

УДК 517.925

*М. С. БЕЛОКУРСКИЙ*

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЕРУГИНА  
О СУЩЕСТВОВАНИИ НЕРЕГУЛЯРНЫХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ  
С НУЛЕВЫМ СРЕДНИМ ПЕРИОДИЧЕСКОГО КОЭФФИЦИЕНТА**

*Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины**(Поступила в редакцию 27.02.2015)*

Как известно, периодическая дифференциальная система при определенных условиях может иметь периодические решения, период которых несоизмерим с периодом самой системы [1–6] и др. Такие периодические решения присущи достаточно широким классам дифференциальных систем и названы сильно нерегулярными. Отметим, что сильно нерегулярные периодические колебания имеют место, например, в системе с двумя степенями свободы, представляющей собой два одинаковых маятника, соединенных упругой горизонтальной связью с жесткостью, периодически зависящей от времени. Подобного рода колебания могут возникать и в электрическом аналоге такой системы – двух колебательных контурах, соединенных периодически меняющейся емкостью.

В монографии [3, § 36] Н. П. Еругин рассматривал линейную систему вида

$$\dot{x} = (AP(t) + B)x, \quad t \in R, \quad x \in R^n, \quad n \geq 2, \quad (1)$$

где  $A, B$  – постоянные  $(n \times n)$ -матрицы,  $P(t)$  – непрерывная  $\omega$ -периодическая  $(n \times n)$ -матрица. В системе (1) матрицы  $A$  и  $P(t)$  будем называть стационарным и периодическим коэффициентами соответственно. Для системы (1) с диагональным периодическим коэффициентом  $P(t)$  Н. П. Еругин изучены вопросы существования сильно нерегулярных периодических решений, при этом, в частности, было доказано, что если матрица  $A$  невырожденная, то искомые решения у системы (1) отсутствуют. Случай треугольного периодического коэффициента  $P(t)$  был рассмотрен в работе [7].

Следует отметить, что системы вида (1) используются при решении задач управления асимптотическими инвариантами, в том числе показателями Ляпунова, стационарных управляемых систем при помощи периодических управлений [8, 9], а также задач стабилизации линейных систем управления периодической обратной связью, включая проблему Брокетта [10].

В настоящей работе выясним вопросы существования сильно нерегулярных периодических решений системы (1) при условии нулевого среднего значения периодического коэффициента

$$\hat{P} = \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} P(\tau) d\tau = 0. \quad (2)$$

Вначале рассмотрим случай, когда стационарный коэффициент  $A$  является невырожденным, т. е.

$$\det A \neq 0. \quad (3)$$

Пусть  $x(t)$  –  $\Omega$ -периодическое решение системы (1), при этом считаем, что хотя бы одна из его компонент отлична от стационарной, а отношение  $\omega / \Omega$  является иррациональным числом. Тогда, согласно [5], вектор  $x(t)$  удовлетворяет системе

$$\dot{x} = (A\hat{P} + B)x, \quad (AP(t) - A\hat{P})x = 0. \quad (4)$$

В силу условий (2) и (3) последняя система примет вид

$$\dot{x} = Bx, \quad P(t)x = 0. \quad (5)$$

Если столбцы матрицы  $P(t)$  линейно независимы, то из второй системы в (5) на основании [6, с. 41] следует тривиальность  $x(t)$ , что противоречит сделанному допущению. Значит, матрица  $P(t)$  имеет неполный столбцовый ранг

$$\text{rank}_{\text{col}} P = k < n. \quad (6)$$

При выполнении условия (6) согласно [6, с. 43] найдется постоянная неособенная  $(n \times n)$ -матрица  $Q$  такая, что у матрицы  $P(t)Q$  первые  $d = n - k$  столбцов будут нулевыми, в то время как остальные  $k$  столбцов будут линейно независимыми. Введем замену переменных

$$x = Qy, \quad (7)$$

которая приводит систему (5) к системе

$$\dot{y} = Fy, \quad P_1(t)y = 0 \quad (F = Q^{-1}BQ, P_1(t) = P(t)Q). \quad (8)$$

