ISSN 0002-3574 (print)

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

SHORT COMMUNICATIONS

УДК 517.955.32

Поступила в редакцию 04.11.2016
Received 04.11.2016

Н. И. Юрчук, Е. Н. Новиков

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ КЛАССИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ СТРУНЫ

Если неоднородное уравнение колебаний полуограниченной струны имеет некоторое классическое решение в первой четверти плоскости, то правая часть этого уравнения очевидно непрерывна. В работе доказывается, что в этом случае специальный интеграл от этой правой части, который является лишь обобщенным решением неоднородного уравнения колебаний полуограниченной струны, имеет вторые непрерывные производные и, следовательно, является его классическим решением. Это обобщенное решение отличается от известного обобщенного решения данного уравнения в верхней полуплоскости наличием модуля от пространственной переменной в подынтегральной функции, которой является непрерывная правая часть уравнения. Доказанное утверждение можно использовать для выявления соответствующих необходимых требований гладкости на правую часть уравнения колебаний струны для существования классических решений различных смешанных задачах в четверти и полуполосе плоскости.

Ключевые слова: неоднородное уравнение колебаний струны, классическое решение, обобщенное решение, необходимое требование гладкости.

N. I. Yurchuk, E. N. Novikov

Belarusian State University, Minsk, Belarus

NECESSARY CONDITIONS FOR EXISTENCE OF CLASSICAL SOLUTIONS TO THE EQUATION OF SEMI-BOUNDED STRING VIBRATION

If the inhomogeneous equation of semi-bounded string vibration is a classical solution in the first quadrant, then the right-hand side of this equation is obviously continuous. We prove that in this case, a special integral of this right-hand side, which is a generalized solution of the inhomogeneous equation for semi-bounded string vibration, has continuous second derivatives and it is therefore a classical solution. This generalized solution differs from the known generalized solution of this equation in the presence of the upper half of the module of the spatial variable in the integrand, which is a continuous right-hand side of the equation. This assertion can be used to identify the corresponding necessary smoothness requirements on the right-hand side of the equation for string vibration for the existence of classical solutions of different mixed problems in the quarter and the half-plane.

Keywords: inhomogeneous equation of string vibration, classical solution, generalized solution, necessary smoothness requirement.

Введение. Если неоднородное уравнение колебаний полуограниченной струны имеет некоторое классическое решение в первой четверти плоскости, то правая часть этого уравнения очевидно непрерывна. Настоящая работа посвящена исследованию гладкости специального интеграла, который для непрерывной правой части неоднородного уравнения колебаний полуограниченной струны является лишь его обобщенным решением в первой четверти плоскости. Это обобщенное решение отличается от известного обобщенного решения такого же уравнения в верхней полуплоскости наличием модуля от пространственной переменной в подынтегральной функции, которой служит правая часть уравнения колебаний струны. В работе доказывается, что в этом случае специальный интеграл от этой правой части также является дважды непрерывно дифференцируемой функцией и классическим решением этого уравнения. В случае дважды непрерывной дифференцируемости специального интеграла его можно найти методом Дюамеля [1]. Доказанное утверждение может быть использовано для выявления необходимых условий существования классических решений различных смешанных задач для уравнения колебаний струны [2–4].

Формулировка и доказательство утверждения. Обозначим символом $C^k(\Omega)$ множество k раз непрерывно дифференцируемых функций на множестве Ω. Справедливо

Утверждение. *Если $u \in C^2(G_\infty)$ – некоторое классическое решение уравнения*

$$\partial_{tt} u(x,t) - a^2 \partial_{xx} u(x,t) = f(x,t),\ a>0,\ \{x,t\} \in G_\infty = [0,\infty[\times[0,\infty[, \tag{1}$$

в первой четверти плоскости, то $f \in C(G_\infty)$ и функция $F(x,t) = \frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(|s|,\tau)\,ds\,d\tau \in C^2(G_\infty)$.

