ISSN 0002-3574 (print)
УДК 517.958

Поступила в редакцию 17.12.2016
Received 17.12.2016

В. И. Корзюк[1,2], Нгуен Ван Винь[1,3]

[1]Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
[2]Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
[3]Хюэский университет, Хюэ, Вьетнам

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕСТРОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ДВУКРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Изучаются классические решения граничных задач для нестрого гиперболического уравнения четвертого порядка в случае двух независимых переменных с двукратными характеристиками. Под классическим решением понимается функция, которая определена во всех точках замыкания заданной области и имеет все классические производные, входящие в уравнение и условия задачи. Наличие классического решения, построенного в аналитическом виде, для уравнений высшего порядка представляет интерес для вычислительной математики при тестировании численных алгоритмов. Заметим, что корректная постановка смешанных задач для гиперболических уравнений зависит не только от количества характеристик, но и от их расположения. Оператор уравнения представляет собой композицию дифференциальных операторов первого порядка. Уравнение задается в полуполосе двух независимых переменных. На нижнем основании области задаются условия Коши, а на боковых границах – условия Дирихле и Неймана. Методом характеристик выписывается в аналитическом виде решение рассматриваемой задачи, доказывается единственность решений, а также показывается, при каких условиях линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами четвертого порядка представимо в виде рассматриваемого в статье нестрого гиперболического уравнения.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, гиперболические уравнения, уравнения четвертого порядка, частные производные, граничные условия, условия Коши, условия Дирихле, условия согласования, классическое решение, нестрогого гиперболическое уравнение.

V. I. Korzyuk[1,2], Nguyen Van Vinh[1,3]

[1]Belarusian State University, Minsk, Belarus
[2]Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
[3]Hue University's College of Education, Hue, Vietnam

SOLVING THE PROBLEM FOR THE FOURTH-ORDER NONSTRICTLY HYPERBOLIC EQUATION WITH DOUBLE CHARACTERISTICS

This article is concerned with studying the classical solutions of boudary problems for the fourth-order nonstrictly hyperbolic equation with double characteristics. A classical solution is understood as a function that is defined everywhere in the domain closure and has all classical derivatives entering the equation and the problem conditions. The classical solution is built in analytical form for higher-order equations of interest for computational mathematics in testing numerical algorithms. Note that the correct formulation of mixed problems for hyperbolic equations not only depends on the number of characteristics, but also on their location. The operator appearing in the equation involves a composition of first-order differential operators. The equation is defined in the half-band of two independent variables. There are Cauchy's conditions on the domain bottom and Dirichlet's conditions and Neumann's conditions on other boundary. Using the method of characteristics, the analytic solution of the considered problem is written. The uniqueness of the solutions is proved. In addition, it states: under what conditions a linear differential equation with constant fourth-order coefficients can be represented in the form of the nonstrictly hyperbolic equation considered in the article.

Keywords: differential equations, hyperbolic equations, partial derivatives, boundary conditions, Cauchy's conditions, Dirichlet's conditions, agreement conditions, classical solution, nonstrictly hyperbolic equations.

Введение. Настоящая работа является продолжением построения классических решений задач для гиперболических уравнений четвертого порядка [1–5]. Каждая задача – это отдельное научное исследование, представляющее интерес в теории дифференциальных уравнений с частными производными. В статье рассматривается гиперболическое уравнение с постоянными коэффициентами, для которого находится классическое решение смешанной задачи в случае простейших граничных условий. Оператор уравнения представим в виде композиции линейных операторов первого порядка. Одновременно получается условие на коэффициенты исходного уравнения, при выполнении которого гиперболический оператор разлагается на композицию операторов. Для нахождения классического решения указанной задачи используется формула общего решения для гиперболического уравнения четвертого порядка, оператор которого представим в виде композиции операторов первого порядка [4, 5]. С помощью характеристик уравнения определяется его общее решение. Из общего решения выделяется то, которое удовлетворяет условиям Коши и другим граничным условиям.

1. Разложение гиперболического оператора в виде композиции операторов. Линейное гиперболическое уравнение относительно функции $u: R^2 \supset \overline{Q} \ni (t,x) \to u(t,x) \in R$ четвертого порядка в общем виде можно записать следующим образом:

$$Lu = \sum_{i+j\le 4} \tilde{a}^{(i,j)} \partial_t^i \partial_x^j u(t,x) = \tilde{f}(t,x), \quad (t,x) \in \overline{Q}, \quad i,j = \overline{0,4}. \tag{1}$$

Найдем условия, при которых гиперболический оператор уравнения (1) разлагается на композицию операторов первого порядка, т. е. когда уравнение (1) можно представить в виде

$$\prod_{k=1}^{4} \left(\tilde{c}^{(k)} \partial_t - \tilde{a}^{(k)} \partial_x + \tilde{b}^{(k)} \right) u(t,x) = \tilde{g}(t,x), \quad (t,x) \in \overline{Q}, \tag{2}$$

где коэффициенты $\tilde{c}^{(1)}, \tilde{c}^{(2)}, \tilde{c}^{(3)}$ и $\tilde{c}^{(4)}$ не равны нулю одновременно.

Если $\tilde{\alpha}^{(4,0)} \ne 0$, то можно разделить уравнение (1) на $\tilde{\alpha}^{(4,0)}$. В результате получим уравнение

$$\partial_t^4 u(t,x) + \sum_{i+j\le 4} \alpha^{(i,j)} \partial_t^i \partial_x^j u(t,x) = f(t,x), \quad (t,x) \in \overline{Q}, \; i = \overline{0,3}, \; j = \overline{0,4}, \tag{3}$$

где $\alpha^{(i,j)} = \dfrac{\tilde{\alpha}^{(i,j)}}{\tilde{\alpha}^{(4,0)}}$, $f(t,x) = \dfrac{\tilde{f}(t,x)}{\tilde{\alpha}^{(4,0)}}$. Очевидно, что если уравнение (3) сводится к (2), то должно выполняться условие $\tilde{c}^{(1)}\tilde{c}^{(2)}\tilde{c}^{(3)}\tilde{c}^{(4)} = 1$. В этом случае (2) можно упростить, разделив обе его части на $\tilde{c}^{(1)}\tilde{c}^{(2)}\tilde{c}^{(3)}\tilde{c}^{(4)}$. После этого получим уравнение

$$\prod_{k=1}^{4} \left(\partial_t - a^{(k)} \partial_x + b^{(k)} \right) u(t,x) = g(t,x), \quad (t,x) \in \overline{Q}. \tag{4}$$

Рассмотрим случай $a^{(1)} = a^{(2)} = a$, $b^{(1)} = b^{(2)} = b$, $a^{(3)} = a^{(4)} = c$, $b^{(3)} = b^{(4)} = d$, т. е.

$$\left(\partial_t - a\partial_x + b \right)^2 \left(\partial_t - c\partial_x + d \right)^2 u(t,x) = g(t,x), \quad (t,x) \in \overline{Q}. \tag{5}$$

Отсюда

$$a = \frac{1}{4}\left(-\alpha^{(3,1)} - \sqrt{-8\alpha^{(2,2)} + 3\left(\alpha^{(3,1)}\right)^2} \right), \; c = \frac{1}{4}\left(-\alpha^{(3,1)} + \sqrt{-8\alpha^{(2,2)} + 3\left(\alpha^{(3,1)}\right)^2} \right),$$

$$b = \frac{1}{4}\left(\alpha^{(3,0)} - \sqrt{-8\alpha^{(2,0)} + 3\left(\alpha^{(3,0)}\right)^2} \right), \; d = \frac{1}{4}\left(\alpha^{(3,0)} + \sqrt{-8\alpha^{(2,0)} + 3\left(\alpha^{(3,0)}\right)^2} \right).$$

Для того чтобы представить уравнение (3) в виде (5), надо удовлетворить коэффициенты уравнения (1) условиям

$$-8\alpha^{(2,2)} + 3\left(\alpha^{(3,1)}\right)^2 \ge 0, \quad -8\alpha^{(2,0)} + 3\left(\alpha^{(3,0)}\right)^2 \ge 0, \quad 64\alpha^{(0,0)} = \left(-4\alpha^{(2,0)} + \left(\alpha^{(3,0)}\right)^2 \right)^2,$$

$$8\alpha^{(1,0)}+\left(\alpha^{(3,0)}\right)^3=4\alpha^{(2,0)}\alpha^{(3,0)},\ 8\alpha^{(1,3)}+\left(\alpha^{(3,1)}\right)^3=4\alpha^{(2,2)}\alpha^{(3,1)},$$

$$3\alpha^{(3,0)}\alpha^{(3,1)}+\sqrt{-8\alpha^{(2,0)}+3\left(\alpha^{(3,0)}\right)^2}\sqrt{-8\alpha^{(2,2)}+3\left(\alpha^{(3,1)}\right)^2}=4\alpha^{(2,1)},\ 64\alpha^{(0,4)}=\left(-4\alpha^{(2,2)}+\left(\alpha^{(3,1)}\right)^2\right)^2,$$

$$32\alpha^{(0,2)}+16\alpha^{(2,0)}\left(-3\alpha^{(2,2)}+\left(\alpha^{(3,1)}\right)^2\right)+\alpha^{(3,0)}\left(16\alpha^{(2,2)}\alpha^{(3,0)}-4\alpha^{(2,1)}\alpha^{(3,1)}-3\alpha^{(3,0)}\left(\alpha^{(3,1)}\right)^2\right)=0,$$

$$16\alpha^{(0,1)}=\left(4\alpha^{(2,0)}-\left(\alpha^{(3,0)}\right)^2\right)\left(2\alpha^{(2,1)}-\alpha^{(3,0)}\alpha^{(3,1)}\right),\ 16\alpha^{(0,3)}+\left(2\alpha^{(2,1)}-\alpha^{(3,0)}\alpha^{(3,1)}\right)\left(-4\alpha^{(2,2)}+\left(\alpha^{(3,1)}\right)^2\right)=0,$$

$$8\alpha^{(1,1)}+\left(-4\alpha^{(2,0)}+3\left(\alpha^{(3,0)}\right)^2\right)\alpha^{(3,1)}=4\alpha^{(2,1)}\alpha^{(3,0)},\ 8\alpha^{(1,2)}+\left(-4\alpha^{(2,1)}+3\alpha^{(3,0)}\alpha^{(3,1)}\right)\alpha^{(3,1)}=4\alpha^{(2,2)}\alpha^{(3,0)}.$$

