ISSN 0002-3574 (print)
УДК 519.65

Поступила в редакцию 28.11.2016
Received 28.11.2016

А. П. Худяков, А. А. Трофимук

Брестский государственный университет им. А. С. Пушкина, Брест, Беларусь

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ФОРМУЛЫ ЭРМИТА – БИРКГОФА ОТНОСИТЕЛЬНО АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМ ФУНКЦИЙ С ОДНИМ СПЕЦИАЛЬНЫМ УЗЛОМ

Данная статья посвящена задаче построения и исследования обобщенных интерполяционных формул Эрмита – Биркгофа. Для функций скалярного аргумента построены алгебраический и тригонометрический интерполяционные многочлены Эрмита – Биркгофа, содержащие значение дифференциального оператора специального вида в одном из узлов. Порядок дифференциального оператора не зависит от числа узлов. Найдены классы многочленов, для которых интерполяционные формулы точны. Построен тригонометрический аналог формулы Лейбница. Получены представления и оценки погрешности интерполирования. Приведен иллюстрационный пример применения формулы тригонометрического интерполирования. Полученные результаты могут быть использованы в теоретических исследованиях как основа построения методов приближения линейных операторов, а также приближенных методов решения некоторых нелинейных операторных уравнений, которые встречаются в нелинейной динамике, математической физике.

Ключевые слова: интерполирование Эрмита – Биркгофа, дифференциальный оператор, чебышевская система функций, теорема Ролля, тригонометрическое интерполирование, формула Лейбница, определитель Вандермонда.

A. P. Khudyakov, A. A. Trofimuk

Brest State University named after A. S. Pushkin, Brest, Belarus

INTERPOLATION HERMITE – BIRKHOFF-TYPE FORMULAS WITH RESPECT TO THE ALGEBRAIC AND TRIGONOMETRIC SYSTEMS OF FUNCTIONS WITH ONE SPECIAL NODE

This article is devoted to the problem of construction and research of the generalized interpolation Hermite –Birkhoff-type formulas. For the scalar argument functions, the algebraic and trigonometric interpolation Hermite – Birkhoff-type polynomials, containing the value of the differential operator of special form at one of the nodes, are constructed. In the both cases, the differential operator of special form annuls the first basic functions of the corresponding Chebyshev system. Furthermore, the order of the differential operator does not depend on the number of nodes. For interpolation polynomials, the satisfaction theorems of interpolation conditions are proved. The classes of the polynomials, for which the interpolation formulas are exact, are determined. The trigonometric analogue of the Leibniz formula is constructed. This formula is used to prove the satisfaction theorem of interpolation conditions in the trigonometric case. The represenations and estimates of the interpolation error are obtained. In algebraic case, to obtain the representations and estimates of interpolation error, the consequence of Rolle's theorem is used. In the trigonometric case, the integral representation of the interpolation error is utilized. The illustrative example of application of the trigonometric interpolation formula is constructed. The results can be used in the theoretical research as a basis for constructing both approximation methods of linear operators and approximate methods of solving some nonlinear operator equations that are available in nonlinear dynamics, mathematical physics.

Keywords: Hermite – Birkhoff-type interpolation, differential operator, Chebyshev system of functions, Rolle's theorem, trigonometric interpolation, Leibniz formula, Vandermonde determinant.

Введение. Для функций скалярного аргумента обобщенные интерполяционные многочлены Эрмита – Биркгофа по системам тригонометрических, дробно-рациональных и экспоненциальных функций построены и исследованы в [1–3]. Полученные интерполяционные формулы, кроме лагранжевых интерполяционных условий, удовлетворяют также в одном узле условию на совпадение значений дифференциальных операторов специального вида. Рассматриваемые дифференциальные операторы в каждом конкретном случае аннулируют первые базисные функции соответствующей чебышевской системы. В построенных интерполяционных многочленах порядок дифференциального оператора зависит от общего числа узлов, что является их недостатком. Данные формулы обобщены на случай общей чебышевской системы [4], построены их матричные аналоги [5–7].

В монографии [8] исследуются вопросы регулярности интерполирования типа Биркгофа, рассматриваются различные постановки интерполяционных задач этого вида и их приложения. Специальный случай одномерной задачи интерполяции Биркгофа и аппроксимация с ее помощью решения граничной задачи для уравнения Лапласа, а также случай двумерной задачи этого типа рассмотрены в [9]. Задача интерполяции Биркгофа с использованием значений производных первого и второго порядков интерполируемой функции исследуется в [10]. Операторные интерполяционные формулы Эрмита – Биркгофа в пространствах гладких функций построены и исследованы в [11].

В настоящей работе для функций одной скалярной переменной построены и исследованы интерполяционные формулы Эрмита – Биркгофа по алгебраической и тригонометрической системам функций с одним специальным узлом. В данном узле известно значение дифференциального оператора от интерполируемой функции, причем его порядок не зависит от числа узлов. С помощью формул такого типа можно получить явные выражения для приближения соответствующих дифференциальных операторов, используя только значения интерполируемой функции в узлах.

Алгебраический случай. В работе [4] по общей чебышевской системе функций $\varphi_0(x),\varphi_1(x),\ldots,\varphi_{n+1}(x)$, $x\in T\subset\mathbb{R}$, построен обобщенный интерполяционный многочлен Эрмита – Биркгофа вида

$$\tilde{L}_{n+1}(x)=L_n(x)+\frac{\Omega_{n+1}(x)D_{n+1}(f;x_{n+1})}{D_{n+1}(\varphi_{n+1};x_{n+1})},\qquad(1)$$

где $L_n(x)$ – многочлен Лагранжа по рассматриваемой системе функций $\{\varphi_k(x)\},\Omega_{n+1}(x)$ – многочлен степени $n+1$ по той же системе, со старшим коэффициентом, равным 1, удовлетворяющий интерполяционным условиям вида $\Omega_{n+1}(x_k)=0$ $(k=0,1,\ldots,n)$, а $D_{n+1}f(x)$ является линейным дифференциальным оператором порядка $n+1$, аннулирующим первые базисные функции чебышевской системы. Многочлен (1) удовлетворяет интерполяционным условиям

$$\tilde{L}_{n+1}(x_i)=f(x_i)\ (i=0,1,\ldots,n);\quad D_{n+1}(\tilde{L}_{n+1};x_{n+1})=D_{n+1}(f;x_{n+1})$$

и является точным для многочленов вида

$$P_{n+1}(x)=c_0\varphi_0(x)+c_1\varphi_1(x)+\ldots+c_{n+1}\varphi_{n+1}(x),$$

где $c_0,c_1,\ldots,c_{n+1}$ – произвольные числа. Интерполяционный узел x_{n+1} может совпадать с одним из узлов $x_0,x_1,\ldots,x_n$. Очевидно, порядок оператора $D_{n+1}f(x)$ здесь зависит от числа узлов.

В алгебраическом случае многочлен $L_n(x)$ совпадает с алгебраическим интерполяционным многочленом Лагранжа, $\Omega_{n+1}(x)=\omega_n(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$, а дифференциальный оператор $D_{n+1}f(x)\equiv f^{(n+1)}(x)$. Так как $D_{n+1}(\varphi_{n+1};x_{n+1})=(n+1)!$ при $\varphi_{n+1}(x)=x^{n+1}$, то алгебраический многочлен $\tilde{L}_{n+1}(x)$, удовлетворяющий условиям

$$\tilde{L}_{n+1}(x_k)=f(x_k)\quad(k=0,1,\ldots,n);\quad \tilde{L}_{n+1}^{(n+1)}(x_{n+1})=f^{(n+1)}(x_{n+1}),\qquad(2)$$

имеет вид

$$\tilde{L}_{n+1}(f;x)=L_n(f;x)+\frac{\omega_n(x)f^{(n+1)}(x_{n+1})}{(n+1)!}\qquad(3)$$

и является точным для алгебраических многочленов степени не выше $n+1$.

Получим представление и оценку погрешности для формулы (3). Будем предполагать, что функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема $n+2$ раз на промежутке $T=(a,b)$.

