

И. И. Столярчук

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

РЕШЕНИЕ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ ХАРАКТЕРИСТИК ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ

В одномерном случае для волнового уравнения рассматривается смешанная задача с одним интегральным условием и граничным условием типа Дирихле на правой границе области. Показывается, что при определенных условиях гладкости на заданные функции для существования и единственности классического решения поставленной смешанной задачи необходимо и достаточно выполнения условий согласования на исходные функции. При ее анализе используется метод характеристик, который сводится к построению решения задачи в подобластях, полученных из исходной области при разбиении последней характеристическими прямыми. В каждой из указанных подобластей с помощью начальных, а также интегрального и граничного условий строится решение поставленной задачи, при этом в некоторых подобластях оно сводится к интегральному уравнению Вольтерры второго рода, для которого справедливы теоремы о корректной разрешимости. Условия согласования выводятся при приравнивании значений решения и его производных до второго порядка включительно на характеристиках. Данные результаты позволяют построить как аналитическое решение исходной задачи, если удастся найти решение уравнения Вольтерры второго рода в явном виде, так и приближенное решение задачи с помощью численных методов. Однако при построении приближенного решения следует вводить дополнительные условия сопряжения решения или его производных на характеристиках.

Ключевые слова: волновое уравнение, метод характеристик, интегральное условие, классическое решение, смешанная задача.

I. I. Stolyarchuk

Belarusian State University, Minsk, Belarus

SOLUTION OF THE MIXED PROBLEMS BY THE METHOD OF CHARACTERISTICS FOR THE WAVE EQUATION WITH THE INTEGRAL CONDITION

The mixed problem for the wave equation with one integral condition and one Dirichlet's condition on the right boundary of the domain is considered in the one-dimensional case. It is proved that the fulfillment of the matching conditions is necessary and sufficient for existence and uniqueness of the classical solution of the given mixed problem under certain smoothness conditions for the given functions. The method of characteristics is used for analysis of the problem. This method is reduced to partitioning the original domain by characteristics line in sub-domains where the solution of the given problem is constructed with the help of initial, boundary and integral conditions. However, in some sub-domains the solution of the problem is reduced to Volterra's second-type equation. For this equation, the theorems of correct solvability are fulfilled. Matching conditions are obtained by equating the values of the solution and its derivatives up to the second-order, including on characteristics. The obtained results allow building either the analytical solution of the given problem if Volterra's equation solution can be constructed in explicit form, or the approximate solution with the help of numerical methods. However, in building the approximate solution, the additional conjugation conditions for solution and its derivatives should be introduced on characteristics.

Keywords: wave equation, method of characteristics, integral condition, classical solution, mixed problem.

Введение. В настоящей статье рассматривается смешанная задача для волнового уравнения с интегральным условием. В [1, 2] и других работах исследуются гиперболические уравнения второго порядка с нелокальными условиями, а также строится обобщенное решение задачи. Однако в данной работе показано, что для поставленной задачи возможно построить классическое решение смешанной задачи для одномерного волнового уравнения с нелокальным условием. Следует отметить, что здесь нелокальное условие представляет собой интегральное уравнение второго рода с ядром, зависящим от двух переменных.

Для построения решения задачи применен хорошо зарекомендовавший себя метод характеристик, использующийся как для задач, у которых точное решение представимо в аналитическом

виде [3], так и для задач, где такое представление невозможно [4, 5]. С помощью метода характеристик решение исходной задачи во всей полуполосе сводится к решению подзадач в подобластях, полученных при разбиении исходной полосы характеристическими прямыми. Далее, в каждой такой подобласти ищется решение новой задачи, в постановке которой использованы условия из исходной задачи, а затем проводится склейка найденных решений. Оказывается, что для гладкости решения исходной задачи во всей полуполосе только гладкости исходных функций недостаточно, и дополнительно требуется выполнение условий согласования начальных данных.

В результате выведены необходимые и достаточные условия существования единственного классического решения рассматриваемой задачи в полуполосе. При этом решение в некоторых подобластях получено в виде интегрального уравнения Вольтерры второго рода, формулы решения которого в общем виде не существует, однако для этих уравнений доказаны теоремы о существовании и единственности решения [6].

Предложенный в настоящей статье подход позволяет получить приближенное решение поставленной задачи в случае невыполнения однородных условий согласования, причем при численном решении требуется дополнительно ввести условия сопряжения на характеристиках.