Эта система имеет сильно нерегулярное периодическое решение  $y(t) = Q^{-1}x(t)$ . Так как у матрицы  $P_1(t)$  первые  $d$  столбцов нулевые, а остальные  $k$  столбцов линейно независимы, то из второй системы в (8) на основании [6, с. 43] следует, что последние  $k$  компонент вектора  $y(t)$  будут тривиальными, т. е.

$$y(t) = \text{col}(y^{[d]}(t), y_{[k]}(t)), \quad y^{[d]}(t) = \text{col}(y_1(t), \dots, y_d(t)), \quad y_{[k]}(t) = \text{col}(y_{d+1}(t), \dots, y_n(t)) \equiv 0.$$

Это означает, что система (8) имеет следующую структуру:

$$\dot{y}^{[d]} = F_{d,d}y^{[d]}, \quad F_{k,d}y^{[d]} = 0, \quad y_{[k]} = 0, \quad (9)$$

где  $F_{d,d}$ ,  $F_{k,d}$  – левые верхний и нижний блоки матрицы  $F$  (нижние индексы указывают размерность). Как видно из (9),  $\Omega$ -периодический вектор  $y^{[d]}(t)$  является решением линейной стационарной системы. Поэтому среди собственных значений матрицы коэффициентов  $F_{d,d}$  первой системы в (9) будут числа

$$\pm i\lambda_j, \quad (j = 1, \dots, d'; d' \leq [d/2]), \quad (10)$$

где  $\lambda_j = 2m_j\pi/\Omega$ ,  $m_j \in \mathbb{N}$ . Пусть  $l_j$  – число групп элементарных делителей, отвечающих собственному значению  $\pm i\lambda_j$ , ( $j = 1, \dots, d'$ ;  $l_1 + \dots + l_{d'} = l$ ;  $2l \leq d$ ). Это означает, что вектор  $y^{[d]}(t)$  представлен тригонометрическим полиномом вида

$$y^{[d]}(t) = \sum_{j=1}^{d'} a_j \cos \lambda_j t + b_j \sin \lambda_j t, \quad (11)$$

где коэффициенты  $a_j$ ,  $b_j$  зависят от  $2l$  произвольных вещественных постоянных. Поскольку  $y^{[d]}(t)$  удовлетворяет и второй системе в (9), то имеет место тождество

$$F_{k,d} \sum_{j=1}^{d'} a_j \cos \lambda_j t + b_j \sin \lambda_j t \equiv 0. \quad (12)$$

Итак, если система (1) имеет сильно нерегулярное периодическое решение  $x(t)$ , то выполняются условия (6), (10), (12), при этом

$$x(t) = Q \text{col}(y^{[d]}(t), 0, \dots, 0), \quad (13)$$

где вектор  $y^{[d]}(t)$  определяется равенством (11).

Покажем, что полученные условия являются достаточными. Обратимся к системе (5). В силу условия (6) найдется постоянная неособенная  $(n \times n)$ -матрица  $Q$  такая, что замена переменных (7) приводит (5) к системе (8), где у матрицы  $P_1(t)$  первые  $d$  столбцов нулевые, а остальные  $k$  столбцов линейно независимы. Согласно [6, с. 43], последнее обстоятельство означает, что  $y = \text{col}(y^{[d]}, 0, \dots, 0)$ ,  $y^{[d]} = \text{col}(y_1, \dots, y_d)$ . С учетом этого система (8) примет вид (9). Поскольку чисто мнимые числа (10) будут собственными значениями матрицы  $F_{d,d}$ , то первая система в (9) имеет  $2l$ -параметрическое семейство  $\Omega$ -периодических решений (11). Так как выполняется тождество (12), то система (9) имеет решение  $y(t) = \text{col}(y^{[d]}(t), 0, \dots, 0)$ . Возвращаясь к исходным переменным, находим  $\Omega$ -периодическое решение системы (5) в виде тригонометрического многочлена (13). В силу условий (2) и (3) вектор  $x(t)$  удовлетворяет также системе (4). Тогда из [5] вытекает, что (13) является сильно нерегулярным решением системы (1).