Т е о р е м а 1. *Представление погрешности интерполяционной формулы* (3) *имеет вид*

$$f(x)-\tilde{L}_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+2)}(\xi)(\eta-x_{n+1})}{(n+1)!}\omega_n(x), \tag{4}$$

где $\xi, \eta\in T$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Известно [12], что остаточный член алгебраического интерполяционного многочлена Лагранжа имеет вид $f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}\omega_n(x)$, где $\eta\in T$. Тогда $f(x)-\tilde{L}_{n+1}(x)=\frac{\omega_n(x)}{(n+1)!}\left(f^{(n+1)}(\eta)-f^{(n+1)}(x_{n+1})\right)$. Используя далее теорему Лагранжа о среднем значении, можно получить представление (4). Теорема 1 доказана.

Обозначим $M_n=\max\limits_{\theta\in T}\left|f^{(n+2)}(\theta)\right|$, $C_n=\left|\omega_n(x)\right|$. Так как $\left|\eta-x_{n+1}\right|\le b-a$, то для формулы (3) имеет место оценка погрешности

$$\left|f(x)-\tilde{L}_{n+1}(x)\right|\le\frac{(b-a)M_nC_n}{(n+1)!}. \tag{5}$$

Построим далее аналогичную алгебраическую интерполяционную формулу, в которую входит значение производной порядка m, не зависящего от количества узлов. Введем обозначения $\omega_{n,k}(x)=(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)$, $a_k=\omega_{n,k}^{(m)}(x_{n+1})$, $\tilde{x}_k=a_kx_{n+1}+m\omega_{n,k}^{(m-1)}(x_{n+1})$ $(k=0,1,\ldots,n)$. Будем предполагать, что $\omega_n^{(m)}(x_{n+1})\neq 0$.

Т е о р е м а 2. *Пусть* $1\le m\le n$. *Алгебраический многочлен степени* $n+1$

$$\tilde{L}_{n+1}(f;x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\omega_{n,k}(x)(a_kx-\tilde{x}_k)}{\omega_{n,k}(x_k)(a_kx_k-\tilde{x}_k)}f(x_k)+\frac{\omega_n(x)}{\omega_n^{(m)}(x_{n+1})}f^{(m)}(x_{n+1}) \tag{6}$$

удовлетворяет интерполяционным условиям

$$\tilde{L}_{n+1}(x_k)=f(x_k)\ (k=0,1,\ldots,n);\ \tilde{L}_{n+1}^{(m)}(x_{n+1})=f^{(m)}(x_{n+1}), \tag{7}$$

и является точным для алгебраических многочленов степени не выше $n+1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выполнение первой группы интерполяционных условий (7) очевидно. По формуле Лейбница $\left(\omega_{n,k}(x)(a_kx-\tilde{x}_k)\right)^{(m)}=\omega_{n,k}^{(m)}(x)(a_kx-\tilde{x}_k)+ma_k\omega_{n,k}^{(m-1)}(x)$. Поэтому при $x=x_{n+1}$ будем иметь $\left(\omega_{n,k}(x)(a_kx-\tilde{x}_k)\right)^{(m)}\Big|_{x=x_{n+1}}=0$. Следовательно, последнее условие в (7) также имеет место.

Рассмотрим определитель и цепочку равенств

$$\begin{vmatrix}
1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^{n+1}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
1 & x_{k-1} & x_{k-1}^2 & \cdots & x_{k-1}^{n+1}\\
1 & x_{k+1} & x_{k+1}^2 & \cdots & x_{k+1}^{n+1}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n+1}\\
0 & \frac{d^mu}{du^m} & \frac{d^mu^2}{du^m}\Big|_{u=x_{n+1}} & \cdots & \frac{d^mu^{n+1}}{du^m}\Big|_{u=x_{n+1}}\\
1 & x & x^2 & \cdots & x^{n+1}
\end{vmatrix}
=\frac{d^m}{du^m}\begin{vmatrix}
1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^{n+1}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
1 & x_{k-1} & x_{k-1}^2 & \cdots & x_{k-1}^{n+1}\\
1 & x_{k+1} & x_{k+1}^2 & \cdots & x_{k+1}^{n+1}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n+1}\\
1 & u & u^2 & \cdots & u^{n+1}\\
1 & x & x^2 & \cdots & x^{n+1}
\end{vmatrix}_{u=x_{n+1}}=$$

$$= c\omega_{n,k}(x)\frac{d^m}{du^m}\left[\omega_{n,k}(u)(x-u)\right]\Bigg|_{u=x_{n+1}} = c\omega_{n,k}(x)\left[\omega_{n,k}^{(m)}(x_{n+1})(x-x_{n+1}) - m\omega_{n,k}^{(m-1)}(x_{n+1})\right] =$$

$$= c\omega_{n,k}(x)(a_k x - \tilde{x}_k), \tag{8}$$

где c = const.

Введем определитель

$$\tilde{\Delta} = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^{n+1} \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n+1} \\ 0 & \dfrac{d^m u}{du^m} & \dfrac{d^m u^2}{du^m}\Bigg|_{u=x_{n+1}} & \cdots & \dfrac{d^m u^{n+1}}{du^m}\Bigg|_{u=x_{n+1}} \end{vmatrix}.$$

Тогда многочлен (6) можно представить в виде

$$\tilde{L}_{n+1}(x) = -\frac{1}{\tilde{\Delta}}\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^{n+1} & f(x_0) \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n+1} & f(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n+1} & f(x_n) \\ 0 & \dfrac{d^m u}{du^m} & \dfrac{d^m u^2}{du^m}\Bigg|_{u=x_{n+1}} & \cdots & \dfrac{d^m u^{n+1}}{du^m}\Bigg|_{u=x_{n+1}} & f^{(m)}(x_{n+1}) \\ 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n+1} & 0 \end{vmatrix}. \tag{9}$$

При $f(x) = x^k$, $0 \le k \le n+1$ элементы последнего столбца определителя в (9) (кроме элемента, находящегося в последней строке) будут совпадать с элементами $(k+1)$-го столбца. Тогда раскладывая определитель в (9) по элементам последней строки, будем иметь $\tilde{L}_{n+1}(x^k; x) \equiv x^k$. Таким образом, формула (6) точна для алгебраических многочленов степени не выше $n+1$. Теорема 2 доказана.

Построим далее представление погрешности для формулы (6). Будем предполагать, что $f \in C_T^{n+1}$. Введем обозначение $\alpha = \dfrac{(n+1)!}{\omega_n^{(m)}(x_{n+1})}\left[\sum_{k=0}^{n}\dfrac{a_k f(x_k)}{\omega_{n,k}(x_k)} - f^{(m)}(x_{n+1})\right]$.

Т е о р е м а 3. *Погрешность интерполяционного многочлена* (6) *задается равенством*

$$f(x) - \tilde{L}_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi) + \alpha}{(n+1)!}\omega_n(x), \tag{10}$$

где $\xi \in T$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть фиксированное значение x не совпадает ни с одним из узлов $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Введем константу $K = \dfrac{f(x) - \tilde{L}_{n+1}(x)}{\omega_n(x)}$, а также функцию $\varphi(t) = f(t) - \tilde{L}_{n+1}(t) - K\omega_n(t)$. Нетрудно показать, что при $k = 0,1,2,\ldots,n$ справедливы равенства $a_k x_k - \tilde{x}_k = -\omega_n^{(m)}(x_{n+1})$. И так как $\dfrac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\left\{\omega_{n,k}(x)(a_k x - \tilde{x}_k)\right\} = a_k(n+1)!$, а $\omega_n^{(n+1)}(x) = (n+1)!$, то функцию $\varphi^{(n+1)}(t)$ можно представить в виде $\varphi^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) + \alpha - K(n+1)!$. Очевидно, что $\varphi(x_0) = \varphi(x_1) = \ldots = \varphi(x_n) = \varphi(x) = 0$. По следствию теоремы Ролля $\varphi^{(n+1)}(t)$ на интервале T обращается в нуль по крайней мере один раз: $\varphi^{(n+1)}(\xi)=0$. Значит, $f^{(n+1)}(\xi)+\alpha-K(n+1)!=0$, и $K=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)+\alpha}{(n+1)!}$. Таким образом, погрешность формулы (6) имеет вид (10). Теорема 3 доказана.