2. Постановка задачи. В замыкании $\overline{Q}=[0,\infty)\times[0,l]$ области $Q=(0,\infty)\times(0,l)$ двух независимых переменных $(t,x)\in\overline{Q}\subset R^2$ задано одномерное уравнение

$$Lu=\left(\partial_t-a\partial_x+b\right)^2\left(\partial_t-c\partial_x+d\right)^2u(t,x)=f(t,x),\quad (t,x)\in\overline{Q},\tag{6}$$

относительно искомой функции $u:R^2\supset\overline{Q}\ni(t,x)\to u(t,x)\in R$, где $a,b,c,d\in R$, $0<l<+\infty$, $\partial_t=\dfrac{\partial}{\partial t}$, $\partial_x=\dfrac{\partial}{\partial x}$, $\partial_t^j\partial_x^k=\dfrac{\partial^{j+k}}{\partial t^j\partial x^k}$, $j,k\in\{0,1,2,...\}$ – частные производные. К уравнению (6) на части границы ∂Q области Q присоединяются условия Коши

$$\partial_t^j u(0,x)=\varphi_j(x),\quad j=0,1,2,3,\quad x\in[0,l],\tag{7}$$

и граничные условия

$$u(t,0)=\mu_1(t),\ \partial_x u(t,0)=\mu_2(t),\quad t\in[0,\infty),\tag{8}$$

$$u(t,l)=\chi_1(t),\ \partial_x u(t,l)=\chi_2(t),\quad t\in[0,\infty).\tag{9}$$

Здесь $f:\overline{Q}\ni(t,x)\to f(t,\mathbf{x})\in R$, $\varphi_j:[0,l]\ni x\to\varphi_j(x)$, $j=0,1,2,3$, $\mu_i:[0,\infty)\ni t\to\mu_i(t)\in R$, $\chi_i:[0,\infty)\ni t\to\chi_i(t)\in R$, $i=1,2$, – заданные функции.

Таким образом, требуется найти решение уравнения (6), удовлетворяющее условиям Коши (7), граничным условиям (8) и (9). Для определенности предположим, что $c>0>a$. Обозначим через $\tilde{f}$ продолжение на R по второму аргументу функции f, т. е. $\tilde{f}(t,x)=f(t,x)$ для $(t,x)\in\overline{Q}$.

3. Общее решение уравнения (6). Справедлива

Лемма 1. *Общее решение уравнения* (6) *представляется в виде суммы*

$$u(t,x)=e^{-bt}\left(g_1(x+at)+tg_2(x+at)\right)+e^{-dt}\left(g_3(x+ct)+tg_4(x+ct)\right)+$$
$$+\frac{1}{(a-c)^3}\int_0^t\int_{x+a(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)}e^{\frac{-d\left(a(t-\tau)+x-z\right)+b\left(c(t-\tau)+x-z\right)}{a-c}}\left(a(t-\tau)+x-z\right)\left(c(t-\tau)+x-z\right)\tilde{f}(\tau,z)\,dz\,d\tau.\tag{10}$$

Доказательство. Введем обозначение:

$$\left(\partial_t-c\partial_x+d\right)^2u(t,x)=w(t,x),\quad (t,x)\in\overline{Q}.\tag{11}$$

Уравнение (6) запишем в виде

$$\left(\partial_t-a\partial_x+b\right)^2w(t,x)=\tilde{f}(t,x),\quad (t,x)\in\overline{Q}.\tag{12}$$

Через функции характеристик делаем замену $x + at = y_0$, $t = y_1$. После приведения к каноническому виду уравнение (12) запишется так:

$$\partial_{y_1}\partial_{y_1}\tilde{w}(y_0,y_1)+2b\partial_{y_1}\tilde{w}(y_0,y_1)+b^2\tilde{w}(y_0,y_1)=\tilde{f}(y_1,y_0-ay_1), \tag{13}$$

где $\tilde{w}(y_0,y_1)=w(t,x)$.

Далее делаем замену $\tilde{w}(y_0,y_1)=e^{-by_1}r(y_0,y_1)$. В результате получим

$$\partial_{y_1}\partial_{y_1}r(y_0,y_1)=e^{by_1}\tilde{f}(y_1,y_0-ay_1). \tag{14}$$

Интегрируем уравнение (14) по переменному y_1. Отсюда

$$r(y_0,y_1)=y_1h^{(1)}(y_0)+h^{(2)}(y_0)+\int\limits_0^{y_1}(y_1-\tau)e^{b\tau}\tilde{f}(\tau,y_0-a\tau)d\tau, \tag{15}$$

или

$$\tilde{w}(y_0,y_1)=e^{-by_1}\left(y_1h^{(1)}(y_0)+h^{(2)}(y_0)\right)+\int\limits_0^{y_1}(y_1-\tau)e^{b(\tau-y_1)}\tilde{f}(\tau,y_0-a\tau)d\tau. \tag{16}$$

В итоге получаем общее решение уравнения (12):

$$w(t,x)=e^{-bt}\left(th^{(1)}(x+at)+h^{(2)}(x+at)\right)+\int\limits_0^{t}(t-\tau)e^{-b(t-\tau)}\tilde{f}(\tau,x+at-a\tau)d\tau. \tag{17}$$

Соотношение (11) рассматриваем как уравнение

$$\left(\partial_t-c\partial_x+d\right)^2u(t,x)=e^{-bt}\left(th^{(1)}(x+at)+h^{(2)}(x+at)\right)+\int\limits_0^{t}(t-\tau)e^{-b(t-\tau)}\tilde{f}(\tau,x+at-a\tau)d\tau,\ (t,x)\in\overline{Q}. \tag{18}$$

Через функции характеристик делаем замену $x + ct = z_0$, $t = z_1$. После приведения к каноническому виду уравнение (18) запишется так:

$$\partial_{z_1}\partial_{z_1}\tilde{u}(z_0,z_1)+2d\partial_{z_1}\tilde{u}(z_0,z_1)+d^2\tilde{u}(z_0,z_1)=e^{-bz_1}\left(z_1h^{(1)}(z_0+(a-c)z_1)+h^{(2)}(z_0+(a-c)z_1)\right)+$$
$$+\int\limits_0^{z_1}(z_1-\tau)e^{-b(z_1-\tau)}\tilde{f}(\tau,z_0-cz_1+az_1-a\tau)d\tau.$$

Производя замену $\tilde{u}(z_0,z_1)=e^{-dz_1}q(z_0,z_1)$, получим

$$\partial_{z_1}\partial_{z_1}q(z_0,z_1)=e^{(d-b)z_1}\left(z_1h^{(1)}(z_0+(a-c)z_1)+h^{(2)}(z_0+(a-c)z_1)\right)+$$
$$+e^{dz_1}\int\limits_0^{z_1}(z_1-\tau)e^{-b(z_1-\tau)}\tilde{f}(\tau,z_0-cz_1+az_1-a\tau)d\tau. \tag{19}$$

Интегрируем уравнение (19) по переменному z_1. В результате имеем

$$u(t,x)=e^{-bt}\left(g_1(x+at)+tg_2(x+at)\right)+e^{-dt}\left(g_3(x+ct)+tg_4(x+ct)\right)+$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^\xi(t-\xi)(\xi-\chi)e^{-d(t-\xi)-b(\xi-\chi)}\tilde{f}\left(\chi,x+c(t-\xi)+a(\xi-\chi)\right)d\chi d\xi.$$

С другой стороны, делая замену $\chi=\tau,\ \xi=\dfrac{a\tau-ct-x+z}{a-c}$, получим

$$\int_0^t\int_0^{\xi}(t-\xi)(\xi-\chi)e^{-d(t-\xi)-b(\xi-\chi)}\tilde f\big(\chi,x+c(t-\xi)+a(\xi-\chi)\big)d\chi d\xi=$$

$$=\frac{1}{(a-c)^3}\int_0^t\int_{x+a(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)}e^{\frac{-d(a(t-\tau)+x-z)+b(c(t-\tau)+x-z)}{a-c}}\big(a(t-\tau)+x-z\big)\big(c(t-\tau)+x-z\big)\tilde f(\tau,z)dzd\tau. \quad (20)$$

Из (19) и (20) следует формула (10). Лемма доказана.

Теорема 1. *Общее решение* (10) *уравнения* (6) *принадлежит классу четырежды непрерывно дифференцируемых функций* $C^4\left(\overline{Q}\right)$ *тогда и только тогда, когда*

$$g_1(x+at)+tg_2(x+at)\in C^4\left(\overline{Q}\right),\ \ g_3(x+ct)+tg_4(x+ct)\in C^4\left(\overline{Q}\right), \quad (21)$$

$$\int_0^t\int_{x+a(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)}e^{\frac{-d(a(t-\tau)+x-z)+b(c(t-\tau)+x-z)}{a-c}}\big(a(t-\tau)+x-z\big)\big(c(t-\tau)+x-z\big)\tilde f(\tau,z)dzd\tau\in C^4\left(\overline{Q}\right) \quad (22)$$

и $f(t,x)\in C\left(\overline{Q}\right)$.