Таким образом, доказана

**Т е о р е м а 1.** Пусть в системе (1) стационарный коэффициент  $A$  является невырожденным, а среднее значение периодического коэффициента  $P(t)$  является нулевым.

Если система (1) имеет сильно нерегулярное периодическое решение, то оно будет тригонометрическим многочленом вида (13). Для того чтобы (13) было решением системы (1), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (6), (10), (12).

**П р и м е р.** Рассмотрим  $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ -периодическую систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x \sin \sqrt{3}t - y(1 + \sin \sqrt{3}t) + z \sin \sqrt{3}t, \\ \dot{y} &= x(1 - \cos \sqrt{3}t) - y \cos \sqrt{3}t + z \cos \sqrt{3}t, \\ \dot{z} &= x(1 + 5 \sin \sqrt{3}t) - y(1 - 5 \sin \sqrt{3}t) - 5z \sin \sqrt{3}t. \end{aligned} \quad (14)$$

Для этой системы имеем:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P(t) = \begin{pmatrix} 4 \sin \sqrt{3}t - \cos \sqrt{3}t & 4 \sin \sqrt{3}t - \cos \sqrt{3}t & -4 \sin \sqrt{3}t + \cos \sqrt{3}t \\ 3 \sin \sqrt{3}t - 2 \cos \sqrt{3}t & 3 \sin \sqrt{3}t - 2 \cos \sqrt{3}t & -3 \sin \sqrt{3}t + 2 \cos \sqrt{3}t \\ 9 \sin \sqrt{3}t - 2 \cos \sqrt{3}t & 9 \sin \sqrt{3}t - 2 \cos \sqrt{3}t & 9 \sin \sqrt{3}t - 2 \cos \sqrt{3}t \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det A = 1 \neq 0, \quad \hat{P} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}} P(\tau) d\tau = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Согласно [5], а также условиям (2) и (3), искомое периодическое решение  $(x(t), y(t), z(t))^T$  системы (14) удовлетворяет системе

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 4 \sin \sqrt{3}t - \cos \sqrt{3}t & 4 \sin \sqrt{3}t - \cos \sqrt{3}t & -4 \sin \sqrt{3}t + \cos \sqrt{3}t \\ 3 \sin \sqrt{3}t - 2 \cos \sqrt{3}t & 3 \sin \sqrt{3}t - 2 \cos \sqrt{3}t & -3 \sin \sqrt{3}t + 2 \cos \sqrt{3}t \\ 9 \sin \sqrt{3}t - 2 \cos \sqrt{3}t & 9 \sin \sqrt{3}t - 2 \cos \sqrt{3}t & 9 \sin \sqrt{3}t - 2 \cos \sqrt{3}t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (15)$$

С помощью замены переменных

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix},$$

система (15) приводится к системе

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4\sin\sqrt{3}t - \cos\sqrt{3}t \\ 0 & 0 & 3\sin\sqrt{3}t - 2\cos\sqrt{3}t \\ 0 & 0 & 9\sin\sqrt{3}t - 2\cos\sqrt{3}t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Матрица второй системы из (16) имеет один ненулевой столбец. Поэтому соответствующая компонента  $w$  периодического нерегулярного решения должна быть нулевой. Тогда система (16) примет вид

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad w = 0.$$

Собственные числа матрицы коэффициентов редуцированной системы  $\lambda_{1,2} = \pm i$ . Поэтому последняя система имеет двухпараметрическое семейство  $2\pi$ -периодических решений

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos t + b \sin t \\ a \sin t - b \cos t \end{pmatrix}, \quad w = 0,$$

где  $a, b$  – произвольные вещественные постоянные, которое будет удовлетворять и системе (16). Возвращаясь к исходным переменным, находим периодическое решение системы (14)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos t + b \sin t \\ a \sin t - b \cos t \\ (a-b) \cos t + (a+b) \sin t \end{pmatrix},$$

которое ввиду иррациональности отношения чисел  $2\pi$  и  $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$  будет сильно нерегулярным.