Доказательство. Пусть u – классическое решение уравнения (1). Тогда из $u \in C^2(G_\infty)$ следует, что правая часть $f = \partial_{tt} u(x,t) - a^2 \partial_{xx} u(x,t) \in C(G_\infty)$ и функция $F \in C^1(G_\infty)$ является лишь обобщенным решением уравнения (1). Под таким обобщенным решением уравнения (1) понимаем функцию $F \in C^1(G_\infty)$, которая удовлетворяет уравнению

$$\int_0^\infty \int_0^\infty (\partial_t + a\partial_x)\, F(x,t)\, (\partial_t - a\partial_x) \varphi(x,t)\,dx\,dt = -\int_0^\infty \int_0^\infty f(x,t)\varphi(x,t)\,dx\,dt, \tag{2}$$

для любой функции $\varphi \in C_0^1(G_\infty)$, имеющей компактный носитель в G_∞ и $\varphi\big|_{x=+\infty} = 0,\ t \in [0,\infty[$, $\varphi\big|_{t=+\infty} = 0,\ x \in [0,\infty[$. Любую точку $(x_0,t_0) \in G_\infty$ можно поместить внутрь трапеции $G_0 = \{(x,t): 0 \le x + at \le M = x_0 + at_0 + (a+1)\varepsilon_0,\ 0 \le t \le T = t_0 + \varepsilon_0\},\ \varepsilon_0 > 0$. Всегда существует такая последовательность функций $f_n(x,t) \in C^1(G_0)$, которая сходится при $n \to \infty$ к функции $f(x,t) \in C(G_0)$ равномерно на компактном множестве G_0. Для исходных данных $f_n \in C^1(G_0)$ и $u \in C^2(G_0)$ вторая смешанная задача

$$\partial_{tt} u_n(x,t) - a^2 \partial_{xx} u_n(x,t) = f_n(x,t),\ a>0,\ \{x,t\} \in G_0, \tag{3}$$

$$u_n\big|_{t=0} = u\big|_{t=0},\quad \partial_t u_n\big|_{t=0} = \partial_t u\big|_{t=0},\quad 0 \le x \le M - at,\ t \in [0,T], \tag{4}$$

$$\partial_x u_n\big|_{x=0} = \partial_x u\big|_{x=0},\ t \in [0,T],\quad n = 1,2,\ldots, \tag{5}$$

имеет единственные классические решения [4]

$$(u_n)_-(x,t) = \frac{u(x+at,0) + u(x-at,0)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \partial_\tau u(\xi,\tau)\big|_{\tau=0}\,d\xi +$$
$$+\frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f_n(s,\tau)\,ds\,d\tau,\ (x,t) \in G_- \cap G_0,\ G_- = \{(x,t) \in G_\infty,\ x > at,\ t > 0\}, \tag{6}$$

$$(u_n)_+(x,t) = \frac{u(x+at,0) + u(at-x,0)}{2} + \frac{1}{2a}\int_0^{x+at} \partial_\tau u(\xi,\tau)\big|_{\tau=0}\,d\xi +$$
$$+\frac{1}{2a}\int_0^{at-x} \partial_\tau u(\xi,\tau)\big|_{\tau=0}\,d\xi - a\int_0^{t-\frac{x}{a}} \partial_\xi u(\xi,\tau)\big|_{\xi=0}\,d\xi + \frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f_n(|s|,\tau)\,ds\,d\tau,$$
$$(x,t) \in G_+ \cap G_0,\ G_+ = \{(x,t) \in G_\infty,\ x \le at,\ x \ge 0\}. \tag{7}$$

В этом легко убедиться непосредственной подстановкой (6) и (7) в (3)–(5), так как соответствующие достаточные требования гладкости и условия согласования на исходные данные второй смешанной задачи (3)–(5) очевидно выполняются [4].