Доказательство. В соотношении (10) сделаем невырожденную замену независимых переменных по формулам

$$\xi=x+at,\ \ \eta=x+ct,$$
$$t=\frac{\xi-\eta}{a-c},\ \ x=\frac{a\eta-c\xi}{a-c}. \quad (23)$$

Согласно формуле (10), функция u определяется независимыми переменными t и x. Следовательно, $\tilde u$ согласно замене (23) является функцией от переменных ξ и η.

Рассматривая функцию $\tilde u$ как сложную функцию, вычислим все частные до четвертого порядка производные функции u через соответствующие производные $\partial_\xi^j\partial_\eta^k\tilde u,\ \ j+k\le 4,\ \ j,k\in\{0,1,2,3,4\}$. Нетрудно проверить, что функция $\tilde u$ принадлежит классу $C^4\left(\overline{Q}\right)$.

Рассмотрим теперь формулу (10) в случае однородного уравнения (6), т. е.

$$u^{(0)}(t,x)=\tilde u(\xi,\eta)=e^{-b\frac{\xi-\eta}{a-c}}\left(g_1(\xi)+\frac{\xi-\eta}{a-c}g_2(\xi)\right)+e^{-d\frac{\xi-\eta}{a-c}}\left(g_3(\eta)+\frac{\xi-\eta}{a-c}g_4(\eta)\right). \quad (24)$$

Вычисляя все производные функции (24) до четвертого порядка включительно, получим $g_1(\xi)+\frac{\xi-\eta}{a-c}g_2(\xi)\in C^4\left(\overline{Q}\right)$ и $g_3(\eta)+\frac{\xi-\eta}{a-c}g_4(\eta)\in C^4\left(\overline{Q}\right)$. Теорема доказана.

Замечание. Если $b=d=0$, то условия (22) запишутся в виде

$$f(t,x)\in C\left(\overline{Q}\right),\ \int_0^t\tilde f\big(\tau,x+h(t-\tau)\big)d\tau\in C^1\left(\overline{Q}\right),\ \int_0^t(t-\tau)\partial_x\tilde f\big(\tau,x+h(t-\tau)\big)d\tau\in C^1\left(\overline{Q}\right),\ \ h=a,c. \quad (25)$$

Удовлетворяя решение (10) условиям Коши (7), получаем систему относительно функций $g_j(x),\ j=\overline{1,4}$, определенных на отрезке $[0,l]$:

$$\begin{gathered}g_1(x)+g_3(x)=\varphi_0(x),\\ L_1g_1(x)+g_2(x)+L_2g_3(x)+g_4(x)=\varphi_1(x),\\ L_1^2g_1(x)+2L_1g_2(x)+L_2^2g_3(x)+2L_2g_4(x)=\varphi_2(x),\\ L_1^3g_1(x)+3L_1^2g_2(x)+L_2^3g_3(x)+3L_2^2g_4(x)=\varphi_3(x),\end{gathered} \quad (26)$$

где $L_1^j=\left(a\frac{d}{dx}-b\right)^j$, $L_2^j=\left(c\frac{d}{dx}-d\right)^j$, $j=\overline{1,3}$.

Решая систему (26) (см. [4]), находим функции $g_j(z)$, $j=\overline{1,4}$, определяемые равенствами

$$g_1(z)=g_1^{(0)}(z)=e^{\frac{b-d}{a-c}z}\left(C_1+zC_2+z^2C_3\right)+\Psi(z), \tag{27}$$

$$g_2(z)=g_2^{(0)}(z)=e^{\frac{b-d}{a-c}z}\left(C_4-(a-c)C_3z\right)+\Omega(z), \tag{28}$$

$$g_3(z)=g_3^{(0)}(z)=\varphi_0(x)-e^{\frac{b-d}{a-c}z}\left(C_1+zC_2+z^2C_3\right)-\Psi(z), \tag{29}$$

$$g_4(z)=g_4^{(0)}(z)=e^{\frac{b-d}{a-c}z}\left(-(a-c)(C_2+C_3z)-C_4\right)+\varphi_1(z)-L_2\varphi_0(z)+(L_2-L_1)\Psi(z)-\Omega(z), \tag{30}$$

для $z\in[0,l]$, где C_1,C_2,C_3,C_4 – произвольные постоянные и

$$\Phi(x)=-2\varphi_3(x)+3(a+c)\varphi_2'(x)-3(b+d)\varphi_2(x)-6ac\varphi_1''(x)+6(ad+bc)\varphi_1'(x)-6bd\varphi_1(x)+$$
$$+\left(3ac^2-c^3\right)\varphi_0'''(x)+\left(3c^2d-6acd-3bc^2\right)\varphi_0''(x)+\left(6bcd+3ad^2-3cd^2\right)\varphi_0'(x)+\left(d^3-3bd^2\right)\varphi_0(x),$$

$$\Psi(x)=\frac{1}{2(a-c)^3}\int_0^x\Phi(z)(x-z)^2e^{\frac{(b-d)(x-z)}{a-c}}dz,$$

$$\Omega(x)=\int_0^x\frac{\left(\varphi_2(z)-2c\varphi_1'(z)+2d\varphi_1(z)+c^2\varphi_0''(z)-2cd\varphi_0'(z)+d^2\varphi_0(z)\right)e^{\frac{(b-d)(x-z)}{a-c}}}{2(a-c)}dz-$$
$$-\int_0^x\frac{\left((a-c)^2\Psi''(z)-2(a-c)(b-d)\Psi'(z)+(b-d)^2\Psi(z)\right)e^{\frac{(b-d)(x-z)}{a-c}}}{2(a-c)}dz.$$

Из (27)–(30) и (10) получим решение задачи Коши:

$$u(t,x)=e^{-bt}\Psi(x+at)+te^{-bt}\Omega(x+at)-e^{-dt}\Psi(x+ct)-te^{-dt}\Omega(x+ct)+te^{-dt}(L_2-L_1)\Psi(x+ct)+$$
$$+e^{-dt}\varphi_0(x+ct)+te^{-dt}\varphi_1(x+ct)-te^{-dt}L_2\varphi_0(x+ct).$$

Отсюда следует, что решение задачи Коши не зависит от C_1,C_2,C_3,C_4 и единственно.

Для других значений аргумента z функции $g_j(z)$, $j=\overline{1,4}$ определяются поэтапно, удовлетворяя искомое решение (10) граничным условиям (8) и (9). Удовлетворяя условию (8), получаем систему уравнений с производными

$$\begin{aligned}&e^{-bt}\left(g_1^{(1)}(at)+tg_2^{(1)}(at)\right)+e^{-dt}\left(g_3^{(0)}(ct)+tg_4^{(0)}(ct)\right)=\tilde{\mu}_1(t),\\&e^{-bt}\left(dg_1^{(1)}(at)+tdg_2^{(1)}(at)\right)+e^{-dt}\left(dg_3^{(0)}(ct)+tdg_4^{(0)}(ct)\right)=\tilde{\mu}_2(t),\end{aligned} \tag{31}$$

где обозначение $d(.)$ – оператор обыкновенной производной первого порядка и

$$\tilde{\mu}_1(t)=\mu_1(t)-\frac{1}{(a-c)^3}\int_0^t\int_{a(t-\tau)}^{c(t-\tau)}e^{\frac{-d(a(t-\tau)-z)+b(c(t-\tau)-z)}{a-c}}\left(a(t-\tau)-z\right)\left(c(t-\tau)-z\right)\tilde{f}(\tau,z)\,dzd\tau,$$

$$\tilde{\mu}_2(t)=\mu_2(t)-\frac{1}{(a-c)^3}\int_0^t\int_{a(t-\tau)}^{c(t-\tau)}e^{\frac{-d(a(t-\tau)-z)+b(c(t-\tau)-z)}{a-c}}\big(a(t-\tau)+c(t-\tau)-2z\big)\tilde{f}(\tau,z)\,dz\,d\tau-$$
$$-\frac{(b-d)}{(a-c)^4}\int_0^t\int_{a(t-\tau)}^{c(t-\tau)}e^{\frac{-d(a(t-\tau)-z)+b(c(t-\tau)-z)}{a-c}}\big(a(t-\tau)-z\big)\big(c(t-\tau)-z\big)\tilde{f}(\tau,z)\,dz\,d\tau.$$

Решая систему (31), получим

$$g_2(z)=g_2^{(1)}(z)=e^{\frac{bz}{a}}\left(b\tilde{\mu}_1\left(\frac{z}{a}\right)-a\tilde{\mu}_2\left(\frac{z}{a}\right)+\tilde{\mu}_1'\left(\frac{z}{a}\right)\right)+(d-b)e^{\frac{(b-d)z}{a}}\left(g_3^{(0)}\left(\frac{zc}{a}\right)+\frac{z}{a}g_4^{(0)}\left(\frac{zc}{a}\right)\right)-$$
$$-e^{\frac{(b-d)z}{a}}g_4^{(0)}\left(\frac{zc}{a}\right)+(a-c)e^{\frac{(b-d)z}{a}}\left(dg_3^{(0)}\left(\frac{zc}{a}\right)+\frac{z}{a}dg_4^{(0)}\left(\frac{zc}{a}\right)\right), \quad (32)$$

$$g_1(z)=g_1^{(1)}(z)=e^{\frac{bz}{a}}\tilde{\mu}_1\left(\frac{z}{a}\right)-\frac{z}{a}g_2^{(1)}(z)-e^{\frac{(b-d)z}{a}}\left(g_3^{(0)}\left(\frac{zc}{a}\right)+\frac{z}{a}g_4^{(0)}\left(\frac{zc}{a}\right)\right). \quad (33)$$