Рассмотрим теперь случай вырожденного стационарного коэффициента при условии (2). Для определенности будем считать, что

$$\text{rank } A = q < n. \quad (17)$$

Пусть  $x(t)$  –  $\Omega$ -периодическое решение системы (1), при этом считаем, что хотя бы одна из его компонент отлична от стационарной, а отношение  $\omega/\Omega$  является иррациональным числом. Из [11, с. 21–22] вытекает, что при выполнении условия (17) найдется постоянная неособенная  $(n \times n)$ -матрица  $S$  такая, что у матрицы  $SA$  первые  $q$  строк будут линейно независимыми, а остальные  $n - q$  строк будут нулевыми. Введем замену переменных

$$x = S^{-1}z, \quad (18)$$

которая приводит систему (1) к системе

$$\dot{z} = (SAP(t)S^{-1} + SBS^{-1})z, \quad (19)$$

где  $SAP(t)S^{-1}$  – непрерывная  $\omega$ -периодическая  $(n \times n)$ -матрица, у которой последние  $n - q$  строк нулевые.

Тогда в силу [5]  $\Omega$ -периодический вектор  $z(t) = Sx(t)$  удовлетворяет системе

$$\dot{z} = (S\hat{A}S^{-1} + SBS^{-1})z, \quad (SAP(t)S^{-1} - S\hat{A}S^{-1})z = 0. \quad (20)$$

С учетом условия (2) система (20) принимает вид

$$\dot{z} = Cz, \quad G(t)z = 0 \quad (C = SBS^{-1}, \quad G(t) = SAP(t)S^{-1}). \quad (21)$$

Значит,  $\Omega$ -периодический вектор  $z(t)$  удовлетворяет и системе (21). Первая система из (21) является линейной стационарной системой. Поэтому среди собственных значений ее матрицы коэффициентов  $C$  будут числа

$$\pm i\lambda_j \quad (j=1, \dots, n'; \quad n' \leq [n/2]), \quad (22)$$

где  $\lambda_j = 2r_j\pi/\Omega$ ,  $r_j \in \mathbb{N}$ . Пусть  $h_j$  – число групп элементарных делителей, отвечающих собственному значению  $\pm i\lambda_j$ ,  $(j=1, \dots, n'; \quad h_1 + \dots + h_{n'} = h; \quad 2h \leq n)$ . Это означает, что вектор  $z(t)$  представлен тригонометрическим полиномом вида

$$z(t) = \left( \sum_{j=1}^{n'} (a_j^{(1)} \cos \lambda_j t + b_j^{(1)} \sin \lambda_j t), \dots, \sum_{j=1}^{n'} (a_j^{(n)} \cos \lambda_j t + b_j^{(n)} \sin \lambda_j t) \right)^T, \quad (23)$$

где скалярные коэффициенты  $a_j^{(i)}$  и  $b_j^{(i)}$  ( $i=1, \dots, n$ ) зависят от  $2h$  произвольных вещественных постоянных. Пусть

$$SA = \begin{pmatrix} v_{11} & \dots & v_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ v_{q1} & \dots & v_{qn} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad P(t) = \begin{pmatrix} p_{11}(t) & \dots & p_{1n}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{n1}(t) & \dots & p_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} s_{11}(t) & \dots & s_{1n}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ s_{n1}(t) & \dots & s_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$SAP(t)S^{-1} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n v_{li} p_{ij}(t) s_{j1} & \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n v_{li} p_{ij}(t) s_{j2} & \dots & \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n v_{li} p_{ij}(t) s_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n v_{qi} p_{ij}(t) s_{j1} & \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n v_{qi} p_{ij}(t) s_{j2} & \dots & \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n v_{qi} p_{ij}(t) s_{jn} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Поскольку  $z(t)$  удовлетворяет и второй системе в (21), то имеет место тождество