Введем обозначения $M_n=\max\limits_{\theta\in T}\left|f^{(n+1)}(\theta)+\alpha\right|$, $C_n=\left|\omega_n(x)\right|$. Для интерполяционной формулы (6) справедлива оценка погрешности

$$\left|f(x)-\tilde{L}_{n+1}(x)\right|\le\frac{M_nC_n}{(n+1)!}.$$

З а м е ч а н и е 1. Задача построения алгебраического интерполяционного многочлена, удовлетворяющего интерполяционным условиям вида (7), не всегда однозначно разрешима. Например, в случае узлов $x_0=1$, $x_1=3$, $x_2=2$ и функции, такой что $f(x_0)=3$, $f(x_1)=13$, $f'(x_2)=5$, существует как минимум два алгебраических многочлена, удовлетворяющих условиям $P(x_k)=f(x_k)$ $(k=0,1)$; $P'(x_2)=f'(x_2)$. Первый из них – $P_1(x)=x^2+x+1$, второй – $P_2(x)=2x^2-3x+4$. Интерполяционный многочлен (6) в данном случае не существует, так как $\omega_1'(x_2)=0$.

Алгебраические интерполяционные формулы Эрмита – Биркгофа для функций скалярного аргумента и операторов построены и исследованы также в работах [13–14].

Тригонометрический случай. Построим тригонометрическую интерполяционную формулу, аналогичную (6). Пусть в узлах $x_0,x_1,\ldots,x_{2n}$ из промежутка $T=[0;2\pi)$ известны значения 2π-периодической функции $f(x)$, а также в узле x_{2n+1} – значение $D_m(f;x_{2n+1})$ $(1\le m\le 2n)$ дифференциального оператора [15] вида

$$D_{2k+1}f(x)=(D^2+k^2)\cdots(D^2+2^2)(D^2+1^2)Df(x), \tag{11}$$

$$D_{2k}f(x)=(D^2+(k-1)^2)\cdots(D^2+1^2)D^2f(x),\ D=\frac{d}{dx},\ k=0,1,2,\ldots\ . \tag{12}$$

Будем считать, что $D_0f(x)\equiv f(x)$. Заметим, что для оператора (11), (12) справедливы равенства

$$D_{2k+1}f(x)=DD_{2k}f(x)+k^2D_{2k-1}f(x),\ D_{2k}f(x)=DD_{2k-1}f(x). \tag{13}$$

В математическом анализе известна формула Лейбница для n-й $(n\in\mathbb{N})$ производной произведения двух скалярных функций [16]:

$$\left(u(x)v(x)\right)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^ku^{(n-k)}(x)v^{(k)}(x),$$

где

$$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!},$$

которая имеет место, если функции $u(x)$ и $v(x)$ – n раз дифференцируемые в точке $x\in\mathbb{R}$.

Обобщим данную формулу на случай, когда вместо производных берутся дифференциальные операторы (11), (12). Справедлива

Т е о р е м а 4 (тригонометрический аналог формулы Лейбница). *Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы m раз в точке $x\in\mathbb{R}$, то справедливы формулы*

$$D_m\left(u(x)v(x)\right)=D_{2p+1}\left(u(x)v(x)\right)=\sum_{k=0}^{m}C_m^kD_{m-k}u(x)D_kv(x),\ p=0,1,\ldots, \tag{14}$$

$$D_m\left(u(x)v(x)\right)=D_{2p}\left(u(x)v(x)\right)=$$
$$=\sum_{k=0}^{m}C_m^kD_{m-k}u(x)D_kv(x)-\frac{m(m-1)}{4}\sum_{k=1,3,\ldots}^{m-3}C_{m-2}^kD_{m-k-2}u(x)D_kv(x),\ p=1,2,\ldots\ . \tag{15}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся методом математической индукции. При $m = 1$ имеем

$$D_1\left(u(x)v(x)\right) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = C_1^0 D_1 u(x)v(x) + C_1^1 u(x) D_1 v(x).$$

При $m = 2$ по алгебраической формуле Лейбница получим

$$D_2\left(u(x)v(x)\right) = \left(u(x)v(x)\right)'' = u''(x)v(x) + 2u'(x)v'(x) + u(x)v''(x) = \sum_{k=0}^{2} C_2^k D_{2-k}u(x) D_k v(x).$$

Вторая сумма в (15) здесь равна нулю, так как ее верхний предел суммирования равен –1.

Предположим, что равенства (14), (15) верны при $1 \le m \le 2p$, $p \in \mathbb{N}$. Докажем, что они справедливы и при $m = 2p + 1$, $m = 2p + 2$. При $m = 2p + 1$ по первой из формул (13)

$$D_{2p+1}\left(u(x)v(x)\right) = DD_{2p}\left(u(x)v(x)\right) + p^2 D_{2p-1}\left(u(x)v(x)\right). \tag{16}$$

Далее используем равенство (15) при $m = 2p$, дифференцируя которое, будем иметь

$$DD_{2p}\left(u(x)v(x)\right) = \sum_{k=0}^{2p} C_{2p}^k \left(DD_{2p-k}u(x)D_k v(x) + D_{2p-k}u(x)DD_k v(x)\right) -$$
$$-\frac{p(2p-1)}{2} \sum_{k=1,3,\ldots}^{2p-3} C_{2p-2}^k \left(DD_{2p-k-2}u(x)D_k v(x) + D_{2p-k-2}u(x)DD_k v(x)\right). \tag{17}$$

Из соотношений (13) при четных значениях k следует, что

$$DD_{2p-k}u(x) = D_{2p-k+1}u(x) - \left(p - \frac{k}{2}\right)^2 D_{2p-k-1}u(x), \quad DD_k v(x) = D_{k+1}v(x) - \left(\frac{k}{2}\right)^2 D_{k-1}v(x), \tag{18}$$

а при нечетных

$$DD_{2p-k}u(x) = D_{2p-k+1}u(x), \; DD_k v(x) = D_{k+1}v(x). \tag{19}$$

Аналогичное равенство верно для $DD_{2p-k-2}u(x)$.

Второе слагаемое в (16) по формуле (14) при $m = 2p - 1$ имеет вид

$$p^2 D_{2p-1}\left(u(x)v(x)\right) = p^2 \sum_{k=0}^{2p-1} C_{2p-1}^k D_{2p-k-1}u(x) D_k v(x). \tag{20}$$

Разобьем суммы в (17) и (20) на суммы с четными и нечетными индексами и заменим в них производные дифференциальных операторов правыми частями выражений (18), (19). После преобразований будем иметь

$$D_{2p+1}\left(u(x)v(x)\right) = \sum_{k=0}^{2p} C_{2p}^k D_{2p-k+1}u(x) D_k v(x) + \sum_{k=0}^{2p} C_{2p}^k D_{2p-k}u(x) D_{k+1}v(x) -$$
$$-p^2 C_{2p}^0 D_{2p-1}u(x) D_0 v(x) + p^2 C_{2p-1}^0 D_{2p-1}u(x) D_0 v(x) -$$
$$-\sum_{k=2,4,\ldots}^{2p-2} \left[C_{2p}^k \left(p - \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{p(2p-1)}{2} C_{2p-2}^{k-1} - p^2 C_{2p-1}^k \right] D_{2p-k-1}u(x) D_k v(x) -$$
$$-\sum_{k=1,3,\ldots}^{2p-3} \left[C_{2p}^{k+1} \left(\frac{k+1}{2}\right)^2 + \frac{p(2p-1)}{2} C_{2p-2}^k - p^2 C_{2p-1}^k \right] D_{2p-k-1}u(x) D_k v(x) -$$
$$-p^2 C_{2p}^{2p} D_0 u(x) D_{2p-1}v(x) + p^2 C_{2p-1}^{2p-1} D_0 u(x) D_{2p-1}v(x).$$

Очевидно, что

$$-p^2C_{2p}^0D_{2p-1}u(x)D_0v(x)+p^2C_{2p-1}^0D_{2p-1}u(x)D_0v(x)=0,$$

$$-p^2C_{2p}^{2p}D_0u(x)D_{2p-1}v(x)+p^2C_{2p-1}^{2p-1}D_0u(x)D_{2p-1}v(x)=0.$$

Нетрудно также показать, что

$$C_{2p}^k\left(p-\frac{k}{2}\right)^2+\frac{p(2p-1)}{2}C_{2p-2}^{k-1}-p^2C_{2p-1}^k=0,\ k=2,4,\ldots,2p-2,$$

$$C_{2p}^{k+1}\left(\frac{k+1}{2}\right)^2+\frac{p(2p-1)}{2}C_{2p-2}^{k}-p^2C_{2p-1}^k=0,\ \ k=1,3,\ldots,2p-3.$$

