

Е. В. Дирвук

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь

О ПРИБЛИЖЕННОМ ВЫЧИСЛЕНИИ ИНТЕГРАЛОВ С ОСОБЕННОСТЯМИ НА КОНЦАХ ОТРЕЗКА ИНТЕГРИРОВАНИЯ

При решении различных граничных задач, возникает необходимость построения таких квадратурных формул, в которых одна часть узлов задается заранее, другая – может быть взята произвольно. Именно эта проблема и привлекла наше внимание. В настоящей статье описана разработка библиотеки процедур для приближенного вычисления интегралов с весами $\sqrt{(1 \mp x)/(1 \pm x)}$ и $1/\sqrt{1-x^2}$ в случае, когда подынтегральная функция имеет особенности на одном или обоих концах отрезка интегрирования. Приведен алгоритм работы библиотеки процедур. На примере показано, что разработанная библиотека процедур значительно уменьшила процессорное время, а значит, усовершенствовала учет вычислительных ресурсов относительно стандартных процедур системы Maple. Далее рассмотрено несколько примеров, на которых проиллюстрирована эффективность построенных квадратурных формул типа Радо и Лобатто в сравнении с результатами из других работ. В завершение продемонстрирован пример вычисления интеграла, в котором отсутствуют веса Чебышева. Полученные результаты могут быть использованы для дальнейшего исследования квадратурных формул, а также для изучения свойств интерполяционных рациональных функций.

Ключевые слова: квадратурные формулы, интегрирование на отрезке, рациональная аппроксимация, интерполирование, Maple.

Y. V. Dirvuk

Yanka Kupala State University of Grodno, Grodno, Belarus

APPROXIMATE COMPUTATION OF INTEGRALS WITH THE SINGULARITIES ON INTEGRATION INTERVAL ENDS

Various generalizations of Gauss quadrature formulas are the subject of research of many authors. Here, interest is paid to a special kind of quadrature formulas when some nodes are assigned in advance and the others can be taken arbitrarily. In this article, the performance of process libraries is described. The article outlines the procedures for numerical calculation of integrals by weights $\sqrt{(1 \mp x)/(1 \pm x)}$ and $1/\sqrt{1-x^2}$ when the integrand function has singularities on one or the both ends of the integration interval. The algorithm of working process libraries is also shown. The example illustrates that the developed library extremely decreases the CPU time, thus improving the recording of computing resources with respect to the standard procedures of the Maple system. Further, some examples are considered. They show the comparison between the effective constructed Lobatto and Radau quadrature formulas and the results of other investigations. In conclusion, the example of calculating the integral with no Chebyshev weight is given. The obtained results can be used both for further research of quadrature formulas and for study of the properties of rational interpolating functions.

Keywords: quadrature formulas, segment integration, rational approximation, interpolation, Maple.

Введение. Одной из важных задач теории приближений как науки, имеющей огромное теоретическое и прикладное значение, является задача приближенного вычисления интегралов. Уже на заре ее развития в работах Ш. Эрмита, К. Ф. Гаусса, П. Л. Чебышева, А. А. Маркова, С. Н. Бернштейна был создан теоретический фундамент для развития исследований в этой области, на основе которого появилось новое направление исследований, получившее впоследствии название «теория квадратурных формул».

К настоящему времени квадратурные формулы рационального типа представляют собой основной объект изучения многих авторов. Существенное место в этих исследованиях занимают вопросы, посвященные квадратурным формулам типа Гаусса, полученным с помощью рационального интерполирования.

Изначально в теории квадратурных формул рационального типа стояла проблема выбора узлов интерполирования. Классический способ решения этой задачи на отрезке был предложен В. Н. Русаком. Именно он предложил использовать в качестве узлов интерполирования нули косинус-дробей и синус-дробей Чебышева – Маркова [1]. Это направление было продолжено

Е. А. Ровбой – в работе [2] им были построены обобщения классических квадратурных формул, в частности формулы Эрмита, на основе интерполирования рациональными функциями с узлами Чебышева – Маркова. Выбор нулей рациональных дробей Чебышева – Маркова в качестве узлов интерполирования позволяет найти в явном виде коэффициенты квадратурных формул, вследствие чего теория квадратурных формул интерполяционно-рационального типа приобрела более совершенный характер.