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n v_{li} p_{ij}(t) s_{j1} \sum_{j=1}^{n'} (a_j^{(1)} \cos \lambda_j t + b_j^{(1)} \sin \lambda_j t) + \dots + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n v_{li} p_{ij}(t) s_{jn} \sum_{j=1}^{n'} (a_j^{(n)} \cos \lambda_j t + b_j^{(n)} \sin \lambda_j t) \equiv \\ & \equiv 0, \\ & \dots \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n v_{qi} p_{ij}(t) s_{j1} \sum_{j=1}^{n'} (a_j^{(1)} \cos \lambda_j t + b_j^{(1)} \sin \lambda_j t) + \dots + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n v_{qi} p_{ij}(t) s_{jn} \sum_{j=1}^{n'} (a_j^{(n)} \cos \lambda_j t + b_j^{(n)} \sin \lambda_j t) \equiv \\ & \equiv 0. \end{aligned}$$

Итак, если система (1) имеет сильно нерегулярное периодическое решение  $x(t)$ , то выполняются условия (22), (24), при этом

$$x(t) = S^{-1}z(t), \quad (25)$$

где вектор  $z(t)$  определяется равенством (23).

Покажем, что полученные условия являются достаточными. При выполнении условия (17) найдется постоянная неособенная  $(n \times n)$ -матрица  $S$  такая, что у матрицы  $SA$  первые  $q$  строк будут линейно независимыми, а остальные  $n - q$  строк будут нулевыми. Сделаем замену переменных (18), которая приводит систему (1) к системе (19).

Теперь обратимся к системе (21). Поскольку чисто мнимые числа (22) будут собственными значениями матрицы  $C = SBS^{-1}$ , то первая система в (21) имеет  $2h$ -параметрическое семейство  $\Omega$ -периодических решений (23). Так как выполняются тождества (24), то система (21) имеет решение (23). В силу условия (2) вектор  $z(t)$  удовлетворяет также системе (20). Тогда в силу [5]  $\Omega$ -периодический вектор  $z(t)$  удовлетворяет системе (19). Возвращаясь к исходным переменным, находим сильно нерегулярное решение системы (1) в виде тригонометрического многочлена (25).

Таким образом, доказана

**Т е о р е м а 2.** Пусть в системе (1) стационарный коэффициент  $A$  является вырожденным и его ранг равен  $q$ , а среднее значение периодического коэффициента  $P(t)$  является нулевым.

Для того чтобы система (1) имела сильно нерегулярное периодическое решение, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (22), (24).

Если система (1) имеет сильно нерегулярное периодическое решение, то оно будет иметь вид (25).

Укажем далее еще один подход к выяснению условий существования сильно нерегулярных периодических решений системы (1) с нулевым средним периодического коэффициента и вырожденным стационарным коэффициентом.

Пусть  $x(t)$  –  $\Omega$ -периодическое решение системы (1), при этом считаем, что хотя бы одна из его компонент отлична от стационарной, а отношение  $\omega / \Omega$  является иррациональным числом. Из [11, с. 21–22] вытекает, что при выполнении условия (17) найдется постоянная неособенная  $(n \times n)$ -матрица  $S$  такая, что у матрицы  $SA$  первые  $q$  строк будут линейно независимыми, а остальные  $n - q$  строк будут нулевыми. Введем замену переменных (18), которая приводит систему (1) к системе (19).

