

УДК 517.2

Ю. С. КРУК¹, Ю. Е. ДУДОВСКАЯ²

**СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОСТОЯНИЙ
ЗАМКНУТОЙ СЕТИ С НЕАКТИВНЫМИ ЗАЯВКАМИ
И МНОГОРЕЖИМНЫМИ СТРАТЕГИЯМИ ОБСЛУЖИВАНИЯ**

¹Белорусский национальный технический университет²Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

(Поступила в редакцию 27.02.2015)

Рассматривается замкнутая сеть массового обслуживания, в узлах которой приборы могут функционировать в нескольких режимах, отвечающих различной степени работоспособности узлов. Режимы, в которых могут работать узлы сети, пронумерованы, каждый из них отличается своим набором показателей. Например, при переходе узла в режим с большим номером его производительность уменьшается, а процесс обслуживания ухудшается. При переходе узла в режим с меньшим номером происходит восстановление показателей процесса обслуживания, улучшается качество обслуживания [1]. Сети с многорежимными стратегиями обслуживания позволяют моделировать ситуации, когда узлы сети могут быть частично ненадежны (случай полной потери работоспособности здесь не рассматривается).

Заявки, ожидающие обслуживания в узлах сети, могут становиться временно неактивными, причем неактивные формируют отдельную очередь и не требуют обслуживания. Поступающие в сеть потоки информационных сигналов позволяют заявкам менять свое состояние: из неактивного переходить в такое, когда они могут получать обслуживание, и наоборот [2].

В настоящей работе исследуется замкнутая сеть массового обслуживания, состоящая из N узлов. В сети циркулируют M заявок. Все заявки, находящиеся в сети, подразделяются на обыкновенные (активные), которые могут получать обслуживание, и неактивные. В узлы сети извне поступают независимые пуассоновские потоки информационных сигналов с интенсивностями ν_i и ϕ_i , $i = \overline{1, N}$. Информационный сигнал, поступивший в i -й узел с интенсивностью ν_i , уменьшает на единицу количество обыкновенных заявок и увеличивает на единицу количество неактивных заявок. В случае отсутствия в i -м узле обыкновенных заявок сигнал покидает сеть. Информационный сигнал, поступивший в i -й узел с интенсивностью ϕ_i , уменьшает на единицу количество неактивных заявок, увеличивая на единицу число обыкновенных заявок. В случае отсутствия в i -м узле неактивных заявок сигнал покидает сеть. Описанные информационные сигналы не требуют обслуживания.

Предполагается, что i -й узел может находиться в одном из l_i режимов работы ($l_i = \overline{0, r_i}, i = \overline{1, N}$).

Состояние сети в момент времени t характеризуется вектором $z(t) = (z_1(t), z_2(t), \dots, z_N(t))$, где $z_i(t) = (n_i(t), n'_i(t), l_i(t))$ – состояние i -го узла в момент времени t . Здесь $n_i(t)$, $n'_i(t)$ – число активных и соответственно неактивных заявок в i -м узле в момент времени t , $l_i(t)$ – режим функционирования i -го узла. Случайный процесс $z(t)$ имеет конечное фазовое пространство

$$Z = \left\{ ((n_1, n'_1, l_1), (n_2, n'_2, l_2), \dots, (n_N, n'_N, l_N)) : n_i, n'_i \geq 0, \sum_{i=1}^N (n_i + n'_i) = M, l_i = \overline{0, r_i}, i = \overline{1, N} \right\}.$$

Нумерация обыкновенных заявок в очереди каждого узла осуществляется от «хвоста» очереди к прибору, т. е. если в i -м узле находится n_i обыкновенных заявок, то заявка, которая обслуживается,

имеет номер n_i , а последняя в очереди – номер 1. Временно неактивные заявки в очереди i -го узла нумеруются следующим образом: заявка, последняя ставшая неактивной, имеет номер n'_i . Поступающий в узел i сигнал v_i воздействует на обыкновенную заявку, имеющую номер 1, которая становится неактивной заявкой под номером $n'_i + 1$. Сигнал φ_i воздействует на неактивную заявку, имеющую номер n'_i , которая становится обыкновенной заявкой под номером 1.

Назовем нулевой режим основным режимом работы. Время работы узла, находящегося в состоянии $z_i = (n_i, n'_i, l_i)$, в режиме l_i ($l_i = \overline{0, r_i}, i = \overline{1, N}$) имеет показательное распределение, при этом с интенсивностью τ_i ($\tau_i > 0$) i -й узел переходит в $(l_i + 1)$ -й режим ($l_i = \overline{0, r_i - 1}$), а с интенсивностью ρ_i ($\rho_i > 0$) – в $(l_i - 1)$ -й режим ($l_i = \overline{1, r_i}$). Переключение прибора с одного режима на другой сохраняет общее число заявок в узле.

Время обслуживания одной активной заявки не зависит от времени обслуживания других и имеет показательное распределение с параметром μ_i ($i = \overline{1, N}$).