При решении различных граничных задач возникает необходимость построения таких квадратурных формул, в которых одна часть узлов задается заранее, другая – может быть взята произвольно. Именно эта проблема и привлекла наше внимание. При этом, если фиксируются оба конца рассматриваемого отрезка, то такая квадратурная формула называется квадратурной формулой типа Лобатто, если же один – квадратурной формулой типа Радо [3]. Актуальность таких задач подтверждается, в частности, их широким применением в физике.

Ранее в [4, 5] были построены квадратурные формулы типа Радо для весов Якоби $\sqrt{(1 \mp x)/(1 \pm x)}$ и веса $1/\sqrt{1-x^2}$. Также на основании квази-интерполяционных рациональных функций типа Эрмита – Фейра [6] построены квадратурные формулы типа Лобатто для веса $1/\sqrt{1-x^2}$ [7]. Вычислены явные выражения для коэффициентов таких квадратурных формул, дана оценка их погрешности. В данной работе, используя эти квадратурные формулы, приведено описание программной разработки библиотеки процедур для приближенного вычисления интегралов с весами $\sqrt{(1 \mp x)/(1 \pm x)}$ и $1/\sqrt{1-x^2}$ от функций с особенностями вблизи концов отрезка интегрирования. Эффективность построенных квадратурных формул показана на конкретных примерах.

1. Предварительные сведения. Пусть $\{a_k\}_{k=1}^n$ – последовательность комплексных чисел, удовлетворяющая условиям: 1) если $a_k \in \mathbb{R}$, то $|a_k| < 1$; 2) если $a_k \in \mathbb{C}$, то среди указанных чисел есть такое число a_l , что $a_l = \bar{a}_k$; 3) $a_1 = 0$; x_k – нули синус-дроби Чебышева – Маркова $\frac{\sin \mu_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}$, $\mu_n(x) = \sum_{k=1}^n \arccos \frac{x+a_k}{1+a_k x}$.

Теорема 1 [4]. Для произвольной функции $f(x) \in C[-1,1]$ имеет место следующая квадратурная формула:

$$\int_{-1}^1 f(x) \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx \approx \frac{f(1)}{\lambda_n(1)} \pi + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f(x_k)(1+x_k)}{\lambda_n(x_k)} \pi,$$

а для ее остатка справедлива следующая оценка:

$$\left| \int_{-1}^1 f(x) \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx - \frac{f(1)}{\lambda_n(1)} \pi - \sum_{k=1}^n \frac{f(x_k)(1+x_k)}{\lambda_n(x_k)} \pi \right| \leq 2\pi R_{2n-1,2}(f, a),$$

где $\lambda_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{1-a_k^2}}{1+a_k x}$, $R_{2n-1,2}(f, a)$ – наилучшее равномерное приближение функции $f(x) \in C[-1,1]$ алгебраическими рациональными функциями порядка не выше $2n-1$ вида $p_{2n-1}(x) / \prod_{k=1}^n (1+a_k x)^2$.

Представляет интерес построить интерполяционные рациональные функции Лагранжа с удвоенным количеством параметров, не изменяя степень синус-дроби Чебышева – Маркова.

Пусть $\{a_k\}_{k=1}^{2n}$ – последовательность комплексных чисел, удовлетворяющая условиям: 1) если $a_k \in \mathbb{R}$, то $|a_k| < 1$; 2) если $a_k \in \mathbb{C}$, то среди указанных чисел есть такое число a_l , что $a_l = \bar{a}_k$; 3) $a_1 = 0$; x_k – нули синус-дроби Чебышева – Маркова $\frac{\sin \mu_{2n}(x)}{\sqrt{1-x^2}}$, $\mu_{2n}(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2n} \arccos \frac{x+a_k}{1+a_k x}$, $\lambda_{2n}(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2n} \frac{\sqrt{1-a_k^2}}{1+a_k x}$. На основании соответствующих интерполяционных рациональных функций, как в [4], можно показать, что справедлива

Теорема 2. Для произвольной функции $f(x) \in C[-1, 1]$ имеет место следующая квадратурная формула:

$$\int_{-1}^1 f(x) \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx \approx \frac{f(1)}{\lambda_{2n}(1)} \pi + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f(x_k)(1+x_k)}{\lambda_{2n}(x_k)} \pi, \quad (1)$$

а для ее остатка справедлива следующая оценка:

$$\left| \int_{-1}^1 f(x) \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx - \frac{f(1)}{\lambda_{2n}(1)} \pi - \sum_{k=1}^n \frac{f(x_k)(1+x_k)}{\lambda_{2n}(x_k)} \pi \right| \leq 2\pi R_{2n-1}(f, a),$$

где $R_{2n-1}(f, a)$ – наилучшее равномерное приближение функции $f(x) \in C[-1, 1]$ алгебраическими рациональными функциями порядка не выше $2n-1$ вида $p_{2n-1}(x) / \prod_{k=1}^{2n} (1 + a_k x)$.