Согласно [5],  $\Omega$ -периодический вектор  $z(t) = Sx(t)$  удовлетворяет системе (20), которая в силу условия (2), принимает вид (21). Обозначим через  $G_1(t)$  матрицу размерности  $q \times n$ , составленную из первых  $q$  строк матрицы  $G(t)$ . Тогда, учитывая структуру матрицы  $SA$ , систему (21) можно записать в виде

$$\dot{z} = Cz, \quad G_1(t)z = 0. \quad (26)$$

Если столбцы матрицы  $G_1(t)$  линейно независимы, то из второй системы в (26) следует тривиальность  $z(t)$ , что противоречит сделанному допущению. Значит, матрица  $G_1(t)$  имеет неполный столбцовый ранг

$$\text{rank}_{\text{col}} G_1 = r < n. \quad (27)$$

При выполнении условия (27) согласно [6, с. 43] найдется постоянная неособенная  $(n \times n)$ -матрица  $Q$  такая, что у матрицы  $G_1(t)Q$  первые  $n - r = p$  столбцов будут нулевыми, в то время как остальные  $r$  столбцов будут линейно независимыми. Введем еще одну замену переменных

$$z = Qy, \quad (28)$$

которая приводит систему (26) к системе

$$\dot{y} = Dy, \quad G_2(t)y = 0 \quad (D = Q^{-1}SBS^{-1}Q, G_2(t) = G_1(t)Q). \quad (29)$$

Эта система имеет сильно нерегулярное периодическое решение  $y(t) = Q^{-1}Sx(t)$ . Так как у матрицы  $G_2(t)$  первые  $p$  столбцов нулевые, а остальные  $r$  столбцов линейно независимы, то из второй системы в (29) на основании [6, с. 43] следует, что последние  $r$  компонент вектора  $y(t)$  будут тривиальными, т. е.

$$y(t) = \text{col}(y^{[p]}(t), y_{[r]}(t)), \quad y^{[p]}(t) = \text{col}(y_1(t), \dots, y_p(t)), \quad y_{[r]}(t) = \text{col}(y_{p+1}(t), \dots, y_n(t)) \equiv 0.$$

Это означает, что система (29) имеет следующую структуру:

$$\dot{y}^{[p]} = D_{p,p}y^{[p]}, \quad D_{r,p}y^{[p]} = 0, \quad y_{[r]} = 0, \quad (30)$$

где  $D_{p,p}$ ,  $D_{r,p}$  – левые верхний и нижний блоки матрицы  $D$  (нижние индексы указывают размерность). Как видно из (30),  $\Omega$ -периодический вектор  $y^{[p]}(t)$  является решением линейной стационарной системы. Поэтому среди собственных значений матрицы коэффициентов  $D_{p,p}$  первой системы в (30) будут числа

$$\pm i\lambda_j, \quad (j=1, \dots, p'; p' \leq [p/2]), \quad (31)$$

где  $\lambda_j = 2m_j\pi/\Omega$ ,  $m_j \in \mathbb{N}$ . Пусть  $h_j$  – число групп элементарных делителей, отвечающих собственному значению  $\pm i\lambda_j$ ,  $(j=1, \dots, p'; h_1 + \dots + h_{p'} = h; 2h \leq p)$ . Это означает, что вектор  $y^{[p]}(t)$  представлен тригонометрическим полиномом вида

$$y^{[p]}(t) = \sum_{j=1}^{p'} a_j \cos \lambda_j t + b_j \sin \lambda_j t, \quad (32)$$

где коэффициенты  $a_j, b_j$  зависят от  $2h$  произвольных вещественных постоянных. Поскольку  $y^{[p]}(t)$  удовлетворяет и второй системе в (30), то имеет место тождество

$$D_{r,p} \sum_{j=1}^{p'} a_j \cos \lambda_j t + b_j \sin \lambda_j t \equiv 0. \quad (33)$$

Итак, если система (1) имеет сильно нерегулярное периодическое решение  $x(t)$ , то выполняются условия (27), (31), (33), при этом

$$x(t) = S^{-1} Q \operatorname{col}(y^{[p]}(t), 0, \dots, 0), \quad (34)$$

где вектор  $y^{[p]}(t)$  определяется равенством (32).