Функции $v_n(x,t) = u(x,t) - u_n(x,t) \in C^2(G_0)$, как разность функций из $C^2(G_0)$, являются классическими решениями второй смешанной задачи

$$\partial_{tt} v_n(x,t) - a^2 \partial_{xx} v_n(x,t) = f(x,t) - f_n(x,t) = \tilde{f}_n(x,t),\ a > 0,\ \{x,t\} \in G_0, \tag{8}$$

$$v_n\big|_{t=0} = 0, \quad \partial_t v_n\big|_{t=0} = 0, \quad 0 \le x \le M_0 - at,\ t \in [0,T], \tag{9}$$

$$\partial_x v_n\big|_{x=0} = 0,\ t \in [0,T],\ n = 1,2,\dots . \tag{10}$$

Для ее решений справедливо энергетическое неравенство (априорная оценка):

$$\sup_{0 \le t \le T} \int_0^{M-at} \left(|\partial_t v_n(x,t)|^2 + |\partial_x v_n(x,t)|^2 + |v_n(x,t)|^2 \right) dx \le c_0 \int_{G_0} |f(x,t) - f_n(x,t)|^2\, dxdt,\ n = 1,2,\dots, \tag{11}$$

где $c_0 = \left(16T^3 + 4T\right) / \left(\min\,(1, a^2)\right)$.

Докажем неравенство (11). Для любого $\tau \in]0,T]$ левую часть уравнения (8) умножаем на $2\partial_t v_n$, интегрируем по x и t на множестве $G^\tau = \{(x,t) : x \in [0, M - at],\ t \in [0,\tau]\}$ и приходим к равенствам

$$2\int_{G^\tau} \left(\partial_{tt} v_n - a^2 \partial_{xx} v_n \right) \partial_t v_n dxdt = \int_0^\tau \int_0^{M-at} \Big[\partial_t \left((\partial_t v_n)^2 + a^2 (\partial_x v_n)^2 \right) - 2a^2 \partial_x \left(\partial_x v_n \partial_t v_n \right) \Big] dxdt =$$

$$= \int_0^{M-at} \Big[(\partial_t v_n)^2 + a^2 (\partial_x v_n)^2 \Big] dx \Big|_{t=\tau} - \int_0^{M-at} \Big[(\partial_t v_n)^2 + a^2 (\partial_x v_n)^2 \Big] dx \Big|_{t=0} +$$

$$+ 2a^2 \int_0^\tau \big[\partial_x v_n \partial_t v_n \big] dt \Big|_{x=0} + a\int_0^\tau \left((\partial_t v_n)^2 + a^2 (\partial_x v_n)^2 \right) \Big|_{x=M-at} dt - 2a^2 \int_0^\tau \big[\partial_x v_n \partial_t v_n \big] dt \Big|_{x=M-at}. \tag{12}$$

Интеграл (12) оценивается снизу величиной

$$\left(\int_0^{M-at} \Big[(\partial_t v_n)^2 + a^2 (\partial_x v_n)^2 \Big] dx \right) \Bigg|_{t=\tau}, \tag{13}$$

так как в правой части равенства (12) второй и третий интегралы обращаются в нуль в силу однородных начальных условий (9) и граничного условия (10), предпоследний интеграл неотрицательный, а последний интеграл после замены $x = M - at$ в производной $\partial_x v_n = \partial_t v_n \partial_x t = -\partial_t v_n / a$, равный интегралу

$$-2a^2 \int_0^\tau \big[\partial_x v_n \partial_t v_n \big] dt \Big|_{x=M-at} = 2a \int_0^\tau (\partial_t v_n)^2 dt \Big|_{x=M-at} \ge 0,$$