В работе [5] была построена следующая квадратурная формула Радо:

$$\int_{-1}^1 f(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \approx \frac{f(1)}{2\lambda_{n+1/2}(1)} \pi + \sum_{k=1}^n \frac{f(x_k)}{\lambda_{n+1/2}(x_k)} \pi, \quad (2)$$

где $\lambda_{n+1/2}(x) = \frac{3}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sqrt{1-a_k^2}}{1+a_k x}$, x_k – нули синус-дроби Чебышева – Маркова $\frac{\sin \mu_{n+1/2}(x)}{\sqrt{1-x}}$,
 $\mu_{n+1/2}(x) = \frac{3}{2} + \sum_{k=1}^n \arccos \frac{x+a_k}{1+a_k x}$.

З а м е ч а н и е 1. Поступая аналогично теореме 2, имеют место соответствующие квадратурные формулы с удвоенным количеством параметров для весов $\sqrt{(1-x)/(1+x)}$ и $1/\sqrt{1-x^2}$.

В работе [7] была построена следующая квадратурная формула Лобатто:

$$\int_{-1}^1 f(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \approx \frac{f(-1)}{2\lambda_{2n}(-1)} \pi + \sum_{k=1}^n \frac{f(x_k)}{\lambda_{2n}(x_k)} \pi + \frac{f(1)}{2\lambda_{2n}(1)}, \quad (3)$$

где $\lambda_{2n}(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{\sqrt{1-a_k^2}}{1+a_k x}$, x_k – нули синус-дроби Чебышева – Маркова $\frac{\sin \mu_{2n}(x)}{\sqrt{1-x^2}}$,
 $\mu_{2n}(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2n-1} \arccos \frac{x+a_k}{1+a_k x}$.

2. Основные результаты. На практике большое значение имеет быстроедействие процедур вычисления интегралов. Обычно такое сравнение производят для конкретного процессора и конкретной системы компьютерной алгебры. Поэтому укажем, что для численных экспериментов использовался процессор Intel Core i5-3317U (1,7 ГГц, 10 ГБ ОЗУ), а библиотека процедур была создана в системе Maple 18.

При разработке новых библиотек очень важно иметь возможность оценить необходимые для проведения вычислений ресурсы, которыми чаще всего являются процессорное время (вычислительная сложность) и память (сложность алгоритма по памяти). Таким образом, можно предсказать время выполнения и сравнивать эффективность алгоритмов.

Система Maple располагает рядом средств для создания достаточно эффективных механизмов работы с пользовательскими библиотеками, структурно аналогичными главной Maple-библиотеке. Также такие библиотеки позволяют использовать в среде пакета содержащиеся в них средства на уровне доступа, аналогичного стандартным средствам пакета.

Для сравнения приближенного решения интегралов с помощью разработанной библиотеки процедур опишем встроенные средства системы Maple для вычисления интегралов.

Для нахождения определенных интегралов Maple предоставляет следующие функции: $\text{int}(f, x = a..b)$, $\text{int}(f, x = a..b, \text{continuous})$, где f – подынтегральная функция, x – переменная, по

которой выполняются вычисления, a и b – нижний и верхний пределы интегрирования, continuous – необязательное дополнительное условие.

Сначала система Maple делает поиск аналитического значения интеграла с заданной подынтегральной функцией. Если это не удается (например, для «не берущихся» интегралов), то возвращается исходная запись интеграла. В подобных случаях можно вычислить значение определенного интеграла численным способом с помощью команды «evalf». Именно с этим способом будем сравнивать процессорное время работы процедур разработанной библиотеки.

Теперь опишем алгоритм приближенного вычисления интегралов с помощью разработанной библиотеки процедур. На первом шаге определяется необходимая точность приближения, подынтегральной и весовой функций. Далее выделяются особенности на концах отрезка интегрирования подынтегральной функции. После этого выбирается необходимая квадратурная формула и набор узлов. И наконец вычисляется интеграл с заданной точностью.