Каждая заявка после завершения обслуживания в i -м узле независимо от других заявок мгновенно направляется в j -й узел с вероятностью $p_{i,j}$ ($\sum_{j=1}^N p_{i,j} = 1, i = \overline{1, N}$). Не ограничивая общности рассуждений, будем считать $p_{i,i} = 0, i = \overline{1, N}$.

Заявки обслуживаются в порядке поступления. Предполагается, что в начальный момент временно неактивные заявки в сети отсутствуют.

Для замкнутых сетей показано, что в случае неприводимости матрицы маршрутизации $(p_{i,j})$ система уравнений трафика

$$\varepsilon_j = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i p_{i,j}, \quad j = \overline{1, N}, \quad (1)$$

имеет единственное с точностью до постоянного множителя положительное решение ε_j [3].

Процесс $z(t)$ – однородный марковский процесс с непрерывным временем и пространством состояний Z .

Предположим, что изолированный i -й узел сети имеет конечную емкость M . Это значит, что если поступающая заявка застаёт узел в состоянии (n_i, n'_i, l_i) , для которого $n_i + n'_i = M$, то она покидает систему.

Обозначим через $p_i^M(z_i)$ стационарное распределение изолированного i -го узла, которое, вообще говоря, может отличаться от стационарного распределения i -го узла сети. Уравнения обратимости для изолированного i -го узла сети принимают вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_i p_i^M(n_i - 1, n'_i, l_i) &= p_i^M(n_i, n'_i, l_i) \mu_i, \\ v_i p_i^M(n_i + 1, n'_i - 1, l_i) &= \varphi_i p_i^M(n_i, n'_i, l_i), \\ \tau_i p_i^M(n_i, n'_i, l_i - 1) &= \rho_i p_i^M(n_i, n'_i, l_i), \\ & i = \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (2)$$

Из уравнений обратимости (2) находим стационарное распределение вероятностей состояний изолированного узла:

$$p_i^M(n_i, n'_i, l_i) = \left(\frac{\varepsilon_i}{\mu_i} \right)^{n_i} \left(\frac{\varepsilon_i v_i}{\mu_i \varphi_i} \right)^{n'_i} \left(\frac{\tau_i}{\rho_i} \right)^{l_i} p_i^M(0, 0, 0).$$

Здесь ε_i – решение системы уравнений трафика (1).

Пусть $\{p(z), z \in Z\}$ – стационарное распределение вероятностей состояний процесса $z(t)$. Уравнения равновесия для стационарных вероятностей имеют вид

$$p(z) \sum_{i=1}^N \left(\mu_i I_{[n_i \neq 0]} + v_i I_{[n'_i \neq 0]} + \varphi_i I_{[n'_i \neq 0]} + \tau_i I_{[l_i \neq r_i]} + \rho_i I_{[l_i \neq 0]} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^N \left(p([n_i - 1, n'_i + 1, l_i]) \varphi_i I_{[n_i \neq 0]} + p([n_i + 1, n'_i - 1, l_i]) \nu_i I_{[n'_i \neq 0]} \right) + \\
&\quad + \sum_{i=1}^N \left(p([n_i, n'_i, l_i + 1]) \rho_i I_{[l_i \neq r_i]} + p([n_i, n'_i, l_i - 1]) \tau_i I_{[l_i \neq 0]} \right) + \\
&\quad + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N p([n_i - 1, n'_i, l_i], [n_j + 1, n'_j, l_j]) \mu_j p_{j,i} I_{[n_i \neq 0]}. \tag{3}
\end{aligned}$$

Здесь в квадратных скобках указан узел, в котором произошли изменения, например,

$$p([n_i - 1, n'_i + 1, l_i]) = p((n_1, n'_1, l_1), \dots, (n_i - 1, n'_i + 1, l_i), \dots, (n_N, n'_N, l_N)).$$

Т е о р е м а. *Марковский процесс $z(t)$ эргодичен, а стационарное распределение вероятностей состояний процесса имеет вид*

$$p((n_1, n'_1, l_1), \dots, (n_N, n'_N, l_N)) = \frac{1}{G(M, N)} p_1(n_1, n'_1, l_1) \dots p_N(n_N, n'_N, l_N). \tag{4}$$

Здесь вероятности $p_i(n_i, n'_i, l_i)$ могут быть выбраны как стационарные вероятности состояний изолированного i -го узла емкости M , $G(M, N)$ – нормирующая константа, находящаяся из условия

$$\sum_{((n_1, n'_1, l_1), \dots, (n_N, n'_N, l_N)) \in Z} p((n_1, n'_1, l_1), \dots, (n_N, n'_N, l_N)) = 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Эргодичность марковского процесса $z(t)$ следует из эргодической теоремы Маркова.