Так как функции $g_3(z)=g_3^{(0)}(z)$ и $g_4(z)=g_4^{(0)}(z)$ уже определены равенствами (29) и (30), то согласно выражениям (32) и (33) находим $g_1(z)=g_1^{(1)}(z)$, $g_2(z)=g_2^{(1)}(z)$ через заданные функции для $z\in\left[\frac{la}{c},0\right]$. Далее используем условие (9). Подставляя функцию (11) в равенство (9), будем иметь

$$e^{-bt}\left(g_1^{(0)}(l+at)+tg_2^{(0)}(l+at)\right)+e^{-dt}\left(g_3^{(1)}(l+ct)+tg_4^{(1)}(l+ct)\right)=\tilde{\chi}_1(t),$$
$$e^{-bt}\left(dg_1^{(0)}(l+at)+tdg_2^{(0)}(l+at)\right)+e^{-dt}\left(dg_3^{(1)}(l+ct)+tdg_4^{(1)}(l+ct)\right)=\tilde{\chi}_2(t),$$

где

$$\tilde{\chi}_1(t)=\chi_1(t)-\frac{1}{(a-c)^3}\int_0^t\int_{l+a(t-\tau)}^{l+c(t-\tau)}e^{\frac{-d(a(t-\tau)+l-z)+b(c(t-\tau)+l-z)}{a-c}}\big(a(t-\tau)+l-z\big)\big(c(t-\tau)+l-z\big)\tilde{f}(\tau,z)\,dz\,d\tau,$$

$$\tilde{\chi}_2(t)=\chi_2(t)-\frac{1}{(a-c)^3}\int_0^t\int_{l+a(t-\tau)}^{l+c(t-\tau)}e^{\frac{-d(a(t-\tau)+l-z)+b(c(t-\tau)+l-z)}{a-c}}\big(a(t-\tau)+c(t-\tau)+2l-2z\big)\tilde{f}(\tau,z)\,dz\,d\tau-$$
$$-\frac{(b-d)}{(a-c)^4}\int_0^t\int_{l+a(t-\tau)}^{l+c(t-\tau)}e^{\frac{-d(a(t-\tau)+l-z)+b(c(t-\tau)+l-z)}{a-c}}\big(a(t-\tau)+l-z\big)\big(c(t-\tau)+l-z\big)\tilde{f}(\tau,z)\,dz\,d\tau.$$

Аналогично,

$$g_4(z)=g_4^{(1)}(z)=(b-d)e^{\frac{(d-b)(z-l)}{c}}\left(g_1^{(0)}\left(l+\frac{a(z-l)}{c}\right)+\frac{z-l}{c}g_2^{(0)}\left(l+\frac{a(z-l)}{c}\right)\right)-$$
$$-e^{\frac{(d-b)(z-l)}{c}}g_2^{(0)}\left(l+\frac{a(z-l)}{c}\right)+(c-a)e^{\frac{(d-b)(z-l)}{c}}\left(dg_1^{(0)}\left(l+\frac{a(z-l)}{c}\right)+\frac{z-l}{c}dg_2^{(0)}\left(l+\frac{a(z-l)}{c}\right)\right)+$$
$$+e^{\frac{d(z-l)}{c}}\left(d\tilde{\chi}_1\left(\frac{z-l}{c}\right)-c\tilde{\chi}_2\left(\frac{z-l}{c}\right)+\tilde{\chi}_1'\left(\frac{z-l}{c}\right)\right),\quad z\in\left[l,l-\frac{lc}{a}\right], \quad (34)$$

и

$$g_3(z)=g_3^{(1)}(z)=-e^{\frac{(d-b)(z-l)}{c}}\left(g_1^{(0)}\left(l+\frac{a(z-l)}{c}\right)+\frac{z-l}{c}g_2^{(0)}\left(\left(l+\frac{a(z-l)}{c}\right)\right)\right)+$$

$$+e^{\frac{d(z-l)}{c}}\tilde{\chi}_1\left(\frac{z-l}{c}\right)-\frac{z-l}{c}g_4^{(1)}(z),\qquad z\in\left[l,l-\frac{lc}{a}\right]. \tag{35}$$

Возвращаясь к условию (8), находим значения $g_1^{(2)}(z)$, $g_2^{(2)}(z)$ функции g_1, g_2 для $z\in\left[\frac{la}{c}-l,\frac{la}{c}\right]$ и значения $g_3^{(2)}(z)$, $g_4^{(2)}(z)$ функции g_3, g_4 для $z\in\left[l-\frac{lc}{a},2l-\frac{lc}{a}\right]$. В общем случае изложенное выше можно записать в виде

$$g_2(z)=g_2^{(k)}(z)=-e^{\frac{(b-d)z}{a}}g_4^{(k-1)}\left(\frac{zc}{a}\right)+(d-b)e^{\frac{(b-d)z}{a}}\left(g_3^{(k-1)}\left(\frac{zc}{a}\right)+\frac{z}{a}g_4^{(k-1)}\left(\frac{zc}{a}\right)\right)+$$

$$+(a-c)e^{\frac{(b-d)z}{a}}\left(dg_3^{(k-1)}\left(\frac{zc}{a}\right)+\frac{z}{a}dg_4^{(k-1)}\left(\frac{zc}{a}\right)\right)+e^{\frac{bz}{a}}\left(b\tilde{\mu}_1\left(\frac{z}{a}\right)-a\tilde{\mu}_2\left(\frac{z}{a}\right)+\tilde{\mu}_1'\left(\frac{z}{a}\right)\right),$$

$$z\in\left[\left[\frac{k+1}{2}\right]\frac{la}{c}-\left[\frac{k}{2}\right]l,\left[\frac{k}{2}\right]\frac{la}{c}-\left[\frac{k-1}{2}\right]l\right],\quad k=0,1,2,\ldots, \tag{36}$$

$$g_1(z)=g_1^{(k)}(z)=e^{\frac{bz}{a}}\tilde{\mu}_1\left(\frac{z}{a}\right)-\frac{z}{a}g_2^{(k)}(z)-e^{\frac{(b-d)z}{a}}\left(g_3^{(k-1)}\left(\frac{zc}{a}\right)+\frac{z}{a}g_4^{(k-1)}\left(\frac{zc}{a}\right)\right),$$

$$z\in\left[\left[\frac{k+1}{2}\right]\frac{la}{c}-\left[\frac{k}{2}\right]l,\left[\frac{k}{2}\right]\frac{la}{c}-\left[\frac{k-1}{2}\right]l\right],\quad k=0,1,2,\ldots, \tag{37}$$

$$g_4(z)=g_4^{(k)}(z)=(b-d)e^{\frac{(d-b)(z-l)}{c}}\left(g_1^{(k-1)}\left(l+\frac{a(z-l)}{c}\right)+\frac{z-l}{c}g_2^{(k-1)}\left(l+\frac{a(z-l)}{c}\right)\right)-$$

$$-e^{\frac{(d-b)(z-l)}{c}}\left(g_2^{(k-1)}\left(l+\frac{a(z-l)}{c}\right)-(c-a)\left(dg_1^{(k-1)}\left(l+\frac{a(z-l)}{c}\right)+\frac{z-l}{c}dg_2^{(k-1)}\left(l+\frac{a(z-l)}{c}\right)\right)\right)+$$

$$+e^{\frac{d(z-l)}{c}}\left(d\tilde{\chi}_1\left(\frac{z-l}{c}\right)-c\tilde{\chi}_2\left(\frac{z-l}{c}\right)+\tilde{\chi}_1'\left(\frac{z-l}{c}\right)\right),$$

$$z\in\left[\left[\frac{k+1}{2}\right]l-\left[\frac{k}{2}\right]\frac{lc}{a},\left[\frac{k+2}{2}\right]l-\left[\frac{k+1}{2}\right]\frac{lc}{a}\right],\quad k=0,1,2,\ldots, \tag{38}$$

$$g_3(z)=g_3^{(k)}(z)=-e^{\frac{(d-b)(z-l)}{c}}\left(g_1^{(k-1)}\left(l+\frac{a(z-l)}{c}\right)+\frac{z-l}{c}g_2^{(k-1)}\left(\left(l+\frac{a(z-l)}{c}\right)\right)\right)+$$

$$+e^{\frac{d(z-l)}{c}}\tilde{\chi}_1\left(\frac{z-l}{c}\right)-\frac{z-l}{c}g_4^{(k)}(z),$$

$$z\in\left[\left[\frac{k+1}{2}\right]l-\left[\frac{k}{2}\right]\frac{lc}{a},\left[\frac{k+2}{2}\right]l-\left[\frac{k+1}{2}\right]\frac{lc}{a}\right],\quad k=0,1,2,\ldots. \tag{39}$$