Используя далее соотношение $C_{2p}^k+C_{2p}^{k-1}=C_{2p+1}^k$, получим

$$D_{2p+1}\big(u(x)v(x)\big)=\sum_{k=0}^{2p}C_{2p}^kD_{2p-k+1}u(x)D_kv(x)+\sum_{k=1}^{2p+1}C_{2p}^{k-1}D_{2p-k+1}u(x)D_kv(x)=$$

$$=C_{2p}^0D_{2p+1}u(x)D_0v(x)+\sum_{k=1}^{2p}\Big(C_{2p}^k+C_{2p}^{k-1}\Big)D_{2p-k+1}u(x)D_kv(x)+C_{2p}^{2p}D_0u(x)D_{2p+1}v(x)=$$

$$=\sum_{k=0}^{2p+1}C_{2p+1}^kD_{2p-k+1}u(x)D_kv(x).$$

Докажем теперь, что верно равенство (15) при $m=2p+2$. По второй из формул (13) и соотношению (14) при $m=2p+1$

$$D_{2p+2}\big(u(x)v(x)\big)=DD_{2p+1}\big(u(x)v(x)\big)=$$

$$=\sum_{k=0}^{2p+1}C_{2p+1}^k\big(DD_{2p-k+1}u(x)D_kv(x)+D_{2p-k+1}u(x)DD_kv(x)\big).$$

Как и ранее, разбивая сумму в последнем равенстве на суммы с четными и нечетными индексами и используя соотношения, аналогичные (18), (19), после преобразований будем иметь

$$D_{2p+2}\big(u(x)v(x)\big)=\sum_{k=0}^{2p+1}C_{2p+1}^kD_{2p-k+2}u(x)D_kv(x)+\sum_{k=0}^{2p+1}C_{2p+1}^kD_{2p-k+1}u(x)D_{k+1}v(x)-$$

$$-\sum_{k=2,4,\ldots}^{2p}C_{2p+1}^k\left(\frac{k}{2}\right)^2D_{2p-k+1}u(x)D_{k-1}v(x)-\sum_{k=1,3,\ldots}^{2p-1}C_{2p+1}^k\left(p-\frac{k-1}{2}\right)^2D_{2p-k}u(x)D_kv(x)=$$

$$=\Sigma_1+\Sigma_2-\Sigma_3-\Sigma_4.$$

Здесь через Σ_k ($k=1,2,3,4$) обозначена k-я сумма.

Так как $C_{2p+1}^k+C_{2p+1}^{k-1}=C_{2p+2}^k$, то

$$\Sigma_1+\Sigma_2=\Sigma_1+\sum_{k=1}^{2p+2}C_{2p+1}^{k-1}D_{2p-k+2}u(x)D_kv(x)=\sum_{k=0}^{2p+2}C_{2p+2}^kD_{2p-k+2}u(x)D_kv(x).\qquad(21)$$

Аналогично, используя равенство

$$C_{2p+1}^{k+1}\left(\frac{k+1}{2}\right)^2+C_{2p+1}^k\left(\frac{2p-k+1}{2}\right)^2=\frac{(p+1)(2p+1)}{2}C_{2p}^k,$$

получим

$$\Sigma_3+\Sigma_4=\sum_{k=1,3,\ldots}^{2p-1}C_{2p+1}^{k+1}\left(\frac{k+1}{2}\right)^2 D_{2p-k}u(x)D_kv(x)+\Sigma_4=\frac{(p+1)(2p+1)}{2}\sum_{k=1,3,\ldots}^{2p-1}C_{2p}^{k}D_{2p-k}u(x)D_kv(x). \quad (22)$$

Объединяя суммы (21), (22), будем иметь

$$D_{2p+2}\big(u(x)v(x)\big)=\sum_{k=0}^{2p+2}C_{2p+2}^{k}D_{2p-k+2}u(x)D_kv(x)-\frac{(p+1)(2p+1)}{2}\sum_{k=1,3,\ldots}^{2p-1}C_{2p}^{k}D_{2p-k}u(x)D_kv(x),$$

что совпадает с (15) при $m = 2p + 2$. Теорема 4 доказана.

Введем тригонометрические многочлены

$$t_{n,k}(x)=\sin\frac{x-x_0}{2}\cdots\sin\frac{x-x_{k-1}}{2}\sin\frac{x-x_{k+1}}{2}\cdots\sin\frac{x-x_{2n}}{2}\quad (k=0,1,\ldots,n);$$

$$\Omega_{n+1}(x)=\sin\frac{1}{2}\big(x+x_0+x_1+\ldots+x_{2n}\big)\prod_{k=0}^{2n}\sin\frac{x-x_k}{2},$$

а также числовые величины

$$a_k=\cos\frac{1}{2}(2x_{2n+1}+\tilde{x}_k)D_m(t_{n,k};x_{2n+1}),\ b_k=-\sin\frac{1}{2}(2x_{2n+1}+\tilde{x}_k)D_m(t_{n,k};x_{2n+1}), \quad (23)$$

$$c_k=-\cos\frac{1}{2}(2x_{2n+1}+\tilde{x}_k)\left(D_m(t_{n,k};x_{2n+1})-\frac{m(m-1)}{2}D_{m-2}(t_{n,k};x_{2n+1})\right)+$$

$$+m\sin\frac{1}{2}(2x_{2n+1}+\tilde{x}_k)\left(D_{m-1}(t_{n,k};x_{2n+1})-\frac{1+(-1)^m}{2}\frac{(m-1)(m-2)}{4}D_{m-3}(t_{n,k};x_{2n+1})\right). \quad (24)$$

Заметим, что при нечетном значении m второе слагаемое во вторых скобках в (24) равно нулю.

Т е о р е м а 5. *Тригонометрический интерполяционный многочлен степени не выше* $n+1$ *вида*

$$T_{n+1}(f;x)=\sum_{k=0}^{2n}\frac{t_{n,k}(x)\big(a_k\cos(x-x_{2n+1})+b_k\sin(x-x_{2n+1})+c_k\big)f(x_k)}{t_{n,k}(x_k)\big(a_k\cos(x_k-x_{2n+1})+b_k\sin(x_k-x_{2n+1})+c_k\big)}+\frac{\Omega_{n+1}(x)D_m(f;x_{2n+1})}{D_m(\Omega_{n+1};x_{2n+1})} \quad (25)$$

удовлетворяет интерполяционным условиям

$$T_{n+1}(x_i)=f(x_i)\ (i=0,1,\ldots,2n);\ D_m(T_{2n+1};x_{n+1})=D_m(f;x_{2n+1}), \quad (26)$$

и является точным для тригонометрических многочленов степени не выше $n+1$ *с коэффициентом при* $\sin(n+1)x$, *равным нулю.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $t_{n,k}(x_i)=\delta_{ik}t_{n,k}(x_k)$, где δ_{ik} – символ Кронекера, и $\Omega_{n+1}(x_i)=0$ $(i,k=0,1,\ldots,2n)$, то из этого следует выполнение первой группы интерполяционных условий в (26). Преобразуем далее выражение $D_m\big(t_{n,k}(x)\big(a_k\cos(x-x_{2n+1})+b_k\sin(x-x_{2n+1})+c_k\big)\big)$. При нечетном значении m по формуле (14) будем иметь

$$D_m\Big[t_{n,k}(x)\big(a_k\cos(x-x_{2n+1})+b_k\sin(x-x_{2n+1})+c_k\big)\Big]=$$

$$=\big(D_mt_{n,k}(x)\big)\cdot\big(a_k\cos(x-x_{2n+1})+b_k\sin(x-x_{2n+1})+c_k\big)-$$

$$-m\big(D_{m-1}t_{n,k}(x)\big)\cdot\big(a_k\sin(x-x_{2n+1})-b_k\cos(x-x_{2n+1})\big)-$$

$$-\frac{m(m-1)}{2}\big(D_{m-2}t_{n,k}(x)\big)\cdot\big(a_k\cos(x-x_{2n+1})+b_k\sin(x-x_{2n+1})\big). \quad (27)$$

Подставляя в последнее равенство вместо a_k, b_k и c_k их выражения по формулам (23), (24), при $x = x_{2n+1}$, после преобразований получим

$$D_m\left[t_{n,k}(x)\left(a_k\cos(x-x_{2n+1})+b_k\sin(x-x_{2n+1})+c_k\right);x_{2n+1}\right]=0. \tag{28}$$

Обозначим правую часть равенства (27) через $\psi(x)$. Тогда при четном значении m по формуле (15) имеем

$$D_m\left[t_{n,k}(x)\left(a_k\cos(x-x_{2n+1})+b_k\sin(x-x_{2n+1})+c_k\right)\right]=$$

$$=\psi(x)-\frac{m(m-1)(m-2)}{4}\left(D_{m-3}t_{n,k}(x)\right)\cdot\left(a_k\sin(x-x_{2n+1})-b_k\cos(x-x_{2n+1})\right).$$

Как и ранее, после подстановки в последнее соотношение вместо a_k, b_k и c_k их выражений по формулам (23), (24), а также упрощений при $x = x_{2n+1}$, получим равенство (28).