Покажем, что полученные условия являются достаточными. Обратимся к системе (26). В силу условия (27) найдется постоянная неособенная  $(n \times n)$ -матрица  $Q$  такая, что замена переменных (28) приводит (26) к системе (29), где у матрицы  $G_2(t)$  первые  $p$  столбцов нулевые, а остальные  $r$  столбцов линейно независимы. Согласно [6, с. 43], последнее обстоятельство означает, что  $y = \operatorname{col}(y^{[p]}, 0, \dots, 0)$ ,  $y^{[p]} = \operatorname{col}(y_1, \dots, y_p)$ . С учетом этого система (29) примет вид (30). Поскольку чисто мнимые числа (31) будут собственными значениями матрицы  $D_{p,p}$ , то первая система в (30) имеет  $2h$ -параметрическое семейство  $\Omega$ -периодических решений (32). Так как выполняется тождество (33), то система (30) имеет решение  $y(t) = \operatorname{col}(y^{[p]}(t), 0, \dots, 0)$ .

Обратная замена переменных  $y = Q^{-1}z$  позволяет найти  $\Omega$ -периодическое решение системы (26), а значит, и системы (21). В силу условия (2) вектор  $z(t)$  удовлетворяет также и системе (20). Тогда из [5] вытекает, что  $z(t)$  является  $\Omega$ -периодическим решением системы (19). Возвращаясь к исходным переменным, заключаем, что тригонометрический многочлен (34) является сильно нерегулярным решением системы (1).

Таким образом, доказана

**Т е о р е м а 3.** Пусть в системе (1) стационарный коэффициент  $A$  является вырожденным и его ранг равен  $q$ , а среднее значение периодического коэффициента  $P(t)$  является нулевым.

Если система (1) имеет сильно нерегулярное периодическое решение, то оно будет тригонометрическим многочленом вида (34). Для того чтобы (34) было решением системы (1), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (27), (31), (33).

**З а м е ч а н и е.** При доказательстве теоремы 2 мы вводим замену с целью привести матрицу  $AP(t)$  к специальному блочному виду (последние несколько строк нулевые), затем исходная система распадается на две системы, одна из которых не является дифференциальной и ее матрица коэффициентов имеет тот же специальный блочный вид. При доказательстве теоремы 3 мы вводим две замены, но это позволяет свести исходную систему к системе меньшей размерности.

## Литература

1. *Massera J. L.* // Bol. de la Facultad de Ingenieria. 1950. Vol. 4, no 1. P. 37–45.
2. *Курцвейль Я., Вейвода О.* // Чехослов. мат. журн. 1955. Т. 5, № 3. С. 362–370.
3. *Еругин Н. П.* Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими и квазипериодическими коэффициентами. Минск, 1963. С. 203–208.
4. *Гайшун И. В.* // Докл. АН БССР. 1979. Т. 23, № 8. С. 684–686.
5. *Грудо Э. И.* // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 9. С. 1499–1504.
6. *Деменчук А. К.* Асинхронные колебания в дифференциальных системах. Условия существования и управления. Lambert Academic Publishing. Saarbrücken, 2012. С. 40–49.
7. *Белокурский М. С., Деменчук А. К.* // Докл. НАН Беларуси. 2014. Т. 58, № 4. С. 17–22.
8. *Зайцев В. А.* // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. 2003. С. 31–62.
9. *Габдрахимов А. Ф., Зайцев В. А.* // Изв. ИМИ УдГУ. 2006. № 3 (37). С. 21–22.
10. *Леонов Г. А.* // Автоматика и телемеханика. 2001. № 5. С. 190–193.
11. *Хорн Р.* Матричный анализ. М., 1989. С. 19–24.

*M. S. BELOKURSKY*

### **SOLUTION OF ERUGIN'S PROBLEM ON THE EXISTENCE OF IRREGULAR SOLUTIONS OF THE LINEAR SYSTEM WITH ZERO MEAN OF PERIODIC COEFFICIENT**

#### **Summary**

We consider the linear periodic system with zero mean of periodic coefficient. The necessary and sufficient conditions, under which linear periodic differential system has strongly irregular periodic solutions, were obtained.