Чтобы функции g_3+tg_4 принадлежали классу $C^4(\bar{Q})$, а g_1+tg_2 – классу $C^4(\bar{Q})$, кроме требований на гладкость заданных функций задачи (6), (7), (8), (9), должны выполняться равенства для $k = 0,1,2,3,\ldots$ в общих точках соприкосновения

$$d^p\left(g_1^{(k+1)}\left(\left[\frac{k+1}{2}\right]\frac{la}{c}-\left[\frac{k}{2}\right]l\right)+tg_2^{(k+1)}\left(\left[\frac{k+1}{2}\right]\frac{la}{c}-\left[\frac{k}{2}\right]l\right)\right)=$$

$$=d^p\left(g_1^{(k)}\left(\left[\frac{k+1}{2}\right]\frac{la}{c}-\left[\frac{k}{2}\right]l\right)+tg_2^{(k)}\left(\left[\frac{k+1}{2}\right]\frac{la}{c}-\left[\frac{k}{2}\right]l\right)\right),$$

$$p=\overline{0,4},\ t\in\left[\left[\frac{k+1}{2}\right]\frac{l}{c}-\left[\frac{k}{2}\right]\frac{l}{a},\left[\frac{k+1}{2}\right]\frac{l}{c}-\left[\frac{k+2}{2}\right]\frac{l}{a}\right],\tag{40}$$

$$d^p\left(g_3^{(k+1)}\left(\left[\frac{k+2}{2}\right]l-\left[\frac{k+1}{2}\right]\frac{lc}{a}\right)+tg_4^{(k+1)}\left(\left[\frac{k+2}{2}\right]l-\left[\frac{k+1}{2}\right]\frac{lc}{a}\right)\right)=$$

$$=d^p\left(g_3^{(k)}\left(\left[\frac{k+2}{2}\right]l-\left[\frac{k+1}{2}\right]\frac{lc}{a}\right)+tg_4^{(k)}\left(\left[\frac{k+2}{2}\right]l-\left[\frac{k+1}{2}\right]\frac{lc}{a}\right)\right),$$

$$p=\overline{0,4},\ t\in\left[\left[\frac{k}{2}\right]\frac{l}{c}-\left[\frac{k+1}{2}\right]\frac{l}{a},\left[\frac{k+2}{2}\right]\frac{l}{c}-\left[\frac{k+1}{2}\right]\frac{l}{a}\right],\tag{41}$$

где d^p – производные порядка $p=\overline{0,4}$ и $d^p=\dfrac{d^p}{dz^p}$.

Л е м м а 2. *Для любого номера* $k\in\{0,1,2,...\}$ *значения функций* $g_1^{(k)}(z)$, $g_2^{(k)}(z)$, $g_3^{(k)}(z)$, $g_4^{(k)}(z)$ *всегда можно представить в виде*

$$g_1^{(k)}(z)=\psi_1^{(k)}(z,a,b,c,d)+e^{\frac{b-d}{a-c}z}\left(C_1+zC_2+z^2C_3\right),$$

$$g_2^{(k)}(z)=\psi_2^{(k)}(z,a,b,c,d)+e^{\frac{b-d}{a-c}z}\left(C_4-(a-c)C_3z\right),$$

$$g_3^{(k)}(z)=\psi_3^{(k)}(z,a,b,c,d)-e^{\frac{b-d}{a-c}z}\left(C_1+zC_2+z^2C_3\right),$$

$$g_4^{(k)}(z)=\psi_4^{(k)}(z,a,b,c,d)-e^{\frac{b-d}{a-c}z}\left((a-c)(C_2+C_3z)+C_4\right),$$

где функции $\psi_i^{(k)}$, $i=\overline{1,4}$, *не зависят от констант* C_1,C_2,C_3,C_4.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение леммы докажем для функции $g_2^{(k)}(z)$ методом математической индукции.

Для $k=0$ данное утверждение следует из формулы (28). Предположим, что лемма справедлива для всех $k=0,1,...,n-1$. Докажем ее утверждение для функции $g_2^{(n)}$.

Согласно формуле (36), имеем

$$g_2(z)=g_2^{(n)}(z)=-e^{\frac{(b-d)z}{a}}g_4^{(n-1)}\left(\frac{zc}{a}\right)+(d-b)e^{\frac{(b-d)z}{a}}\left(g_3^{(n-1)}\left(\frac{zc}{a}\right)+\frac{z}{a}g_4^{(n-1)}\left(\frac{zc}{a}\right)\right)+$$

$$+(a-c)e^{\frac{(b-d)z}{a}}\left(dg_3^{(n-1)}\left(\frac{zc}{a}\right)+\frac{z}{a}dg_4^{(n-1)}\left(\frac{zc}{a}\right)\right)+e^{\frac{bz}{a}}\left(b\mu_1\left(\frac{z}{a}\right)-a\mu_2\left(\frac{z}{a}\right)+\mu_1'\left(\frac{z}{a}\right)\right),$$

где

$$-e^{\frac{(b-d)z}{a}}g_4^{(n-1)}\left(\frac{zc}{a}\right)=-e^{\frac{(b-d)z}{a}}\psi_4^{(n-1)}\left(\frac{zc}{a},a,b,c,d\right)+\frac{e^{\frac{(b-d)z}{a-c}}\left(a^2C_2-c^2C_3z+a\left(-cC_2+C_4+cC_3z\right)\right)}{a},$$

$$(d-b)e^{\frac{(b-d)z}{a}}\left(g_3^{(n-1)}\left(\frac{zc}{a}\right)+\frac{z}{a}g_4^{(n-1)}\left(\frac{zc}{a}\right)\right)=\frac{(d-b)ze^{\frac{(b-d)z}{a}}}{a}\psi_4^{(n-1)}\left(\frac{zc}{a},a,b,c,d\right)+$$

$$+(d-b)e^{\frac{(b-d)z}{a}}\psi_3^{(n-1)}\left(\frac{zc}{a},a,b,c,d\right)+\frac{(b-d)e^{\frac{(b-d)z}{a-c}}\left(a(C_1+C_2z)+z(C_4+cC_3z)\right)}{a},$$

$$(a-c)e^{\frac{(b-d)z}{a}}\left(dg_3^{(n-1)}\left(\frac{zc}{a}\right)+\frac{z}{a}dg_4^{(n-1)}\left(\frac{zc}{a}\right)\right)=\frac{(a-c)ze^{\frac{(b-d)z}{a}}}{a}d\psi_4^{(n-1)}\left(\frac{zc}{a},a,b,c,d\right)+$$

$$+(a-c)e^{\frac{(b-d)z}{a}}d\psi_3^{(n-1)}\left(\frac{zc}{a},a,b,c,d\right)-\frac{e^{\frac{(b-d)z}{a-c}}\left(a^2(C_2+C_3z)-c^2C_3z+(b-d)C_4z\right)}{a}-$$

$$-\frac{e^{\frac{(b-d)z}{a-c}}\left(c(b-d)C_3z^2-acC_2-adC_1-adC_2z+abC_1+abC_2z\right)}{a}.$$

Отсюда

$$g_2(z)=g_2^{(n)}(z)=\psi_2^{(n)}(z,a,b,c,d)+e^{\frac{b-d}{a-c}z}\left(C_4-(a-c)C_3z\right),$$

где

$$\psi_2^{(n)}(z,a,b,c,d)=e^{\frac{bz}{a}}\left(b\mu_1\left(\frac{z}{a}\right)-a\mu_2\left(\frac{z}{a}\right)+\mu_1'\left(\frac{z}{a}\right)\right)-e^{\frac{(b-d)z}{a}}\psi_4^{(n-1)}\left(\frac{zc}{a},a,b,c,d\right)+$$

$$+\frac{(d-b)ze^{\frac{(b-d)z}{a}}}{a}\psi_4^{(n-1)}\left(\frac{zc}{a},a,b,c,d\right)+(d-b)e^{\frac{(b-d)z}{a}}\psi_3^{(n-1)}\left(\frac{zc}{a},a,b,c,d\right)+$$

$$+(a-c)e^{\frac{(b-d)z}{a}}d\psi_3^{(n-1)}\left(\frac{zc}{a},a,b,c,d\right)+\frac{(a-c)ze^{\frac{(b-d)z}{a}}}{a}d\psi_4^{(n-1)}\left(\frac{zc}{a},a,b,c,d\right).$$

Аналогично доказываются представления леммы и для значений $g_j^{(k)}(z)$, $j=1,3,4$.

С л е д с т в и е. *Для любых* $r,k\in\{0,1,2,...\}$ *сумма* $e^{-bt}\left(g_1^{(r)}(x+at)+tg_2^{(r)}(x+at)\right)+$ $+e^{-dt}\left(g_3^{(k)}(x+ct)+tg_4^{(k)}(x+ct)\right)$ *не зависит от* C_1, C_2, C_3, C_4.

Рассмотрим решение задачи (6)–(9) в случае, когда уравнение (6) является однородным, т. е. $f(t,x)=0$.