Пример 1. Вычислим интеграл с помощью разработанной библиотеки:

$$\int_{-1}^1 \frac{\pi x / 1,1}{\sin(\pi x / 1,1)} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (4)$$

Вычислим интеграл (4) с точностью до $e-10$. Одна из процедур библиотеки определяет подынтегральную функцию $\frac{\pi x / 1,1}{\sin(\pi x / 1,1)}$, вес $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ и необходимую точность $e-10$. Другая процедура определяет наличие особенностей функции в точках ± 1 . Соответственно для приближенного вычисления интеграла (4) применяется квадратурная формула (3). При этом гарантируется относительная погрешность вычисления интеграла не более $e-10$.

В табл. 1 приведем сравнения процессорного времени, затрачиваемого стандартными процедурами системы Maple и процедурами разработанной библиотеки, для различной точности приближения.

Таблица 1. Сравнительная таблица для интеграла (4) / Table 1. Comparison table for the integral (4)

Точность Accuracy	Процедуры библиотеки Procedures library	Процедуры Maple Maple Procedures
e-05	14 мс	135 мс
e-10	26 мс	330 мс
e-25	205 мс	2600 мс

3. Демонстрационные примеры. Проиллюстрируем эффективность построенных квадратурных формул типа Радо и Лобатто на следующих примерах.

Пример 2. Рассмотрим интеграл

$$\int_{-1}^1 \frac{e^x}{(x+\lambda)^r} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (5)$$

Для различных λ и r такой интеграл рассматривался в качестве примера в работе [8]. Позже, в работе [9], интеграл (5) был вычислен для $\lambda \pm 1,01$ и $r = 2$ с помощью квадратурных формул типа Гаусса, при этом узлы в конечных точках не задавались. График поведения подынтегральной функции $\frac{e^x}{(x+1,01)^2}$ представлен на рис. 1.

Из рис. 1, в частности, следует, что подынтегральная функция имеет особенность вблизи точки 1. Вычислим этот интеграл с помощью квадратурной формулы Радо в рациональном (2) и полиномиальном (положив $\{a_k\}_{k=1}^n = 0$) случаях. Полученные результаты сравним с относительными погрешностями из [8, 9]. Для применения рациональной квадратурной формулы определим последовательность чисел $\{a_k\}_{k=1}^n$ следующим образом:

$$a_n = 0, \quad a_k = -k / \lambda(n-1), \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

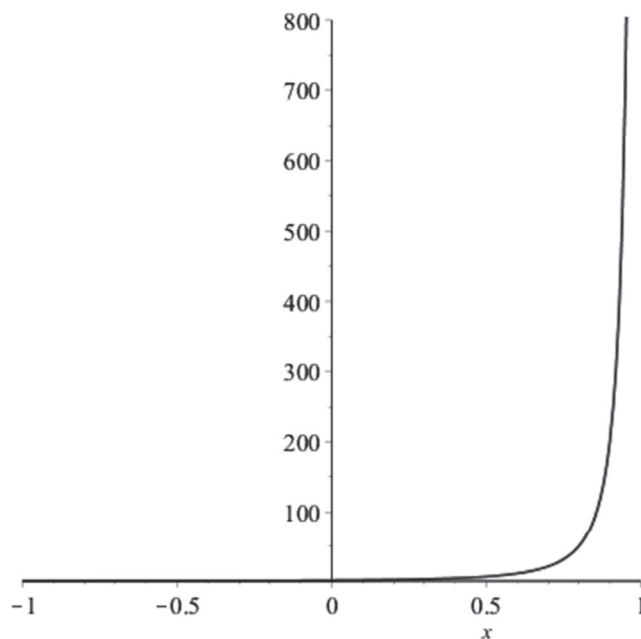


Рис. 1. График подынтегральной функции (5) / Fig. 1. The graph of the integrand (5)

Относительную погрешность квадратурных формул вычислим по формуле

$$Error = \left| \frac{I_n(f) - I_\mu(f)}{I_\mu(f)} \right|,$$

где $I_\mu(f)$ – приближенное значение интеграла, $I_n(f)$ – точное значение интеграла.

В табл. 2 для различного количества узлов приведены относительные погрешности при применении квадратурных формул типа Лобатто (*Error1* в рациональном случае, *Error4* в полиномиальном случае) и квадратурных формул, рассмотренных в [9, 8] (*Error2* и *Error3* соответственно).