Таким образом, последнее интерполяционное условие в (26) также имеет место.

Покажем далее, что формула (25) точна для тригонометрических многочленов степени не выше $n + 1$ с коэффициентом при $\sin(n + 1)x$, равным нулю. Представим многочлен (25) в виде определителя. Рассмотрим определитель вида

$$W_{cs}(x_0,x_1,\ldots,x_{2n+1})=$$

$$=\begin{vmatrix}1 & \cos x_0 & \sin x_0 & \cos 2x_0 & \sin 2x_0 & \cdots & \cos nx_0 & \sin nx_0 & \cos(n+1)x_0\\ 1 & \cos x_1 & \sin x_1 & \cos 2x_1 & \sin 2x_1 & \cdots & \cos nx_1 & \sin nx_1 & \cos(n+1)x_1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & \cos x_{2n+1} & \sin x_{2n+1} & \cos 2x_{2n+1} & \sin 2x_{2n+1} & \cdots & \cos nx_{2n+1} & \sin nx_{2n+1} & \cos(n+1)x_{2n+1}\end{vmatrix}$$

и вычислим его точное значение, используя методику, предложенную в [17, с. 43]. Для краткости будем выписывать только одну строчку, отбрасывая индексы у x. Таким образом, напишем

$$W_{cs}=\begin{vmatrix}1 & \cos x & \sin x & \cos 2x & \sin 2x & \cdots & \cos nx & \sin nx & \cos(n+1)x\end{vmatrix}.$$

Прибавим к столбцам $2,4,\ldots,2n$ столбцы соответственно $3,5,\ldots,2n + 1$, умноженные на i:

$$W_{cs}=\begin{vmatrix}1 & e^{ix} & \sin x & e^{2ix} & \sin 2x & \cdots & e^{inx} & \sin nx & \cos(n+1)x\end{vmatrix}.$$

Умножим столбцы $3,5,\ldots,2n + 1$ на $-2i$:

$$(-2i)^n W_{cs}=\begin{vmatrix}1 & e^{ix} & -2i\sin x & e^{2ix} & -2i\sin 2x & \cdots & e^{inx} & -2i\sin nx & \cos(n+1)x\end{vmatrix}$$

и прибавим столбцы $2,4,\ldots,2n$ к столбцам $3,5,\ldots,2n + 1$ соответственно:

$$(-2i)^n W_{cs}=\begin{vmatrix}1 & e^{ix} & e^{-ix} & e^{2ix} & e^{-2ix} & \cdots & e^{inx} & e^{-inx} & \cos(n+1)x\end{vmatrix}. \tag{29}$$

По формуле Эйлера $\cos(n+1)x=\dfrac{e^{i(n+1)x}+e^{-i(n+1)x}}{2}$. Подставляя это выражение в (29) и умножая последний столбец определителя на 2 будем иметь:

$$2(-2i)^n W_{cs}=\begin{vmatrix}1 & e^{ix} & e^{-ix} & e^{2ix} & e^{-2ix} & \cdots & e^{inx} & e^{-inx} & e^{i(n+1)x}+e^{-i(n+1)x}\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}1 & e^{ix} & e^{-ix} & e^{2ix} & e^{-2ix} & \cdots & e^{inx} & e^{-inx} & e^{i(n+1)x}\end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix}1 & e^{ix} & e^{-ix} & e^{2ix} & e^{-2ix} & \cdots & e^{inx} & e^{-inx} & e^{-i(n+1)x}\end{vmatrix}.$$

Переставим теперь столбцы в обоих определителях таким образом, чтобы получилась геометрическая прогрессия со знаменателем e^{ix}. При этом в первом определителе будет произведено $n(n+1)$ перемен знаков, а во втором – n^2+3n+1 таких перемен. Так как $n(n+1)$ – четное число, а n^2+3n+1 – нечетное при любом $n \in \mathbb{N}$, то

$$2(-2i)^n W_{cs} = \left| e^{-inx} \quad e^{-i(n-1)x} \quad \cdots \quad e^{-ix} \quad 1 \quad e^{ix} \quad \cdots \quad e^{inx} \quad e^{i(n+1)x} \right| -$$

$$- \left| e^{-i(n+1)x} \quad e^{-inx} \quad \cdots \quad e^{-ix} \quad 1 \quad e^{ix} \quad \cdots \quad e^{i(n-1)x} \quad e^{inx} \right|.$$

Умножим первые строки обоих определителей на $e^{i(n+1)x_0}$, вторые – на $e^{i(n+1)x_1}$ и т. д.:

$$e^{(n+1)i\sum\limits_{k=0}^{2n+1} x_k} 2(-2i)^n W_{cs} = \left(e^{i\sum\limits_{k=0}^{2n+1} x_k} - 1 \right) \left| 1 \quad e^{ix} \quad e^{2ix} \quad \cdots \quad e^{(2n+1)ix} \right|.$$

Определитель, стоящий в правой части последнего равенства, есть определитель Вандермонда порядка $2n+2$, точное значение которого вычислено в [17, с. 41]:

$$\left| 1 \quad e^{ix} \quad e^{2ix} \quad \cdots \quad e^{(2n+1)ix} \right| = (2i)^{(n+1)(2n+1)} e^{\frac{i}{2}(2n+1)\sum\limits_{k=0}^{2n+1} x_k} \prod_{p<q}^{0\ldots 2n+1} \sin\frac{x_q - x_p}{2}.$$

Отсюда после преобразований и сокращений следует, что

$$W_{cs}(x_0, x_1, \ldots, x_{2n+1}) = (-1)^{n-1} 2^{2n^2+2n+1} \sin\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2n+1} x_k \prod_{p<q}^{0\ldots 2n+1} \sin\frac{x_q - x_p}{2}. \tag{30}$$

Рассмотрим определитель

$$\tilde{\Delta}_k(x) = \left. \begin{vmatrix} 1 & \cos x_0 & \sin x_0 & \cdots & \cos nx_0 & \sin nx_0 & \cos(n+1)x_0 \\ 1 & \cos x_1 & \sin x_1 & \cdots & \cos nx_1 & \sin nx_1 & \cos(n+1)x_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos x_{k-1} & \sin x_{k-1} & \cdots & \cos nx_{k-1} & \sin nx_{k-1} & \cos(n+1)x_{k-1} \\ 1 & \cos x_{k+1} & \sin x_{k+1} & \cdots & \cos nx_{k+1} & \sin nx_{k+1} & \cos(n+1)x_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos x_{2n} & \sin x_{2n} & \cdots & \cos nx_{2n} & \sin nx_{2n} & \cos(n+1)x_{2n} \\ 0 & D_m \cos u & D_m \sin u & \cdots & D_m \cos nu & D_m \sin nu & D_m \cos(n+1)u \\ 1 & \cos x & \sin x & \cdots & \cos nx & \sin nx & \cos(n+1)x \end{vmatrix} \right|_{u=x_{2n+1}} =$$

$$= D_m \left. \left(\begin{vmatrix} 1 & \cos x_0 & \sin x_0 & \cdots & \cos nx_0 & \sin nx_0 & \cos(n+1)x_0 \\ 1 & \cos x_1 & \sin x_1 & \cdots & \cos nx_1 & \sin nx_1 & \cos(n+1)x_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos x_{k-1} & \sin x_{k-1} & \cdots & \cos nx_{k-1} & \sin nx_{k-1} & \cos(n+1)x_{k-1} \\ 1 & \cos x_{k+1} & \sin x_{k+1} & \cdots & \cos nx_{k+1} & \sin nx_{k+1} & \cos(n+1)x_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos x_{2n} & \sin x_{2n} & \cdots & \cos nx_{2n} & \sin nx_{2n} & \cos(n+1)x_{2n} \\ 1 & \cos u & \sin u & \cdots & \cos nu & \sin nu & \cos(n+1)u \\ 1 & \cos x & \sin x & \cdots & \cos nx & \sin nx & \cos(n+1)x \end{vmatrix}; u \right) \right|_{u=x_{2n+1}},$$

где $0 \le k \le 2n$.