Л е м м а 3. *Если функции* $\varphi_j\in C^{5-j}([0,l])$, $j=\overline{0,3}$, $\mu_1,\chi_1\in C^5([0,\infty))$, $\mu_2,\chi_2\in C^4([0,\infty))$, *то равенства* (40)–(41) *имеют место тогда и только тогда, когда они выполняются только для* $k=0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем обозначение:

$$d^p\left(g_1^{(k+1)}\left(\left[\frac{k+1}{2}\right]\frac{la}{c}-\left[\frac{k}{2}\right]l\right)+tg_2^{(k+1)}\left(\left[\frac{k+1}{2}\right]\frac{la}{c}-\left[\frac{k}{2}\right]l\right)\right)-$$

$$-d^p\left(g_1^{(k)}\left(\left[\frac{k+1}{2}\right]\frac{la}{c}-\left[\frac{k}{2}\right]l\right)+tg_2^{(k)}\left(\left[\frac{k+1}{2}\right]\frac{la}{c}-\left[\frac{k}{2}\right]l\right)\right)=\delta_k^p,\ p=\overline{1,4},\ k=0,1,2,...,$$

$$d^p\left(g_3^{(k+1)}\left(\left[\frac{k+2}{2}\right]l-\left[\frac{k+1}{2}\right]\frac{lc}{a}\right)+tg_4^{(k+1)}\left(\left[\frac{k+2}{2}\right]l-\left[\frac{k+1}{2}\right]\frac{lc}{a}\right)\right)-$$

$$-d^p\left(g_3^{(k)}\left(\left[\frac{k+2}{2}\right]l-\left[\frac{k+1}{2}\right]\frac{lc}{a}\right)+tg_4^{(k)}\left(\left[\frac{k+2}{2}\right]l-\left[\frac{k+1}{2}\right]\frac{lc}{a}\right)\right)=\sigma_k^p,\quad p=\overline{1,4},\ k=0,1,2,\ldots .$$

Из (34)–(41) получим

$$\delta_n^1=e^{\frac{(b-d)}{a}\left(\left[\frac{k+1}{2}\right]\frac{la}{c}-\left[\frac{k}{2}\right]l\right)}\sigma_{n-1}^1,$$

$$\delta_n^2=\frac{(b-d)}{a}e^{\frac{(b-d)}{a}\left(\left[\frac{k+1}{2}\right]\frac{la}{c}-\left[\frac{k}{2}\right]l\right)}\sigma_{n-1}^1+e^{\frac{(b-d)}{a}\left(\left[\frac{k+1}{2}\right]\frac{la}{c}-\left[\frac{k}{2}\right]l\right)}\sigma_{n-1}^2,$$

$$\delta_n^3=\frac{(b-d)^2}{a^2}e^{\frac{(b-d)}{a}\left(\left[\frac{k+1}{2}\right]\frac{la}{c}-\left[\frac{k}{2}\right]l\right)}\sigma_{n-1}^1+\frac{(b-d)}{a}e^{\frac{(b-d)}{a}\left(\left[\frac{k+1}{2}\right]\frac{la}{c}-\left[\frac{k}{2}\right]l\right)}\sigma_{n-1}^2+e^{\frac{(b-d)}{a}\left(\left[\frac{k+1}{2}\right]\frac{la}{c}-\left[\frac{k}{2}\right]l\right)}\sigma_{n-1}^3,$$

$$\delta_n^4=\frac{(b-d)^3}{a^3}e^{\frac{(b-d)}{a}\left(\left[\frac{k+1}{2}\right]\frac{la}{c}-\left[\frac{k}{2}\right]l\right)}\sigma_{n-1}^1+\frac{(b-d)^2}{a^2}e^{\frac{(b-d)}{a}\left(\left[\frac{k+1}{2}\right]\frac{la}{c}-\left[\frac{k}{2}\right]l\right)}\sigma_{n-1}^2+$$

$$+\frac{(b-d)}{a}e^{\frac{(b-d)}{a}\left(\left[\frac{k+1}{2}\right]\frac{la}{c}-\left[\frac{k}{2}\right]l\right)}\sigma_{n-1}^3+e^{\frac{(b-d)}{a}\left(\left[\frac{k+1}{2}\right]\frac{la}{c}-\left[\frac{k}{2}\right]l\right)}\sigma_{n-1}^4.$$

Лемма доказана.

Л е м м а 4. *Если функции* $\varphi_j\in C^{5-j}([0,l])$, $j=\overline{0,3}$, $\mu_1,\chi_1\in C^5([0,\infty))$, $\mu_2,\chi_2\in C^4([0,\infty))$, *то равенства* (40)–(41) *при* $k=0$ *выполняются тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия согласования:*

$$d^j\mu_1(0)=\varphi_j(0),\ d^j\chi_1(0)=\varphi_j(l),\ d^j\mu_2(0)=\varphi_j'(0),\ d^j\chi_2(0)=\varphi_j'(l),\tag{42}$$

$$-\left(2a^2c+2ac^2\right)\varphi_1^{(3)}(0)-\left(2abc^2+2a^2cd\right)\varphi_0^{(3)}(0)+2\left(da^2+bc^2+2acd+2abc\right)\varphi_1''(0)+$$
$$+\left(b^2c^2+4abcd+a^2d^2\right)\varphi_0''(0)+\left(a^2+4ac+c^2\right)\varphi_2''(0)-2(ab+cd+2bc+2ad)\varphi_2'(0)-$$
$$-2\left(cb^2+ad^2+2abd+2bcd\right)\varphi_1'(0)-2\left(b^2cd+abd^2\right)\varphi_0'(0)+2\left(b^2d+bd^2\right)\varphi_1(0)+$$
$$+b^2d^2\varphi_0(0)+\left(b^2+4bd+d^2\right)\varphi_2(0)+2(b+d)\varphi_3(0)+a^2c^2\varphi_0^{(4)}(0)-2(a+c)\varphi_3'(0)=-\mu_1^{(4)}(0),\tag{43}$$

$$-\left(2a^2c+2ac^2\right)\varphi_1^{(3)}(l)-\left(2abc^2+2a^2cd\right)\varphi_0^{(3)}(l)+2\left(da^2+bc^2+2acd+2abc\right)\varphi_1''(l)+$$
$$+\left(b^2c^2+4abcd+a^2d^2\right)\varphi_0''(l)+\left(a^2+4ac+c^2\right)\varphi_2''(l)-2(ab+cd+2bc+2ad)\varphi_2'(l)-$$
$$-2\left(cb^2+ad^2+2abd+2bcd\right)\varphi_1'(l)-2\left(b^2cd+abd^2\right)\varphi_0'(l)+2\left(b^2d+bd^2\right)\varphi_1(l)+$$
$$+b^2d^2\varphi_0(l)+\left(b^2+4bd+d^2\right)\varphi_2(l)+2(b+d)\varphi_3(l)+a^2c^2\varphi_0^{(4)}(l)-2(a+c)\varphi_3'(l)=-\chi_1^{(4)}(0),\tag{44}$$

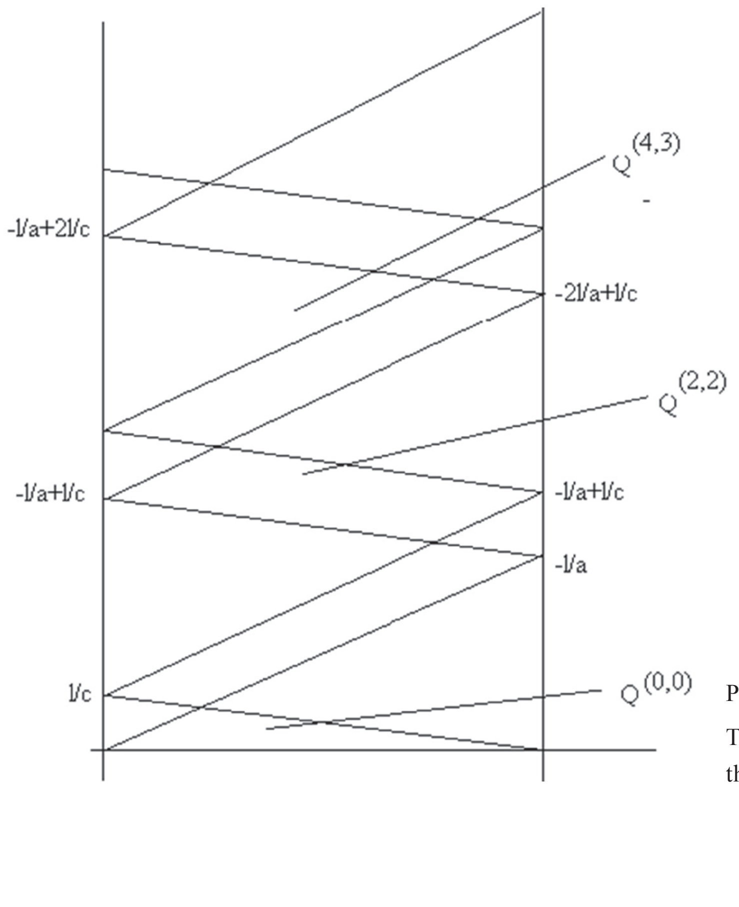
$$a^2c^2(a+2c)\varphi_0^{(5)}(0)-ac\left(4bc^2-ac(b-6d)+2a^2d\right)\varphi_0^{(4)}(0)-ac\left(2a^2+5ac+4c^2\right)\varphi_1^{(4)}(0)+$$
$$+\left(a^3+4a^2c+7ac^2+2c^3\right)\varphi_2^{(3)}(0)+2\left(2bc^3-a^2c(b-5d)+a^3d+ac^2(b+6d)\right)\varphi_1^{(3)}(0)+$$
$$+\left(2b^2c^3+a^3d^2+2a^2cd(-b+3d)+abc^2(-5b+12d)\right)\varphi_0^{(3)}(0)-\left(a^2+2ac+3c^2\right)\varphi_3''(0)+$$
$$+\left(b\left(a^2+8ac-3c^2\right)-2d(a+3c)(2a+c)\right)\varphi_2''(0)+\left(3bc^2(b-4d)+a^2(2b-5d)d\right)\varphi_1''(0)+$$
$$+\left(2ac\left(5b^2-2bd-6d^2\right)\right)\varphi_1''(0)+\left(3b^3c^2+2b^2(5a-3c)cd+ab(a-12c)d^2-2a^2d^3\right)\varphi_0''(0)+$$