также неотрицательный. Теперь правую часть уравнения (8) умножаем на $2\partial_t v_n$, интегрируем по x и t на множестве G^τ и результат оцениваем сверху с помощью неравенства Коши – Буняковского, неравенства $2ab \le \varepsilon a^2 + b^2 / \varepsilon,\ \varepsilon > 0$, при $\varepsilon = 1/(2T)$, и элементарных оценок:

$$2\int_{G^\tau} \partial_t v_n \tilde{f}_n\, dxdt \le 2\int_{G^\tau} |\partial_t v_n|\,|\tilde{f}_n|\, dxdt \le 2\sqrt{\int_{G^\tau} |\partial_t v_n|^2\, dxdt} \sqrt{\int_{G^\tau} |\tilde{f}_n|^2\, dxdt} \le$$

$$\le \varepsilon \int_{G^\tau} |\partial_t v_n|^2\, dxdt + \frac{1}{\varepsilon} \int_{G^\tau} |\tilde{f}_n|^2\, dxdt \le \varepsilon T \sup_{0 \le t \le \tau} \int_0^{M-at} |\partial_t v_n|^2\, dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_{G^\tau} |\tilde{f}_n|^2\, dxdt =$$

$$= \frac{1}{2} \sup_{0 \le t \le \tau} \int_0^{M-at} |\partial_t v_n|^2\, dx + 2T \int_{G^\tau} |\tilde{f}_n|^2\, dxdt. \tag{14}$$

Из оценки снизу (13) и неравенства (14) следует неравенство

$$\int_0^{M-at} \Big[(\partial_t v_n)^2 + a^2 (\partial_x v_n)^2 \Big] dx \Big|_{t=\tau} \le \frac{1}{2} \sup_{0 \le t \le T} \int_0^{M-at} |\partial_t v_n|^2\, dx + 2T \int_{G_0} |\tilde{f}_n|^2\, dxdt. \tag{15}$$

Правая часть этого неравенства не зависит от τ. Тогда в левой его части возьмем точную верхнюю грань по $t = \tau$ от 0 до T и в результате получим неравенство

$$\int\limits_0^{M-at}\left[(\partial_t v_n)^2+(\partial_x v_n)^2\right]dx\Big|_{t=\tau}\le\frac{4T}{\min(1,a^2)}\int\limits_{G_0}|\tilde{f}_n|^2\,dxdt. \tag{16}$$

Так как для любого $\tau\in]0,T]$ справедливо неравенство

$$\sup_{0\le t\le T}\int\limits_0^{M-at}|v_n(x,t)|^2\,dx\le 4T^2\sup_{0\le t\le T}\int\limits_0^{M-at}|\partial_t v_n(x,t)|^2\,dx, \tag{17}$$

то из неравенств (16) и (17) вытекает неравенство (11).

Из неравенства (11) следует, что последовательность v_n при $n\to\infty$ равномерно сходится на множестве G_0 к нулю и, следовательно, u_n при $n\to\infty$ равномерно сходится на G_0 к u, так как согласно теореме вложения Соболева имеет место непрерывное и плотное вложение пространств $W_2^1(\Omega)\subset C(\overline{\Omega})$ для ограниченных множеств $\Omega\subset\mathbb{R}$. Поэтому в решениях (6), (7) переходим к пределу при $n\to\infty$ и получаем равенства

$$u_-(x,t)=\frac{u(x+at,0)+u(x-at,0)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\partial_\tau u(\xi,\tau)\Big|_{\tau=0}d\xi+F(x,t), \tag{18}$$

$$u_+(x,t)=\frac{u(x+at,0)+u(at-x,0)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_0^{x+at}\partial_\tau u(\xi,\tau)\Big|_{\tau=0}d\xi+$$

$$+\frac{1}{2a}\int\limits_0^{at-x}\partial_\tau u(\xi,\tau)\Big|_{\tau=0}d\xi-a\int\limits_0^{t-\frac{x}{a}}\partial_\xi u(\xi,\tau)\Big|_{\xi=0}d\xi+F(x,t) \tag{19}$$

соответственно в $G_-\cap G_0$ и $G_+\cap G_0$. Из равенств (18) и (19) вытекает, что $F\in C^2(G_0)$, так как в этих равенствах все остальные слагаемые принадлежат множеству $C^2(G_0)$ в силу $u\in C^2(G_0)$. Отсюда, в частности, имеем, что F дважды непрерывно дифференцируемая в каждой точке $(x_0,t_0)\in G_\infty$.