По формуле (30)

$$\tilde{\Delta}_k(x) = (-1)^n 2^{2n^2+2n+1} \prod_{p<q}^{0\ldots k-1,k+1\ldots 2n} \sin\frac{x_q - x_p}{2} t_{n,k}(x) \times$$

$$\times D_m\left(\sin\frac{1}{2}(x + u + x_0 + x_1 + \ldots + x_{k-1} + x_{k+1} + \ldots + x_{2n}) \sin\frac{u-x}{2} t_{n,k}(u); u \right)_{u=x_{2n+1}}. \quad (31)$$

Введем обозначение $\tilde{x}_k = x_0 + x_1 + \ldots + x_{k-1} + x_{k+1} + \ldots + x_{2n}$. Справедливо тождество

$$\sin\frac{1}{2}(x + u + \tilde{x}_k)\sin\frac{u-x}{2} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{1}{2}(2x + \tilde{x}_k) - \cos\frac{1}{2}(2u + \tilde{x}_k) \right).$$

Тогда, если m нечетно, то

$$D_m\left(\sin\frac{1}{2}(x + u + \tilde{x}_k)\sin\frac{u-x}{2} t_{n,k}(u); u \right) = \frac{1}{2} D_m\left(\left(\cos\frac{1}{2}(2x + \tilde{x}_k) - \cos\frac{1}{2}(2u + \tilde{x}_k) \right) t_{n,k}(u); u \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{1}{2}(2x + \tilde{x}_k) - \cos\frac{1}{2}(2u + \tilde{x}_k) \right) D_m t_{n,k}(u) - \frac{m}{2}\frac{d}{du}\left\{ \cos\frac{1}{2}(2u + \tilde{x}_k) \right\} D_{m-1} t_{n,k}(u) -$$

$$- \frac{m(m-1)}{4}\frac{d^2}{du^2}\left\{ \cos\frac{1}{2}(2u + \tilde{x}_k) \right\} D_{m-2} t_{n,k}(u). \quad (32)$$

Так как

$$\cos\frac{1}{2}(2x + \tilde{x}_k) - \cos\frac{1}{2}(2u + \tilde{x}_k) = \left(\cos(x-u) - 1 \right)\cos\frac{1}{2}(2u + \tilde{x}_k) - \sin(x-u)\sin\frac{1}{2}(2u + \tilde{x}_k),$$

то после вычисления производных и преобразований будем иметь

$$D_m\left(\sin\frac{1}{2}(x + u + \tilde{x}_k)\sin\frac{u-x}{2} t_{n,k}(u); u \right)\Bigg|_{u=x_{2n+1}} = \frac{1}{2}\left(a_k \cos(x - x_{2n+1}) + b_k \sin(x - x_{2n+1}) + c_k \right), \quad (33)$$

где a_k, b_k, c_k – заданные равенствами (23)–(24) числовые величины.

В случае четного m в правой части равенства (32) добавится слагаемое $\frac{m(m-1)(m-2)}{8}\frac{d}{du}\left\{ \cos\frac{1}{2}(2u + \tilde{x}_k) \right\} D_{m-3} t_{n,k}(u)$. Аналогично, после преобразований при $u = x_{2n+1}$ также будет справедливо равенство (33).

Введем определитель

$$\tilde{\Delta} = \begin{vmatrix} 1 & \cos x_0 & \sin x_0 & \cdots & \cos nx_0 & \sin nx_0 & \cos(n+1)x_0 \\ 1 & \cos x_1 & \sin x_1 & \cdots & \cos nx_1 & \sin nx_1 & \cos(n+1)x_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos x_{2n} & \sin x_{2n} & \cdots & \cos nx_{2n} & \sin nx_{2n} & \cos(n+1)x_{2n} \\ 0 & D_m \cos u & D_m \sin u & \cdots & D_m \cos nu & D_m \sin nu & D_m \cos(n+1)u \end{vmatrix}_{u=x_{2n+1}}.$$

Очевидно, что $\tilde{\Delta}_k(x_k) = (-1)^{2n-k+1}\tilde{\Delta} = (-1)^{k-1}\tilde{\Delta}$. С учетом (31) и (33)

$$\frac{t_{n,k}(x)\left(a_k \cos(x - x_{2n+1}) + b_k \sin(x - x_{2n+1}) + c_k \right)}{t_{n,k}(x_k)\left(a_k \cos(x_k - x_{2n+1}) + b_k \sin(x_k - x_{2n+1}) + c_k \right)} = \frac{(-1)^{k-1}\tilde{\Delta}_k(x)}{\tilde{\Delta}}. \quad (34)$$

Из (30) следует, что $W_{cs}(x_0, x_1, \ldots, x_{2n}, x) = c\Omega_{n+1}(x)$, где c – const. Тогда $\tilde{\Delta} = cD_m(\Omega_{n+1}; x_{2n+1})$. Следовательно,

$$\frac{\Omega_{n+1}(x)}{D_m(\Omega_{n+1};x_{2n+1})}=\frac{W_{cs}(x_0,x_1,\ldots,x_{2n},x)}{\tilde{\Delta}}. \quad (35)$$

Объединяя (34), (35), получим

$$T_{n+1}(x)=$$

$$=-\frac{1}{\tilde{\Delta}}\left|\begin{matrix} 1 & \cos x_0 & \sin x_0 & \cdots & \cos nx_0 & \sin nx_0 & \cos(n+1)x_0 & f(x_0) \\ 1 & \cos x_1 & \sin x_1 & \cdots & \cos nx_1 & \sin nx_1 & \cos(n+1)x_1 & f(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos x_{2n} & \sin x_{2n} & \cdots & \cos nx_{2n} & \sin nx_{2n} & \cos(n+1)x_{2n} & f(x_{2n}) \\ 0 & D_m\cos u & D_m\sin u & \cdots & D_m\cos nu & D_m\sin nu & D_m\cos(n+1)u & D_m(f;x_{2n+1}) \\ 1 & \cos x & \sin x & \cdots & \cos nx & \sin nx & \cos(n+1)x & 0 \end{matrix}\right|_{u=x_{2n+1}}.$$

Используя свойства определителя, так же, как и в доказательстве теоремы 2, можно показать, что верны тождества:

$$T_{n+1}(1;x)\equiv 1,\ T_{n+1}(\cos kx;x)\equiv\cos kx\ \ (k=1,2,\ldots,n+1),\ T_{n+1}(\sin kx;x)\equiv\sin kx\ \ (k=1,2,\ldots,n).$$

Таким образом, формула (25) точна для тригонометрических многочленов степени не выше $n+1$ с коэффициентом при $\sin(n+1)x$, равным нулю. Теорема 5 доказана.