Таблица 2. Относительные погрешности рассматриваемых квадратурных формул для интеграла (5)

Table 2. Relative errors of the quadrature formulas for the integral (5)

n	<i>Error1</i>	<i>Error2</i>	<i>Error3</i>	<i>Error4</i>
2	2,29e-06	5,41e-04	8,83e-05	4,69
4	1,38e-09	6,11e-07	6,31e-07	2,17
8	3,03e-16	1,29e-15	4,97e-12	0,73
16	6,06e-16	6,46e-16	2,37e-15	0,11

Пример 3. Рассмотрим интеграл

$$\int_{-1}^1 J_0(\omega x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \omega > 0. \quad (6)$$

Это хорошо известное соотношение с участием функции Бесселя нулевого порядка [10]. Так как весовая, а также подынтегральная функции являются четными, то такой интеграл можно рассматривать на отрезке $[-1, 1]$, разделив результат на 2.

Интеграл (6) рассматривался в качестве примера в работе [11], где результаты были получены с помощью квадратурных формул типа Радо.

Далее интеграл (6) будем рассматривать на отрезке $[-1, 1]$ для случая $\omega = 8$:

$$\int_{-1}^1 J_0(8x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

В этом случае график поведения подынтегральной функции $J_0(8x)$ представлен на рис. 2.

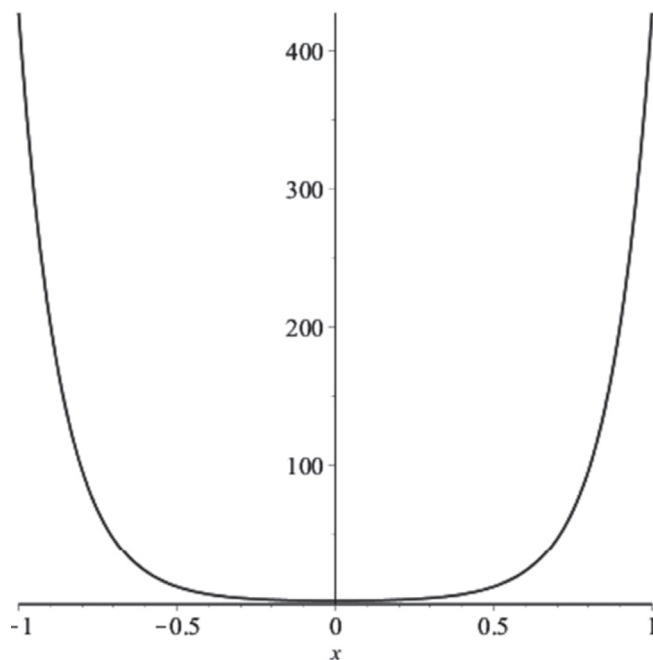


Рис. 2. График подынтегральной функции (6)
Fig. 2. The graph of the integrand (6)

Из рис. 2, в частности, следует, что подынтегральная функция имеет особенности вблизи точек -1 и 1 . Вычислим интеграл (6) с помощью квадратурных формул типа Лобатто в рациональном (3) и полиномиальном (положив $\{a_k\}_{k=1}^{2n-1} = 0$) случаях. Полученные результаты сравним с относительными погрешностями из [11]. Для применения рациональных квадратурных формул (3) определим последовательность комплексных чисел $\{a_k\}_{k=1}^{2n-1}$ следующим образом:

$$a_0 = a_{2n-1} = 0, \quad a_k = 1 - e^{-k/\sqrt{an}}, \quad a_{2n-1-k} = -a_k, \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

В табл. 3 для различного количества узлов приведены относительные погрешности при применении квадратурных формул типа Лобатто ($Error1$ в рациональном случае, $Error3$ в полиномиальном случае) и квадратурных формул из [11] ($Error2$).

Таблица 3. Относительные погрешности рассматриваемых квадратурных формул для интеграла (6)

Table 3. Relative errors of the quadrature formulas for the integral (6)

n	a	$Error1$	$Error2$	$Error3$
2	19,9998	0,15	1,4	2,35
5	4,9199	1,12e-08	3,7e-03	3,99e-03
8	0,8932	3,16e-11	5,8e-07	1,51e-06
14	0,1872	6,57e-19	8,7e-17	9,39e-16
17	0,1161	4,72e-24	1,7e-22	3,31e-21

В предыдущих примерах были рассмотрены функции, которые могут быть интегрированы с небольшим числом узлов. Они служат для иллюстрации теории, но реальная сила этих квадратурных формул лежит в приближении интегралов, которые трудно вычислить традиционными методами и которые требуют очень большого количества узлов. Продемонстрируем это на следующем примере.