$$+2\left(a\left(-3b+d\right)+3c\left(-b+d\right)\right)\varphi_3'\left(0\right)-\left(a\left(5b^2+8bd-7d^2\right)+6c\left(2b^2-bd-d^2\right)\right)\varphi_2'\left(0\right)-$$
$$-2\left(3b^3c+b^2\left(5a+3c\right)d-b\left(a+6c\right)d^2-2ad^3\right)\varphi_1'\left(0\right)+bd\left(-6b^2c-5abd+6bcd+4ad^2\right)\varphi_0'\left(0\right)+$$
$$+\left(7b^2+6bd-3d^2\right)\varphi_3\left(0\right)+\left(3b^3+12b^2d-3bd^2-2d^3\right)\varphi_2\left(0\right)+bd\left(6b^2+3bd-4d^2\right)\varphi_1\left(0\right)+$$
$$+b^2\left(3b-2d\right)d^2\varphi_0\left(0\right)=-\mu_1^{(5)}\left(0\right)+a\mu_2^{(4)}\left(0\right)-5b\mu_1^{(4)}\left(0\right), \tag{45}$$

$$a^2c^2\left(c+2a\right)\varphi_0^{(5)}\left(l\right)-ac\left(4da^2-ac\left(d-6b\right)+2c^2b\right)\varphi_0^{(4)}\left(l\right)-ac\left(2c^2+5ac+4a^2\right)\varphi_1^{(4)}\left(l\right)+$$
$$+\left(c^3+4c^2a+7ca^2+2a^3\right)\varphi_2^{(3)}\left(l\right)+2\left(2da^3-c^2a\left(d-5b\right)+c^3b+ca^2\left(d+6b\right)\right)\varphi_1^{(3)}\left(l\right)+$$
$$+\left(2d^2a^3+c^3b^2+2c^2ab\left(-d+3b\right)+cda^2\left(-5d+12b\right)\right)\varphi_0^{(3)}\left(l\right)-\left(c^2+2ac+3a^2\right)\varphi_3''\left(l\right)+$$
$$+\left(d\left(c^2+8ac-3a^2\right)-2b\left(c+3a\right)\left(2c+a\right)\right)\varphi_2''\left(l\right)+\left(3da^2\left(d-4b\right)+c^2\left(2d-5b\right)d\right)\varphi_1''\left(l\right)+$$
$$+\left(2ac\left(5d^2-2bd-6b^2\right)\right)\varphi_1''\left(l\right)+\left(3d^3a^2+2d^2\left(5c-3a\right)ab+cd\left(c-12a\right)b^2-2c^2b^3\right)\varphi_0''\left(l\right)+$$
$$+2\left(c\left(-3d+b\right)+3a\left(-d+b\right)\right)\varphi_3'\left(l\right)-\left(c\left(5d^2+8bd-7b^2\right)+6a\left(2d^2-bd-b^2\right)\right)\varphi_2'\left(l\right)-$$
$$-2\left(3d^3a+d^2\left(5c+3a\right)b-d\left(c+6a\right)b^2-2cb^3\right)\varphi_1'\left(l\right)+bd\left(-6d^2a-5cbd+6bad+4cb^2\right)\varphi_0'\left(l\right)+$$
$$+\left(7d^2+6bd-3b^2\right)\varphi_3\left(l\right)+\left(3d^3+12d^2b-3db^2-2b^3\right)\varphi_2\left(l\right)+bd\left(6d^2+3bd-4b^2\right)\varphi_1\left(l\right)+$$
$$+d^2\left(3d-2b\right)b^2\varphi_0\left(l\right)=-\chi_1^{(5)}\left(0\right)+c\chi_2^{(4)}\left(0\right)-5d\chi_1^{(4)}\left(0\right). \tag{46}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Запишем равенства (40)–(41) для $k = 1$ через значения заданных функций и получим условия согласования.

Разобьем область $\overline{Q}$ с помощью характеристик уравнения на подобласти $Q^{(r,k)}$ и $Q=\bigcup_{k=0}^{\infty}\bigcup_{r=k-1}^{k+1}Q^{(r,k)}$ (см. рисунок).



Разбиение области $\overline{Q}$ на подобласти $Q^{(r,k)}$

The partition of the domain $\overline{Q}$ into the sub-domains $Q^{(r,k)}$

Т е о р е м а 2. *Предположим, что функции* $\varphi_j \in C^{5-j}\left(\left[0,l\right]\right)$, $j=\overline{0,3}$, $\mu_1,\chi_1 \in C^5\left(\left[0,\infty\right)\right)$, $\mu_2,\chi_2 \in C^4\left(\left[0,\infty\right)\right)$. *В классе функций* $C^4\left(\overline{Q}\right)$ *существует единственное классическое решение* $u\left(t,x\right)$ *однородной задачи* (6)–(9) *при выполнении указанных условий гладкости на заданные функции тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования* (42)–(46).

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2 фактически проведено в предыдущих рассуждениях.

Т е о р е м а 3. *Предположим, что функции* $\varphi_j \in C^{5-j}\left(\left[0,l\right]\right)$, $j=\overline{0,3}$, $\mu_i,\chi_i \in C^{6-i}\left(\left[0,\infty\right)\right)$, $i=1,2$, $f \in C^1(\overline{Q})$. *В классе функций* $C^4\left(\overline{Q}\right)$ *существует единственное классическое решение задачи* (6)–(9) *тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия согласования:*

$$d^j\mu_1(0)=\varphi_j(0),\ \ d^j\chi_1(0)=\varphi_j(l),\ \ d^j\mu_2(0)=\varphi_j'(0),\ \ d^j\chi_2(0)=\varphi_j'(l),$$

$$\begin{gathered}
a^2c^2\varphi_0^{(4)}(0)-\left(2a^2c+2ac^2\right)\varphi_1^{(3)}(0)-\left(2abc^2+2a^2cd\right)\varphi_0^{(3)}(0)+2\left(da^2+bc^2+2acd+2abc\right)\varphi_1''(0)+\\
+\left(b^2c^2+4abcd+a^2d^2\right)\varphi_0''(0)+\left(a^2+4ac+c^2\right)\varphi_2''(0)-2\left(ab+cd+2bc+2ad\right)\varphi_2'(0)-\\
-2\left(cb^2+ad^2+2abd+2bcd\right)\varphi_1'(0)-2\left(b^2cd+abd^2\right)\varphi_0'(0)-2(a+c)\varphi_3'(0)+2\left(b^2d+bd^2\right)\varphi_1(0)+\\
+b^2d^2\varphi_0(0)+\left(b^2+4bd+d^2\right)\varphi_2(0)+2(b+d)\varphi_3(0)+\mu_1^{(4)}(0)=f(0,0),
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
a^2c^2\varphi_0^{(4)}(l)-\left(2a^2c+2ac^2\right)\varphi_1^{(3)}(l)-\left(2abc^2+2a^2cd\right)\varphi_0^{(3)}(l)+2\left(da^2+bc^2+2acd+2abc\right)\varphi_1''(l)+\\
+\left(b^2c^2+4abcd+a^2d^2\right)\varphi_0''(l)+\left(a^2+4ac+c^2\right)\varphi_2''(l)-2\left(ab+cd+2bc+2ad\right)\varphi_2'(l)-\\
-2\left(cb^2+ad^2+2abd+2bcd\right)\varphi_1'(l)-2\left(b^2cd+abd^2\right)\varphi_0'(l)-2(a+c)\varphi_3'(l)+2\left(b^2d+bd^2\right)\varphi_1(l)+\\
+b^2d^2\varphi_0(l)+\left(b^2+4bd+d^2\right)\varphi_2(l)+2(b+d)\varphi_3(l)+\chi_1^{(4)}(0)=f(0,l),
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
a^2c^2(a+2c)\varphi_0^{(5)}(0)-ac\left(4bc^2-ac(b-6d)+2a^2d\right)\varphi_0^{(4)}(0)-ac\left(2a^2+5ac+4c^2\right)\varphi_1^{(4)}(0)+\\
+\left(a^3+4a^2c+7ac^2+2c^3\right)\varphi_2^{(3)}(0)+2\left(2bc^3-a^2c(b-5d)+a^3d+ac^2(b+6d)\right)\varphi_1^{(3)}(0)+\\
+\left(2b^2c^3+a^3d^2+2a^2cd(-b+3d)+abc^2(-5b+12d)\right)\varphi_0^{(3)}(0)-\left(a^2+2ac+3c^2\right)\varphi_3''(0)+\\
+\left(b\left(a^2+8ac-3c^2\right)-2d(a+3c)(2a+c)\right)\varphi_2''(0)+\left(3bc^2(b-4d)+a^2(2b-5d)d\right)\varphi_1''(0)+\\
+\left(2ac\left(5b^2-2bd-6d^2\right)\right)\varphi_1''(0)+\left(3b^3c^2+2b^2(5a-3c)cd+ab(a-12c)d^2-2a^2d^3\right)\varphi_0''(0)+\\
+2\left(a(-3b+d)+3c(-b+d)\right)\varphi_3'(0)-\left(a\left(5b^2+8bd-7d^2\right)+6c\left(2b^2-bd-d^2\right)\right)\varphi_2'(0)-\\
-2\left(3b^3c+b^2(5a+3c)d-b(a+6c)d^2-2ad^3\right)\varphi_1'(0)+bd\left(-6b^2c-5abd+6bcd+4ad^2\right)\varphi_0'(0)+\\
+\left(7b^2+6bd-3d^2\right)\varphi_3(0)+\left(3b^3+12b^2d-3bd^2-2d^3\right)\varphi_2(0)+bd\left(6b^2+3bd-4d^2\right)\varphi_1(0)+\\
+b^2(3b-2d)d^2\varphi_0(0)+\mu_1^{(5)}(0)-a\mu_2^{(4)}(0)+5b\mu_1^{(4)}(0)=\partial_t f(0,0),
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
a^2c^2(c+2a)\varphi_0^{(5)}(l)-ac\left(4da^2-ac(d-6b)+2c^2b\right)\varphi_0^{(4)}(l)-ac\left(2c^2+5ac+4a^2\right)\varphi_1^{(4)}(l)+\\
+\left(c^3+4c^2a+7ca^2+2a^3\right)\varphi_2^{(3)}(l)+2\left(2da^3-c^2a(d-5b)+c^3b+ca^2(d+6b)\right)\varphi_1^{(3)}(l)+\\
+\left(2d^2a^3+c^3b^2+2c^2ab(-d+3b)+cda^2(-5d+12b)\right)\varphi_0^{(3)}(l)-\left(c^2+2ac+3a^2\right)\varphi_3''(l)+\\
+\left(d\left(c^2+8ac-3a^2\right)-2b(c+3a)(2c+a)\right)\varphi_2''(l)+\left(3da^2(d-4b)+c^2(2d-5b)d\right)\varphi_1''(l)+\\
+\left(2ac\left(5d^2-2bd-6b^2\right)\right)\varphi_1''(l)+\left(3d^3a^2+2d^2(5c-3a)ab+cd(c-12a)b^2-2c^2b^3\right)\varphi_0''(l)+
\end{gathered}$$