Заключение. Из доказанного утверждения следует, что функция $F(x,t)$ является классическим решением уравнения

$$\partial_{tt}F(x,t)-a^2\partial_{xx}F(x,t)=f(x,t). \tag{20}$$

Действительно, интегрируя по частям в левой части равенства (2), получаем равенство

$$\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\left[\partial_{tt}F(x,t)-a^2\partial_{xx}F(x,t)\right]\varphi(x,t)dxdt=\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty f(x,t)\varphi(x,t)dxdt.$$

Так как функция φ произвольная и принадлежит плотному в $L_2(G_\infty)$ множеству, то из последнего равенства следует, что функция $F(x,t)$ удовлетворяет уравнению (20) и, следовательно, является классическим решением уравнения колебаний струны (1).

Список использованной литературы

1. Корзюк, В. И. Уравнения математической физики. – Минск: БГУ, 2011. – 459 с.

2. Барановская, С. Н. Смешанная задача для уравнения колебания струны с зависящей от времени косой производной в краевом условии / С. Н. Барановская, Н. И. Юрчук // Дифференц. уравнения. – 2009. – Т. 45, № 8. – С. 1188–1191.

3. Ломовцев, Ф. Е. Метод Дюамеля решения неоднородного уравнения колебаний полуограниченной струны с косой производной в нестационарном граничном условии / Ф. Е. Ломовцев, Е. Н. Новиков // Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. – 2012. – № 1. – С. 83–86.

4. Ломовцев, Ф. Е. Смешанная задача для неоднородного уравнения колебаний ограниченной струны при первых косых производных в нестационарных граничных условиях / Ф. Е. Ломовцев, Е. Н. Новиков // Воронеж. зимняя мат. школа: материалы Междунар. конф., Воронеж. 27 янв. – 2 февр. 2015 г. – Воронеж: Изд. дом ВГУ, 2015. – С. 73–76.

References

1. Korzyuk V.I. *Equations of mathematical physics*. Minsk, Belarusian State University, 2011. 459 p. (in Russian)
2. Baranovskaya S.N., Yurchuk N.I. Mixed problem for the string vibration equation with a time-dependent oblique derivative in the boundary condition. *Differential equations,* 2009, vol. 45, no. 8, pp. 1188–1191. doi:10.1134/S0012266109080126.
3. Lomovtsev F.E., Novikov E.N. Duhamel's method of solving the inhomogeneous equation semi-infinite string vibration oblique derivative in a non-stationary boundary conditions. *Vestnik Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1. Fizika. Matematika. Informatika* [Vestn. Belarusian. St. Univ. Ser. 1. Physics. Mathematics. Computer science], 2012, no. 1, pp. 83–86. (in Russian)
4. Lomovtsev F.E., Novikov E.N. Mixed problem for the inhomogeneous wave equation finite string at the first oblique derivatives in non-stationary boundary conditions. *Voronezhskaya zimnyaya matematicheskaya shkola: materialy Mezhdunarodnoi konferentsii* [Mathematical School: Materials International conference]. Voronezh, VSU Publishing House, 2015, pp. 73–76. (in Russian)

Информация об авторах

Юрчук Николай Иосифович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической кибернетики механико-математического факультета, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: yurchuk@bsu.by

Новиков Евгений Николаевич – аспирант, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: novikovevgenij@gmail.com

Information about the authors

Yurchuk Nikolai Iosifovich – D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor of the Department of Mathematical Cybernetics of the Faculty of Mechanics and Mathematics, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: yurchuk@bsu.by

Novikov Eugenij Nikolaevich – Postgraduate, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: novikovevgenij@gmail.com

Для цитирования

Юрчук, Н. И. Необходимые условия для существования классических решений уравнения колебаний полуограниченной струны / Н. И. Юрчук, Е. Н. Новиков // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2016. – № 4. – С. 116–120.

For citation

Yurchuk N.I., Novikov E.N. Necessary conditions for existence of classical solutions to the equation of semi-bounded string vibration. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series], 2016, no. 4, pp. 116–120. (in Russian)