Пример 4. Рассмотрим интеграл

$$\int_{-1}^1 \sin\left(\frac{1}{x^2 - \omega^2}\right) \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad \omega > 1. \quad (7)$$

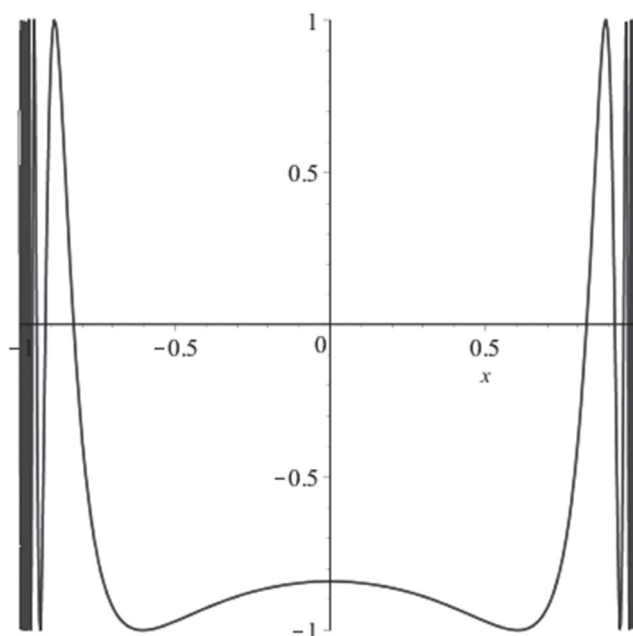


Рис. 3. График подынтегральной функции (7)
Fig. 3. The graph of the integrand (7)

Интеграл (7) при $\omega = 0,001$ приводился в качестве примера в работе [9], где результаты были получены с помощью квадратурных формул типа Гаусса, при этом узлы в конечных точках не задавались.

График поведения подынтегральной функции $\sin\left(\frac{1}{x^2 - \omega^2}\right)$ представлен на рис. 3.

Из рис. 3, в частности, следует, что подынтегральная функция имеет особенности вблизи точек -1 и 1 . Вычислим интеграл (7) с помощью квадратурных формул типа Лобатто в рациональном (3) и полиномиальном (положив $\{a_k\}_{k=1}^{2n-1} = 0$) случаях. Полученные результаты сравним с относительными погрешностями из [9]. Для применения рациональных квадратурных формул (3) определим последовательность комплексных чисел $\{a_k\}_{k=1}^{2n-1}$ следующим образом:

$$a_0 = a_{2n-1} = 0, \quad a_k = 1 - e^{-k/\alpha\sqrt{n}}, \quad a_{2n-1-k} = -a_k, \quad k = 1, 2, \dots, n-1. \quad (8)$$

В табл. 4 для различного количества узлов приведены относительные погрешности при применении квадратурных формул типа Лобатто (*Error1* в рациональном случае, *Error3* в полиномиальном случае) и квадратурных формул из [9] (*Error2*).

Таблица 4. Относительные погрешности рассматриваемых квадратурных формул для интеграла (7)

Table 4. Relative errors of the quadrature formulas for the integral (7)

n	α	<i>Error1</i>	<i>Error2</i>	<i>Error3</i>
100	1,9973	1,10e-05	2,12e-03	9,38e-02
200	9,9846	2,92e-06	8,01e-04	3,85e-03
400	1,31968978485	6,69e-15	2,01e-14	2,02e-02

З а м е ч а н и е 2. Вычисления примеров 2–4 выполнены при помощи разработанной библиотеки процедур.

В завершение продемонстрируем пример, в котором отсутствуют веса Чебышева.

П р и м е р 5. Рассмотрим интеграл

$$\int_{-1}^1 \sin\left(\frac{1}{\omega - x}\right) dx, \quad \omega > 1. \quad (9)$$

Такой интеграл рассматривался в качестве примера в [12]. Результаты из этой работы получены с помощью квадратурных формул типа Гаусса.

Любой определенный интеграл может быть преобразован в другой интеграл, в котором является одна из четырех весовых функций Чебышева. Для перехода к весу $1/\sqrt{1-x^2}$ будем использовать равенство из [11]:

$$\int_a^b Z(x) dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 \frac{Z((b-a)\sqrt{1-x^2} + a)|x|}{\sqrt{1-x^2}} dx. \quad (10)$$

Стоит отметить, что формула (10) не подходит для всех случаев [11]. Применяя (10) для (9), получим

$$\int_{-1}^1 \sin\left(\frac{1}{\omega-x}\right) dx = \int_{-1}^1 \sin\left(\frac{1}{\omega - (2\sqrt{1-x^2} - 1)}\right) |x| dx. \quad (11)$$

Вычислим интеграл (11) с помощью квадратурной формулы типа Лобатто в рациональном (3) и полиномиальном (положив $\{a_k\}_{k=1}^{2n-1} = 0$) случаях. Полученные результаты будем сравнивать с относительными погрешностями квадратурных формул, рассмотренных в [12].