$$+2\left(c\left(-3d+b\right)+3a\left(-d+b\right)\right)\varphi_3'\left(l\right)-\left(c\left(5d^2+8bd-7b^2\right)+6a\left(2d^2-bd-b^2\right)\right)\varphi_2'\left(l\right)-$$
$$-2\left(3d^3a+d^2\left(5c+3a\right)b-d\left(c+6a\right)b^2-2cb^3\right)\varphi_1'\left(l\right)+bd\left(-6d^2a-5cbd+6bad+4cb^2\right)\varphi_0'\left(l\right)+$$
$$+\left(7d^2+6bd-3b^2\right)\varphi_3\left(l\right)+\left(3d^3+12d^2b-3db^2-2b^3\right)\varphi_2\left(l\right)+bd\left(6d^2+3bd-4b^2\right)\varphi_1\left(l\right)+$$
$$+d^2\left(3d-2b\right)b^2\varphi_0\left(l\right)+\chi_1^{(5)}\left(0\right)-c\chi_2^{(4)}\left(0\right)+5d\chi_1^{(4)}\left(0\right)=\partial_t f\left(0,l\right).$$

Рассмотрим решение задачи (6)–(9) в случае, когда $b = d = 0$, т. е.

$$\left(\partial_t-a\partial_x\right)^2\left(\partial_t-c\partial_x\right)^2u\left(t,x\right)=f\left(t,x\right),\quad \left(t,x\right)\in\overline{Q}. \tag{47}$$

Т е о р е м а 4. *Предположим, что для f выполняются условия* (25) *и* $\varphi_j\in C^{5-j}\left(\left[0,l\right]\right)$, $j=\overline{0,3}$, $\mu_i,\chi_i\in C^{6-i}\left(\left[0,\infty\right)\right)$, $i=1,2$. *В классе функций* $C^4\left(\overline{Q}\right)$ *существует единственное классическое решение* $u(t,x)$ *задачи* (47),(7)–(9) *при выполнении указанных условий гладкости на заданные функции тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия согласования:*

$$d^j\mu_1\left(0\right)=\varphi_j\left(0\right),\ d^j\chi_1\left(0\right)=\varphi_j\left(l\right),\ d^j\mu_2\left(0\right)=\varphi_j'\left(0\right),\ d^j\chi_2\left(0\right)=\varphi_j'\left(l\right),\ j=\overline{0,3},$$
$$a^2c^2\varphi_0^{(4)}\left(0\right)-\left(2a^2c+2ac^2\right)\varphi_1^{(3)}\left(0\right)+\left(a^2+4ac+c^2\right)\varphi_2''\left(0\right)-2\left(a+c\right)\varphi_3'\left(0\right)+\mu_1^{(4)}\left(0\right)=f\left(0,0\right),$$
$$a^2c^2\varphi_0^{(4)}\left(l\right)-\left(2a^2c+2ac^2\right)\varphi_1^{(3)}\left(l\right)+\left(a^2+4ac+c^2\right)\varphi_2''\left(l\right)-2\left(a+c\right)\varphi_3'\left(l\right)+\chi_1^{(4)}\left(0\right)=f\left(0,l\right),$$
$$a^2c^2\left(a+2c\right)\varphi_0^{(5)}\left(0\right)-ac\left(2a^2+5ac+4c^2\right)\varphi_1^{(4)}\left(0\right)+\left(a^3+4a^2c+7ac^2+2c^3\right)\varphi_2^{(3)}\left(0\right)-$$
$$-\left(a^2+2ac+3c^2\right)\varphi_3''\left(0\right)+\mu_1^{(5)}\left(0\right)-a\mu_2^{(4)}\left(0\right)=\partial_t f\left(0,0\right),$$
$$a^2c^2\left(c+2a\right)\varphi_0^{(5)}\left(l\right)-ac\left(2c^2+5ac+4a^2\right)\varphi_1^{(4)}\left(l\right)+\left(c^3+4c^2a+7ca^2+2a^3\right)\varphi_2^{(3)}\left(l\right)-$$
$$-\left(c^2+2ac+3a^2\right)\varphi_3''\left(l\right)+\chi_1^{(5)}\left(0\right)-c\chi_2^{(4)}\left(0\right)=\partial_t f\left(0,l\right).$$

Заключение. В данной статье получены формулы классического решения первой смешанной задачи для нестрого гиперболического уравнения четвертого порядка. Доказано, что эта задача имеет единственное решение только тогда, когда в угловых точках заданной области изменения независимых переменных выполняются условия согласования для заданных функций уравнения, условий Коши и граничных условий. Следует отметить, что эти условия являются необходимыми и достаточными. Кроме того, показано, при каких условиях линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами четвертого порядка представимо в виде рассматриваемого в статье нестрого гиперболического уравнения.

Список использованных источников

1. Корзюк, В. И. Смешанная задача для гиперболического уравнения четвертого порядка / В. И. Корзюк, Е. С. Чеб // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2004. – № 2. – С. 9–13.

2. Корзюк, В. И. Классические решения смешанных задач для одномерного биволнового уравнения / В. И. Корзюк, Н. В. Винь // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2016. – № 1. – С. 69–79.

3. Корзюк, В. И. Классическое решение задачи с интегральным условием для одномерного биволнового уравнения / В. И. Корзюк, Нгуен Ван Винь // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2016. – № 3. – С. 16–29.

4. Korzyuk, V. I. Cauchy problem for some fourth-order nonstrictly hyperbolic equations / V. I. Korzyuk, N. V. Vinh // Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics. – 2016. – Vol. 7, № 5. – P. 869–879.

5. Korzyuk, V. I . Solution of the Cauchy problem for a hyperbolic equation with constant coefficients in the case of two independent variables / V. I. Korzyuk, I. S. Kozlovskaya // Differential equations. – 2012. – Vol. 48, № 5. – P. 1–10.

References

1. Korzyuk V.I., Cheb E.S. Mixed problem for the fourth order hyperbolic equation. *Izvestiia Natsionalnoi akademii nauk Belarusi. Ser. fiziko-matematicheskikh nauk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series], 2004, no 2, pp. 9–13. (In Russian).

2. Korzyuk V.I., Nguen Van Vin'. Classical solutions of mixed problems for the one-dimensional biwave equation. *Izvestiia Natsionalnoi akademii nauk Belarusi. Ser. fiziko-matematicheskikh nauk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series], 2016, no 1, pp. 69–79. (In Russian).

3. Korzyuk V.I., Nguen Van Vin'. Classical solution of a problem with an integral condition for the one-dimensional biwave equation. *Izvestiia Natsionalnoi akademii nauk Belarusi. Ser. fiziko-matematicheskikh nauk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series], 2016, no 3. pp. 16–29. (In Russian).

4. Korzyuk V.I., Vinh N.V. Cauchy problem for some fourth-order nonstrictly hyperbolic equations. *Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics*, 2016, vol. 7, no. 5, pp. 869–879. Doi: 10.17586/2220-8054-2016-7-5-869-879

5. Korzyuk V.I., Kozlovskaya I.S. Solution of the Cauchy problem for a hyperbolic equation with constant coefficients in the case of two independent variables. *Differential equations*, 2012, vol. 48, no. 5, pp. 1–10. Doi: 10.1134/S0012266112050096.

Информация об авторах

Виктор Иванович Корзюк – академик, профессор, доктор физико-математических наук, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: korzyuk@bsu.by

Нгуен Ван Винь – аспирант, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: vinhnguyen0109@gmail.com

Information about the authors

Viktor Ivanovich Korzyuk – Academician, Professor, D. Sc (Physics and Mathematics), Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: korzyuk@bsu.by

Nguyen Van Vinh – Postgraduate, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: vinhnguyen0109@gmail.com

Для цитирования

Корзюк, В. И. Решение задачи для нестрого гиперболического уравнения четвертого порядка с двукратными характеристиками / В. И. Корзюк, Нгуен Ван Винь // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2017. – № 1. – С. 38–52.

For citation

Korzyuk V.I., Nguyen Van Vinh. Solving the problem for the fourth-order nonstrictly hyperbolic equation with double characteristics. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series], 2017, no. 1, pp. 38–52. (In Russian).