Построим представление погрешности формулы (25). В [2] для функции $f(x)$, имеющей на отрезке $[a,b]\in\mathbb{R}$ абсолютно непрерывную производную порядка $r-1$, получен тригонометрический аналог формулы Тейлора вида

$$f(x)=P_{r-1}(x)+R_r(x), \quad (36)$$

где при $r=2k+1,\ k\in\{0\}+\mathbb{N}$,

$$P_{r-1}(x)=H_{\frac{r-1}{2}}(x)=f(a)+\frac{S_1(x-a)}{1!}D_1(f;a)+\frac{C_1(x-a)}{2!}D_2(f;a)+$$

$$+\ldots+\frac{S_{\frac{r-1}{2}}(x-a)}{(r-2)!}D_{r-2}(f;a)+\frac{C_{\frac{r-1}{2}}(x-a)}{(r-1)!}D_{r-1}(f;a);\ \ R_r(x)=\frac{1}{(r-1)!}\int\limits_a^x C_{\frac{r-1}{2}}(x-s)D_r(f;s)ds.$$

Здесь функции $C_k(x)$ и $S_k(x)$ задаются равенствами

$$C_k(x)=2^k(1-\cos x)^k\ \ (k=0,1,2,\ldots);\ \ S_k(x)=2^{k-1}\sin x(1-\cos x)^{k-1}=\frac{1}{2k}C_k'(x)\ \ (k=1,2,\ldots).$$

Введем обозначения $\tilde{t}_{n+1,k}(x)=\dfrac{t_{n,k}(x)\big(a_k\cos(x-x_{2n+1})+b_k\sin(x-x_{2n+1})+c_k\big)}{t_{n,k}(x_k)\big(a_k\cos(x_k-x_{2n+1})+b_k\sin(x_k-x_{2n+1})+c_k\big)}$ $(k=0,1,\ldots,2n)$,

$\tilde{\Omega}_{n+1}(x)=\dfrac{\Omega_{n+1}(x)}{D_m(\Omega_{n+1};x_{2n+1})}$ и функцию $K_n(u)=\begin{cases}C_n(u),\ u\ge 0,\\ 0,\ u<0.\end{cases}$

Т е о р е м а 6. *Если* $f(x)$ *имеет на отрезке* $[0,2\pi]$ *абсолютно непрерывную производную порядка* $2n$, *то остаточный член формулы* (25) *имеет вид*

$$f(x)-T_{n+1}(x)=$$

$$=\frac{1}{(2n)!}\int\limits_0^{2\pi}\left[K_n(x-s)-\sum_{k=0}^{2n}K_n(x_k-s)\tilde{t}_{n+1,k}(x)-\tilde{\Omega}_{n+1}(x)D_m\big(K_n(u-s);u\big)\Big|_{u=x_{2n+1}}\right]D_{2n+1}(f;s)ds. \quad (37)$$

Доказательство. Имеем

$$T_{n+1}(x)=\sum_{k=0}^{2n}\tilde{t}_{n+1,k}(x)f(x_k)+\tilde{\Omega}_{n+1}(x)D_m(f;x_{2n+1}).$$

Подставив вместо $f(x)$ ее выражение, представимое в виде (36), при $r = 2n + 1$, $a = 0$, а также в силу точности формулы (25) для тригонометрических многочленов степени n, будем иметь

$$T_{n+1}(x)=H_n(x)+\sum_{k=0}^{2n}\tilde{t}_{n+1,k}(x)R_{2n+1}(x_k)+\tilde{\Omega}_{n+1}(x)D_m(R_{2n+1};x_{2n+1}),$$

откуда

$$f(x)-T_{n+1}(x)=R_{2n+1}(x)-\sum_{k=0}^{2n}\tilde{t}_{n+1,k}(x)R_{2n+1}(x_k)-\tilde{\Omega}_{n+1}(x)D_m(R_{2n+1};x_{2n+1}).$$

Подставим сюда интегральное выражение для $R_{2n+1}(x)$:

$$f(x)-T_{n+1}(x)=\frac{1}{(2n)!}\left(\int_0^x C_n(x-s)D_{2n+1}(f;s)ds-\sum_{k=0}^{2n}\tilde{t}_{n+1,k}(x)\int_0^{x_k}C_n(x_k-s)D_{2n+1}(f;s)ds\right)-$$

$$-\frac{\tilde{\Omega}_{n+1}(x)}{(2n)!}D_m\left(\int_0^u C_n(u-s)D_{2n+1}(f;s)ds;u\right)\Bigg|_{u=x_{2n+1}}.$$

Используя функцию $K_n(u)$, после преобразований получим соотношение (37). Теорема 6 доказана.

Введем обозначения:

$$B_{n+1}=\max_{0\le\theta,s\le 2\pi}\left|K_n(\theta-s)-\sum_{k=0}^{2n}K_n(x_k-s)\tilde{t}_{n+1,k}(\theta)-\tilde{\Omega}_{n+1}(\theta)D_m\left(K_n(u-s);u\right)\Big|_{u=x_{2n+1}}\right|,$$

$$M_{2n+1}=\max_{\theta\in[0,2\pi]}\left|D_{2n+1}f(\theta)\right|.$$

Тогда оценка погрешности формулы (25) будет иметь вид

$$\left|f(x)-T_{n+1}(x)\right|\le\frac{2\pi B_{n+1}M_{2n+1}}{(2n)!}.$$

Замечание 2. Интерполяционный многочлен (25) удовлетворяет условиям (26) не только при значениях величин a_k, b_k, c_k, задаваемых равенствами (23), (24). Например, эти же условия выполняются для многочлена вида (25) при

$$a_k=-mD_{m-1}(t_{n,k};x_{2n+1})+\frac{1+(-1)^m}{2}\frac{m(m-1)(m-2)}{4}D_{m-3}(t_{n,k};x_{2n+1}),$$

$$b_k=D_m(t_{n,k};x_{2n+1})-\frac{m(m-1)}{2}D_{m-2}(t_{n,k};x_{2n+1}),\ \ c_k=0.$$

Однако в этом случае интерполяционная формула не является точной даже для 1.

Пример. Для функции $f(x)=\cos 3x\cdot e^{\sin 2x}$ построим интерполяционный многочлен (25) при $n = 6$, $m = 2$, а также многочлены лагранжева типа $H_n(f;x)=\sum_{k=0}^{2n}\frac{t_{n,k}(x)f(x_k)}{t_{n,k}(x_k)}$ при $n = 6,7$. Узлы интерполирования для каждой из формул берутся такими: $x_k=\frac{2\pi k}{2n+1}$ $(k=0,1,\ldots,2n)$, для формулы (25) $x_{2n+1}=\pi$. Явный вид многочленов здесь приводить не будем из-за их громоздкости.

Погрешности интерполирования построенными многочленами, вычисленные по формуле $R(f;T)=\sqrt{\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n}\left(f(\overline{x}_k)-T(\overline{x}_k)\right)^2}$, где $\overline{x}_k=\left(x_{k-1}+x_k\right)/2$, $T(x)$ – соответствующий интерполяционный многочлен, равны

$$R(f;T_7)=0{,}0320692,\ \ R(f;H_6)=0{,}20166,\ \ R(f;H_7)=0{,}031053.$$

В данном конкретном случае погрешности интерполирования многочленами $T_7(x)$ и $H_7(x)$ примерно равные, однако при приближении функции многочленом $T_7(x)$ используется число узлов на один меньше, чем при приближении многочленом $H_7(x)$. С другой стороны, применение дополнительного условия на совпадение значений дифференциального оператора второго порядка позволило увеличить точность приближения почти на один десятичный разряд по сравнению с обычной лагранжевой интерполяцией многочленом $H_6(x)$.

Заключение. В данной работе получены следующие новые результаты: для функций скалярного аргумента построены алгебраический и тригонометрический интерполяционные многочлены Эрмита – Биркгофа, содержащие значение дифференциального оператора специального вида в одном из узлов. Порядок дифференциального оператора не зависит от числа узлов. Найдены классы многочленов, для которых интерполяционные формулы точны. Построен тригонометрический аналог формулы Лейбница. Получены явные представления и оценки погрешности интерполирования. Построен иллюстрационный пример применения формулы тригонометрического интерполирования.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф16М-055).

Acknowledgements. This work was supported by the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (Project No. F16M-055).

Список использованных источников

1. Худяков, А. П. Интерполяционные многочлены типа Эрмита – Биркгофа относительно отдельных чебышевских систем функций / А. П. Худяков // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2010. – № 4. – С. 29–36.

2. Худяков, А. П. Явные формулы погрешностей для одного случая эрмитова интерполирования / А. П. Худяков // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2012. – № 1. – С. 13–21.

3. Худяков, А. П. Некоторые задачи теории интерполирования / А. П. Худяков. – Saarbrücken, Deutschland: LAP LAMBERT Acad. Publ., 2014. – 132 с.

4. Худяков, А. П. Обобщенные интерполяционные формулы Эрмита – Биркгофа для случая чебышевских систем функций / А. П. Худяков, Л. А. Янович // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2015. – № 2. – С. 5–14.