Для применения рациональных квадратурных формул (3) определим последовательность комплексных чисел $\{a_k\}_{k=1}^{2n-1}$, как и в (8).

В табл. 5 приведены относительные погрешности при применении квадратурных формул (*Error1* в рациональном случае, *Error3* в полиномиальном случае) и квадратурных формул (*Error2*), рассмотренных в работе [12].

Таблица 5. Относительные погрешности рассматриваемых квадратурных формул для интеграла (9)
Table 5. Relative errors of the quadrature formulas for the integral (9)

n	a	<i>Error1</i>	<i>Error2</i>	<i>Error3</i>
5	16,3977	3,43e-02	4,56e-02	6,6e-02
10	11,2001	1,05e-06	1,18e-04	5,15e-02
20	12,2371015953	5,70e-14	3,14e-13	9,55e-02

Заключение. Описана разработка библиотеки процедур для приближенного вычисления интегралов с весами $\sqrt{(1 \mp x)/(1 \pm x)}$ и $1/\sqrt{1-x^2}$, имеющих особенности на концах отрезка интегрирования. Приведен алгоритм работы библиотеки процедур. Рассмотрен пример вычисления интеграла из [9], приведено сравнение процессорного времени, затрачиваемого стандартными процедурами системы Maple и процедурами разработанной библиотеки для различной точности приближения. Созданная библиотека процедур значительно уменьшила процессорное время, а значит, усовершенствовала учет вычислительных ресурсов относительно стандартных процедур системы Maple. Рассмотрены несколько примеров из [9–12], на которых проиллюстрирована эффективность построенных квадратурных формул типа Радо и Лобатто в сравнении с результатами из этих работ. В завершение продемонстрирован пример вычисления интеграла, в котором отсутствуют веса Чебышева.

Список использованных источников

1. Русак, В. Н. Об интерполировании рациональными функциями с фиксированными полюсами / В. Н. Русак // Докл. акад. наук БССР. – 1962. – Т. 4, № 9. – С. 548–550.
2. Ровба, Е. А. Квадратурные формулы интерполяционно-рационального типа / Е. А. Ровба // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 1996. – Т. 40, № 3. – С. 42–46.
3. Крылов, В. И. Приближенное вычисление интегралов / В. И. Крылов. – М.: Наука, 1967. – 500 с.
4. Дирвук, Е. В. Рациональные квадратурные формулы типа Радо / Е. В. Дирвук, К. А. Смотрицкий // Вестн. БГУ. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. – 2014. – № 1. – С. 87–91.

5. Дирвук, Е. В. Квадратурная формула типа Радо одной ортогональной системы рациональных функций / Е. В. Дирвук // Весн. Гродзен. дзярж. ун-та імя Я. Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, выліч. тэхніка і кіраванне. – 2014. – № 2 (173). – С. 20–26.
6. Ровба, Е. А. Рациональная квази-интерполяция Эрмита – Фейера / Е. А. Ровба, Е. В. Дирвук // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. физ.-мат. навук. – 2014. – № 3. – С. 125–129.
7. Rouba, Y. Rational quasi-Hermite-Fejer-type interpolation and Lobatto-type quadrature formula with Chebyshev-Markov nodes / Y. Rouba, K. Smatrytski, Y. Dirvuk // Jaen Journal on Approximation. – 2015. – Vol. 7, № 2. – P. 291–308.
8. Ranga, A. Sri. Another quadrature rule of highest algebraic degree of precision / A. Sri Ranga // Numerische Mathematik. – 1994. – Vol. 68, № 2. – P. 283–294.
9. Van Deun, J. On computing rational Gauss-Chebyshev quadrature formulas / J. Van Deun, A. Bultheel, P. G. Vera // Math. Comp. – 2005. – Vol. 75, № 253. – P. 307–326.
10. Gradshteyn, I. S. Tables of integrals, series and products / I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik // Nucl. Phys. A. – 1967. – Vol. 91, № 3. – P. 698.
11. Gautschi, W. Gauss-Radau and Gauss-Lobatto quadratures with double end points / W. Gautschi, S. Li // J. Comput. Appl. Math. – 1991. – Vol. 34, № 3. – P. 343–360.
12. Van Deun, J. A quadrature formula based on Chebyshev rational functions / J. Van Deun, A. Bultheel // IMA J. Numer. Analysis. – 2006. – Vol. 26, № 4. – P. 641–656.