Докажем, что (4) удовлетворяют уравнениям равновесия (3). Воспользуемся методом локального баланса. Разобьем (3) на уравнения локального равновесия:

$$\begin{aligned}
p(z) \sum_{i=1}^N (\mu_i I_{[n_i \neq 0]} + \nu_i I_{[n'_i \neq 0]}) &= \sum_{i=1}^N p([n_i - 1, n'_i + 1, l_i]) \varphi_i I_{[n_i \neq 0]} + \\
&+ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N p([n_i - 1, n'_i, l_i], [n_j + 1, n'_j, l_j]) \mu_j p_{j,i} I_{[n_i \neq 0]}; \tag{5}
\end{aligned}$$

$$p(z) \sum_{i=1}^N \varphi_i I_{[n'_i \neq 0]} = \sum_{i=1}^N p([n_i + 1, n'_i - 1, l_i]) \nu_i I_{[n'_i \neq 0]}; \tag{6}$$

$$p(z) \sum_{i=1}^N (\tau_i I_{[l_i \neq r_i]} + \rho_i I_{[l_i \neq 0]}) = \sum_{i=1}^N (p([n_i, n'_i, l_i + 1]) \rho_i I_{[l_i \neq r_i]} + p([n_i, n'_i, l_i - 1]) \tau_i I_{[l_i \neq 0]}). \tag{7}$$

Подставим (4) в уравнение локального баланса (5), разделим обе части на $p(z) = p((n_1, n'_1, l_1), \dots, (n_N, n'_N, l_N))$, получим:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^N (\mu_i I_{[n_i \neq 0]} + \nu_i I_{[n'_i \neq 0]}) = \\
&= \sum_{i=1}^N \frac{p_i(n_i - 1, n'_i + 1, l_i)}{p_i(n_i, n'_i, l_i)} \varphi_i I_{[n_i \neq 0]} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{p_i(n_i - 1, n'_i, l_i) p_j(n_j + 1, n'_j, l_j)}{p_i(n_i, n'_i, l_i) p_j(n_j, n'_j, l_j)} \mu_j p_{j,i} I_{[n_i \neq 0]} = \\
&= \sum_{i=1}^N \frac{\mu_i}{\varepsilon_i} \frac{\varepsilon_i \nu_i}{\mu_i \varphi_i} \varphi_i I_{[n_i \neq 0]} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\mu_i}{\varepsilon_i} \frac{\varepsilon_j}{\mu_j} \mu_j p_{j,i} I_{[n_i \neq 0]} = \sum_{i=1}^N (\mu_i I_{[n_i \neq 0]} + \nu_i I_{[n'_i \neq 0]}).
\end{aligned}$$

Подставим (4) в уравнение локального баланса (6), разделим обе части на $p(z) = p((n_1, n'_1, l_1), \dots, (n_N, n'_N, l_N))$, получим:

$$\sum_{i=1}^N \varphi_i I_{[n'_i \neq 0]} = \sum_{i=1}^N \frac{p_i(n_i + 1, n'_i - 1, l_i)}{p_i(n_i, n'_i, l_i)} \nu_i I_{[n'_i \neq 0]} = \sum_{i=1}^N \frac{\varepsilon_i \mu_i \varphi_i}{\mu_i \varepsilon_i \nu_i} \nu_i I_{[n'_i \neq 0]} = \sum_{i=1}^N \varphi_i I_{[n'_i \neq 0]}.$$

Подставим (4) в уравнение локального баланса (7), разделим обе части на $p(z) = p((n_1, n'_1, l_1), \dots, (n_N, n'_N, l_N))$, получим:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N (\tau_i I_{[l_i \neq r_i]} + \rho_i I_{[l_i \neq 0]}) &= \sum_{i=1}^N \left(\frac{p_i(n_i, n'_i, l_i + 1)}{p_i(n_i, n'_i, l_i)} \rho_i I_{[l_i \neq r_i]} + \frac{p_i(n_i, n'_i, l_i - 1)}{p_i(n_i, n'_i, l_i)} \tau_i I_{[l_i \neq 0]} \right) = \\ &= \sum_{i=1}^N \left(\frac{\tau_i}{\rho_i} \rho_i I_{[l_i \neq r_i]} + \frac{\rho_i}{\tau_i} \tau_i I_{[l_i \neq 0]} \right) = \sum_{i=1}^N (\tau_i I_{[l_i \neq r_i]} + \rho_i I_{[l_i \neq 0]}). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Литература

1. Якубович О. В., Дудовская Ю. Е. // Проблемы физики, математики и техники. 2014. № 1 (18). С. 85–89.
2. Boyarovich Yu. S. // Automation and Remote Control. 2012. Vol. 73. P. 1616–1623.
3. Gordon W. J. // Oper. Res. 1967. N 15. P. 252–267.

J. S. KRUK, Yu. E. DUDOVSKAYA

STATIONARY DISTRIBUTION OF A CLOSED QUEUEING NETWORK WITH NON-ACTIVE CUSTOMERS AND MULTIMODE SERVICE STRATEGIES

Summary

A stationary distribution of condition probabilities of a closed queueing network is investigated. Devices of network nodes can operate in several modes. There are two types of customers in network nodes: ordinary (active) customers and temporarily non-active customers. There are input flows of signals that allow customers to change their state: from the non-active state to the state when they can receive service and vice versa.