-1) \right) \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

Теперь вводим функцию $q = \sqrt{\sum_{j=1}^2 r_{ij}^2}$ и рассматриваем (22) в точке (x_0, t_{m_0}) максимума функции $q^2 = \sum_{j=1}^2 r_{ij}^2$, где $m_0 \geq 1$, а x_0 является внутренней точкой $\tilde{\Omega}$ (она находится в области, где $\zeta \neq 0$).

Так как в точке (x_0, t_{m_0})

$$\left(q^2 \right)_{x_k} = 2 \sum_{j=1}^2 r_{ij} r_{ijx_k} = 0, \quad \left(q^2 \right)_{x_k x_k} = 2 \sum_{j=1}^2 r_{ijx_k}^2 + 2 \sum_{j=1}^2 r_{ij} r_{ijx_k x_k} \leq 0,$$

т. е.

$$\sum_{j=1}^2 r_{ijx_k}^2 \leq - \sum_{j=1}^2 r_{ij} r_{ijx_k x_k},$$

и из (23) следует $J_1 \geq 0$, то из (22) получаем

$$\begin{aligned} &v\zeta^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 r_{ijx_k}^2 + v h(h-1) g_i^{h-2} q^4 + 2\zeta v h g_i^{h-1} \sum_{j=1}^2 r_{ij} \sum_{k=1}^2 r_{ik} r_{ijx_k} \leq v \sum_{k=1}^2 \left(2\zeta_{x_k}^2 - \zeta \zeta_{x_k x_k} \right) q^2 + \\ &+ 2v h g_i^{h-1} \sum_{j=1}^2 r_{ij}^2 \sum_{k=1}^2 \zeta_{x_k} r_{ik} + \bar{f} \zeta \zeta_{x_1} q^2 + u_2 \zeta \zeta_{x_2} q^2 - \zeta^2 \sum_{j=1}^2 r_{ij} \left(\bar{f}_{x_j} r_{i1} + u_{2x_j} r_{i2} \right) + \zeta^3 \sum_{j=1}^2 r_{ij} I_3. \end{aligned} \quad (24)$$

Из (19) следует: если $w_{x_i} = -C_2$, то $\int_0^{\gamma_{i1}} e^{-s^h} ds = \frac{1}{3ae}$, если $w_{x_i} = C_2$, то

$$\int_0^{\gamma_{i2}} e^{-s^h} ds = \frac{1}{ae}. \quad (25)$$

Так как при $a > 1$, $h > 1$ $\frac{1}{ae} < \int_0^{\frac{1}{a}} e^{-s^h} ds < \frac{1}{a}$, то с учетом (25) получаем

$$\frac{1}{3ae} < \gamma_{i1} \leq g_i \leq \gamma_{i2} < \frac{1}{a}. \quad (26)$$

Третье слагаемое в левой части (24) можно оценить так:

$$\left| 2\zeta v h g_i^{h-1} \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 r_{ij} r_{ik} r_{ijx_k} \right| \leq \frac{v}{2} \zeta^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 r_{ijx_k}^2 + 2v h^2 \max_{i=1,2} g_i^{2h-2} q^4. \quad (27)$$

Обозначая правую часть (24) через I_4 и учитывая (27), получаем

$$\frac{1}{2}v\zeta^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 r_{ijk}^2 + v h q^4 \left[(h-1) \min_{i=1,2} g_i^{h-2} - 2h \max_{i=1,2} g_i^{2h-2} \right] \leq I_4. \quad (28)$$

Выберем $a > 3e$, например, полагаем $a = 4e$. В силу (26)

$$v h^2 q^4 \left[\frac{h-1}{h} \min_{i=1,2} g_i^{h-2} - 2 \max_{i=1,2} g_i^{2h-2} \right] > v h^2 q^4 \left(\frac{1}{12e^2} \right)^{h-2} \left[\frac{h-1}{h} - 2 \left(\frac{1}{4e} \right)^2 \left(\frac{3}{4} \right)^{h-2} \right].$$

Выберем $h = h_0$ настолько большим, чтобы $\left[\frac{h_0-1}{h_0} - 2 \left(\frac{1}{4e} \right)^2 \left(\frac{3}{4} \right)^{h_0-2} \right] > \frac{1}{a}$. Из (28) получаем

$$\frac{1}{a} v h^2 q^4 \left(\frac{1}{12e^2} \right)^{h_0-2} \leq I_4. \quad (29)$$

Из (29) после несложных оценок слагаемых из I_4 следует оценка

$$\left| w_{x_i x_j} \right|_{\tilde{\Omega}'_T} \leq C_3. \quad (30)$$

Заметим, что

$$q^4 = \left(\sum_{j=1}^2 r_{ij}^2 \right)^2 = \zeta^4 \left(\sum_{j=1}^2 g_{ixj}^2 \right)^2 = \zeta^4 \left[\sum_{j=1}^2 \left(\frac{e^{g_i^h}}{3aC_2e} w_{x_i x_j} \right)^2 \right]^2. \quad (31)$$

Поэтому константа C_3 такова, что $C_3 < \infty$ для любой строго внутренней подобласти $\tilde{\Omega}'$ области $\tilde{\Omega}$, но при приближении границы $\tilde{\Omega}'$ к границе $\tilde{\Omega}$ безгранично растет.