References

1. Rusak V.N. On interpolation by rational functions with fixed poles. *Doklady Akademii nauk BSSR* [Doklady of the Academy of Sciences of BSSR], 1962, vol. 6, no. 9, pp. 548–550. (In Russian).
2. Rovba E.A. Quadrature formulae of interpolation-rational type. *Doklady Natsionalnoi Akademii Nauk Belarusi* [Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus], 1996, vol. 40, no. 3, pp. 42–46. (In Russian).
3. Krylov V.I. *Approximate Calculation of Integrals*. Moscow, Nauka Publ., 1967. 500 p. (In Russian).
4. Dirvuk E.V., Smotritskii K.A. Rational Radau-type quadrature formulas. *Vestnik BGU. Seriya 1. Fizika. Matematika. Informatika* [Vestnik BSU. Series 1. Physics. Mathematics. Informatics], 2014, no. 1, pp. 87–91. (In Russian).
5. Dirvuk E.V. Radau-type quadrature formula for the orthogonal system of rational functions. *Vesnik Grodzenskaga dzyarzhaynaga ūniversiteta imya Yanki Kupaly. Seriya 2. Matematyka. Fizika. Infarmatyka, vylichal'naya tekhnika i kiravanne* [Vesnik of Yanka Kupala State University of Grodno. Series 2. Mathematics. Physics. Informatics, Computer Technology and its Control], 2014, no. 2 (173), pp. 20–26. (In Russian).
6. Rovba E.A., Dirvuk E.V. Rational quasi-interpolation Hermite – Fejer. *Izvestiia Natsionalnoi akademii nauk Belarusi. Ser. fiziko-matematicheskikh nauk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series], 2014, no. 3, pp. 33–37. (In Russian).
7. Rouba Y., Smatrytski K., Dirvuk Y. Rational quasi-Hermite-Fejer-type interpolation and Lobatto-type quadrature formula with Chebyshev-Markov nodes. *Jaen Journal on Approximation*, 2015, vol. 7, no. 2, pp. 291–308.
8. Ranga A.Sri. Another quadrature rule of highest algebraic degree of precision. *Numerische Mathematik*, 1994, vol. 68, no. 2, pp. 283–294. Doi: 10.1007/s002110050062
9. Van Deun J., Bultheel A., Vera P.G. On computing rational Gauss-Chebyshev quadrature formulas. *Mathematics of Computation*, 2006, vol. 75, no. 253, pp. 307–326. Doi: 10.1090/s0025-5718-05-01774-6
10. Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. Tables of integrals, series and products. *Nuclear Physics A*, 1967, vol. 91, no. 3, pp. 698. Doi: 10.1016/0375-9474(67)90589-1
11. Gautschi W., Li S. Gauss–Radau and Gauss–Lobatto quadratures with double end points. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 1991, vol. 34, no. 3, pp. 343–360. Doi: 10.1016/0377-0427(91)90094-Z
12. Van Deun J., Bultheel A. A quadrature formula based on Chebyshev rational functions. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 2006, vol. 26, no 4, pp. 641–656. Doi: 10.1093/imanum/drl009.

Информация об авторе

Дирвук Евгений Владимирович – старший преподаватель кафедры системного программирования и компьютерной безопасности факультета математики и информатики, Гродненский государственный университет им. Я. Купалы (ул. Ожешко, 22, 230020, г. Гродно, Республика Беларусь). Email: dirvuk@gmail.com

Information about the author

Dirvuk Yauheni Vladimirovich – Senior Lecturer, Department of System Programming and Computer Security, Faculty of Mathematics and Informatics of the Yanka Kupala State University of Grodno (22, Ozheshko Str., 230020, Grodno, Republic of Belarus). Email: dirvuk@gmail.com

Для цитирования

Дирвук, Е. В. О приближенном вычислении интегралов с особенностями на концах отрезка интегрирования / Е. В. Дирвук // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2017. – № 1. – С. 29–37.

For citation

Dirvuk Y.V. Approximate computation of integrals with the singularities on integration interval ends. *Vestsi Natsyional'nei akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series], 2017, no. 1, pp. 29–37. (In Russian).