5. Yanovich, L.A. On one class of interpolating formulas for functions of matrix variables / L. A. Yanovich, A. P. Hudyakov // Журнал обчислювальної та прикладної математики = J. Numer. Appl. Math. – 2011. – № 2 (105). – P. 136–147.

6. Худяков, А. П. Обобщенные интерполяционные эрмитова типа многочлены для функций матричной переменной / А. П. Худяков, Л. А. Янович // Тр. Ин-та математики. – 2011. – Т. 19, № 2. – С. 103–114.

7. Янович, Л. А. Интерполяционные формулы первых и вторых порядков для функций матричного аргумента / Л. А. Янович, А. П. Худяков // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2012. – Т. 56, № 1. – С. 16–22.

8. Shi, Y. G. Theory of Birkhoff Interpolation / Y. G. Shi. – New York: Nova Science Publ., 2003. – 252 p.

9. Nazarzadeh, A. Another case of incidence matrix for bivariate Birkhoff interpolation / A. Nazarzadeh, Kh. Rahsepar Fard, A. Mahmoodi // Журнал обчислювальної та прикладної математики = J. Comput. Appl. Math. – 2016. – № 2 (122). – P. 55–70.

10. Zhao, T. G. On two Birkhoff-type interploations with first- and second-order derivative / T. G. Zhao, Y. J. Li // J. Appl. Math. Phys. – 2016. – № 4. – P. 1269–1274.

11. Yanovich, L. A. Operator interpolation Hermite – Birkhoff formulas in spaces of smooth functions // L. A. Yanovich, M. V. Ignatenko // J. Numer. Appl. Math. – 2010. – Vol. 100, № 1. – P. 117–129.

12. Хаусхолдер, А. С. Основы численного анализа / А. С. Хаусхолдер; под ред. Л. А. Люстерника. – М.: Из-во иностр. лит., 1956. – 320 с.

13. Турецкий, А. Х. Теория интерполирования в задачах / А. Х. Турецкий. – Минск: Выш. шк., 1968. – 320 с.

14. Makarov, V. L. Methods of Operator Interpolation / V. L. Makarov, V. V. Khlobystov, L. A. Yanovich. – Київ: Ін-т математики Нац. акад. наук України, 2010. – Т. 83. – 517 с.

15. Степанов, В. В. Курс дифференциальных уравнений / В. В. Степанов. – М.: ГИФМЛ, 1959. – 468 с.

16. Зорич, В. А. Математический анализ: в 2 ч. / В. А. Зорич. – 4-е изд. – М.: МЦНМО, 2002. – Ч. 1. – 664 с.

17. Гончаров, В. Л. Теория интерполирования и приближения функций / В. Л. Гончаров. – 2-е изд. – М.: ГИТТЛ, 1954. – 327 с.

References

1. Hudyakov A.P. Hermite-Birkhoff type interpolation polynomials with respect to particular Chebyshev systems of functions. *Izvestiia Natsionalnoi akademii nauk Belarusi. Ser. fiziko-matematicheskikh nauk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series], 2010, no. 4, pp. 29–36. (In Russian).

2. Hudyakov A.P. Explicit formulas of errors for one case of Hermite interpolation. *Izvestiia Natsionalnoi akademii nauk Belarusi. Ser. fiziko-matematicheskikh nauk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series], 2012, no. 1, pp. 13–21. (In Russian).

3. Hudyakov A.P. *Some Problems of Interpolation Theory*. Saarbrücken, Cermany, LAP LAMBERT Academic Publ., 2014. 132 p. (In Russian).

4. Hudyakov A.P., Yanovich L.A. Generalized interpolation formulas of Hermite – Birkhoff type for the case of Chebyshev systems of functions. *Izvestiia Natsionalnoi akademii nauk Belarusi. Ser. fiziko-matematicheskikh nauk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series], 2015, no. 2, pp. 5–14. (In Russian).

5. Yanovich L.A., Hudyakov A.P. On one class of interpolating formulas for functions of matrix variables. *Zhurnal obchislyuval'noï ta prikladnoï matematiki* [Journal of Numerical and Applied Mathematics], 2011, no. 2 (105), pp. 136–147.

6. Hudyakov A.P., Yanovich L.A. Generalized interpolation Hermite-type polynomials for functions of matrix variable. *Trudy Instituta matematiki* [Proceedings of the Institute of Mathematics], 2011, vol. 19, no. 2, pp. 103–114. (In Russian).

7. Yanovich L.A., Hudyakov A.P. First- and second-order interpolation formulas for functions of matrix argument. *Doklady Natsionalnoi Akademii Nauk Belarusi* [Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus], 2012, vol. 56, no. 1, pp. 16–22. (In Russian).

8. Shi Y.G. *Theory of Birkhoff Interpolation*. New York, Nova Science Publ., 2003. 252 p.

9. Nazarzadeh A., Rahsepar Fard KH., Mahmoodi A. Another case of incidence matrix for bivariate Birkhoff interpolation. *Zhurnal obchislyuval'noï ta prikladnoï matematiki* [Journal of Numerical and Applied Mathematics], 2016, no. 2 (122), pp. 55–70.

10. Zhao T.G., LiY.J. On two Birkhoff-type interploations with first- and second-order derivative. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 2016, vol. 4, no. 7, pp. 1269–1274. Doi: 10.4236/jamp.2016.47133

11. Yanovich L.A., Ignatenko M.V. Operator interpolation Hermite-Birkhoff formulas in spaces of smooth functions. *Zhurnal obchislyuval'noï ta prikladnoï matematiki* [Journal of Numerical and Applied Mathematics], 2010, no. 1 (100), pp. 117–129.

12. Householder A.S. *Principles of Numerical Analysis*. New York, McGraw-Hill Book Co., 1953. 274 p.

13. Turetskii A.H. *Theory of Interpolation in Problems*. Minsk, Vysheyshaya shkola Publ., 1968. 320 p. (in Russian).

14. Makarov V.L., Khlobystov V.V., Yanovich L.A. *Methods of Operator Interpolation*. Kiev: Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, 2010, 517 p.

15. Stepanov V.V. *The Course of Differential Equations*. Moscow, State Physical and Mathematical Literature Publ., 1959. 468 p. (in Russian).

16. Zorich V.A. *Mathematical Analysis. Part 1.* 4nd ed. Moscow, Moscow Publishing Center for Continuous Mathematical Education, 2002. 664 p. (In Russian).

17. Goncharov V.L. *Theory of interpolation and approximation of functions*. 2nd ed. Moscow, State Technical and Theoretical Literature Publ., 1954. 327 p. (In Russian).

Информация об авторах

Худяков Андрей Павлович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики физико-математического факультета, Брестский государственный университет им. А. С. Пушкина (бульвар Космонавтов, 21, 224016, г. Брест, Республика Беларусь). E-mail: hudand1985@mail.ru

Трофимук Александр Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры алгебры, геометрии и математического моделирования физико-математического факультета, Брестский государственный университет им. А. С. Пушкина (бульвар Космонавтов, 21, 224016, г. Брест, Республика Беларусь). E-mail: alexander.trofimuk@gmail.com

Information about the authors

Khudyakov Andrei Pavlovich – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor of the Department of Applied Mathematics and Informatics, Physics and Mathematics Faculty of the Brest State University named after A. S. Pushkin (21, Cosmonavtov boulevard, 224016, Brest, Republic of Belarus). E-mail: hudand1985@mail.ru

Trofimuk Alexander Alexandrovich – Ph. D. (Physics and Mathematics), Assistant Professor, Associate Professor of the Department of Algebra, Geometry and Mathematical Modeling of the Brest State University named after A. S. Pushkin (21, Cosmonavtov boulevard, 224016, Brest, Republic of Belarus). E-mail: alexander.trofimuk@gmail.com

Для цитирования

Худяков, А. П. Интерполяционные формулы Эрмита – Биркгофа относительно алгебраической и тригонометрической систем функций с одним специальным узлом / А. П. Худяков, А. А. Трофимук // Вес. Нац. акад. навук Беларуси. Сер. фіз.-мат. навук. – 2017. – № 1. – С. 14–28.

For citation

Khudyakov A.P., Trofimuk A.P. Interpolation Hermite – Birkhoff-type formulas with respect to the algebraic and trigonometric systems of functions with one special node. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series], 2017, no. 1, pp. 14–28. (In Russian).