После вычисления (30) аналогичным способом могут быть получены оценки

$$\left| w_{x_i x_j x_k} \right|_{\tilde{\Omega}''_T} \leq C_4, \quad \left| w_{x_i x_j x_k x_s} \right|_{\tilde{\Omega}'''_T} \leq C_5, \quad \tilde{\Omega}''_T \subset \tilde{\Omega}'_T, \quad \tilde{\Omega}'''_T \subset \tilde{\Omega}''_T$$

и затем выполнен предельный переход при $\tau \rightarrow 0$, доказывающий разрешимость задачи (1)–(7) [10]. При указанных выше требованиях, накладываемых на данные, решение является классическим.

Заключение. Отметим, что для первой производной функции w удается получить ее оценку (17) на границе области, а для производных более высокого порядка их не существует. Поэтому оценки для производных второго и более высоких порядков удается получить только в строго внутренних подобластях рассматриваемой области решения.

Список использованных источников

1. Каянович, С. С. Разрешимость дифференциальной модели стержневого течения / С. С. Каянович // Вес. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2015. – № 1. – С. 52–59.
2. Schauder, J. Über lineare elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung / J. Schauder // Math. Zeitschr. – 1934. – Vol. 38, N 2. – P. 257–283.
3. Бернштейн, С. Н. Ограничение модулей последовательных производных решений уравнений параболического типа / С. Н. Берштейн // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 1938. – Т. 18, № 3. – С. 385–389.
4. Ладыженская, О. А. Смешанная задача для гиперболического уравнения / О. А. Ладыженская. – М., 1953.
5. Ладыженская, О. А. О разрешимости основных краевых задач для уравнений параболического и гиперболического типов / О. А. Ладыженская // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 1954. – Т. 97, № 3. – С. 395–398.
6. Ладыженская, О. А. Первая краевая задача для квазилинейных параболических уравнений / О. А. Ладыженская // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 1956. – Т. 107, № 5. – С. 636–639.
7. Ладыженская, О. А. Решение первой краевой задачи в целом для квазилинейных параболических уравнений / О. А. Ладыженская // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1958. – Т. 7. – С. 149–177.
8. Ладыженская, О. А. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа / О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева. – М.: Наука, 1964. – 538 с.

9. Ладыженская, О. А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уралцева. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
10. Соболев, С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике / С. Л. Соболев. – Л.: ЛГУ, 1950. – 256 с.
11. Каянович, С. С. Стержневое течение вязкой жидкости / С. С. Каянович // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-тэхн. навук. – 2013. – № 3. – С. 32–35.

References

1. Kayanovich S.S. Solvability of the differential model of plug flow. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series], 2015, no. 1, pp. 52–59. (in Russian)
2. Schauder J. Uber lineare elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung. *Mathematische Zeitschrift*, 1934, vol. 38, no. 1, pp. 257–282. doi: 10.1007/BF01170635. (in German)
3. Bernshtein S.N. Restriction of the modules of the successive derivatives of the solutions of the parabolic-type equations. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi* [Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus], 1938, vol. 18, no. 3, pp. 385–389. (in Russian)
4. Ladyzhenskaya O.A. *Mixed problem for the hyperbolic equation*. Moscow, State Publishing House technical and theoretical literature, 1953. 280 p. (in Russian)
5. Ladyzhenskaya O.A. Solvability of the basic boundary-value problems for the parabolic- and hyperbolic-type equations. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi* [Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus], 1954, vol. 97, no. 3, pp. 395–398. (in Russian)
6. Ladyzhenskaya O.A. First boundary-value problem for quasi-linear parabolic equations. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi* [Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus], 1956, vol. 107, no. 5, pp. 636–639. (in Russian)
7. Ladyzhenskaya O.A. Solution of the first boundary-value problems, in general for quasi-linear parabolic equations. *Trudy Moskovskogo matematicheskogo obshchestva* [Works of the Moscow Mathematical Society], 1958, vol. 7, pp. 149–177. (in Russian)
8. Ladyzhenskaya O.A., Ural'tseva N.N. *Linear and quasi-linear equations of elliptical type*. Moscow, Nauka, 1964. 538 p. (in Russian)
9. Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Ural'tseva N.N. *Linear and quasi-linear equations of parabolic type*. Moscow, Nauka, 1967. 736 p. (in Russian)
10. Sobolev S.L. *Some applications of the functional analysis in mathematical physics* Leningrad, Leningrad State University, 1950. 256 p. (in Russian)
11. Kayanovich S.S. Plug flow of viscous fluid. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Ser. Fizika-tekhnichnykh navuk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physico-Technical series], 2013, no. 3, pp. 32–35. (in Russian)

Сведения об авторе

Каянович Сергей Сергеевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики, Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (ул. П. Бровка, 6, 220013, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: sergkay@mail.ru

Для цитирования

Каянович, С. С. Краевая задача для стержневого течения в канале / С. С. Каянович // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2016. – № 4. – С. 55–66.

Information about the author

Kayanovich Siarhei Siarheevich – Ph. D. (Physics and Mathematics), Assistant Professor of the Chair of Higher Mathematics, Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (6, P. Brovka Str., 220013, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: sergkay@mail.ru

For citation

Kayanovich S.S. Boundary-value problem for plug flow in the channel. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series], 2016, no. 4, pp. 55–66. (in Russian)