Постановка задачи. Рассмотрим волновое уравнение

$$\partial_{x_0}^2 u - a^2 \partial_{x_1}^2 u = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in Q, \quad Q = [0, +\infty) \times [0, l] \quad (1)$$

с начальными условиями

$$u(0, x_1) = \varphi(x_1), \quad \partial_{x_0} u(0, x_1) = \psi(x_1), \quad x_1 \in [0, l], \quad (2)$$

интегральным условием

$$u(x_0, 0) + \int_0^l K(x_0, s) u(x_0, s) ds = \mu^{(0)}(x_0), \quad x_0 \in [0, +\infty), \quad (3)$$

где $K: \mathbb{R}^2 \supset Q \ni (x_0, s) \rightarrow K(x_0, s) \in \mathbb{R}$, и граничным условием

$$u(x_0, l) = \mu^{(l)}(x_0), \quad x_0 \in [0, +\infty). \quad (4)$$

Требуется найти необходимые и достаточные условия существования единственного классического решения задачи (1)–(4) из класса $C^2(Q)$.

Общее решение неоднородного уравнения. Область Q разделим на области $Q^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots$ прямыми $x_0 = \frac{(k-1)l}{a}$, $k = 1, 2, \dots$ так, как показано на рисунке. В свою очередь каждая из областей $Q^{(k)}$ разбивается с помощью характеристических прямых $x_1 = -(k-2)l + ax_0$ и $x_1 = (k-1)l - ax_0$ на области $Q_i^{(k)}$, $i = \overline{1, 4}$, в каждой из которых ищется решение исходной задачи.

Общее решение неоднородного уравнения (1) для каждой из областей $Q_i^{(k)}$, $i = \overline{1, 4}$ можно записать как

$$u_j^{(k)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2a} \int_{\frac{(k-1)l}{a}}^{x_0} \int_{x_1 - a(x_0 - \tau)}^{x_1 + a(x_0 - \tau)} f(\tau, \xi) d\xi d\tau + p_j^{(k)}(x_1 - ax_0) + g_j^{(k)}(x_1 + ax_0), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (5)$$

где $p_j^{(k)}$, $g_j^{(k)}$ – произвольные функции, f – обозначает непрерывное продолжение функции f на все множество интегрирования, обозначенное этим же символом. Предположим, что эти функции таковы, что

$$\begin{aligned} p_j^{(k)}(x_1 - ax_0) &= p_{j+2}^{(k)}(x_1 - ax_0), \quad j = 1, 2, \\ g_j^{(k)}(x_1 + ax_0) &= g_{j+1}^{(k)}(x_1 + ax_0), \quad j = 1, 3, \quad k = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (6)$$

и для них выполняются условия согласования

$$\begin{aligned} \frac{d^i}{dz^i} p_{j+1}^{(k)}(-(k-1)l) - \frac{d^i}{dz^i} p_j^{(k)}(-(k-1)l) &= \delta_i^{(k)}, j=1,3, i=\overline{0,2}, \\ \frac{d^i}{dz^i} g_{j+2}^{(k)}(kl) - \frac{d^i}{dz^i} g_j^{(k)}(kl) &= \sigma_i^{(k)}, j=1,2, i=\overline{0,2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Условия согласования (7) назовем однородными, если $\delta_i^{(k)} = \sigma_i^{(k)} = 0, i=\overline{0,2}$.

Функции $p_j^{(k)}$ для $j=1,3$ определены на отрезке $x_1 - ax_0 \in [-(k-1)l, -(k-2)l]$. Введем обозначения

$$p^{(k)}(x_1 - ax_0) = \begin{cases} p_1^{(k)}(x_1 - ax_0), & x_1 - ax_0 \in [-(k-1)l, -(k-2)l], \\ p_2^{(k)}(x_1 - ax_0), & x_1 - ax_0 \in [-kl, -(k-1)l]. \end{cases} \quad (8)$$

Аналогично

$$g^{(k)}(x_1 + ax_0) = \begin{cases} g_1^{(k)}(x_1 + ax_0), & x_1 + ax_0 \in [(k-1)l, kl], \\ g_3^{(k)}(x_1 + ax_0), & x_1 + ax_0 \in [kl, (k+1)l]. \end{cases} \quad (9)$$

Л е м м а 1. Пусть функции $p_j^{(k)} (j=1,2)$, $g_j^{(k)} (j=1,3)$ дважды непрерывно дифференцируемы на соответствующих отрезках своего определения, т. е. $p_1^{(k)} \in C^2[-(k-1)l, -(k-2)l]$, $p_2^{(k)} \in C^2[-kl, -(k-1)l]$, $g_1^{(k)} \in C^2[(k-1)l, kl]$, $g_3^{(k)} \in C^2[kl, (k+1)l]$. Однородные условия согласования (7) выполняются тогда и только тогда, когда функции $p^{(k)} \in C^2[-kl, -(k-2)l]$, $g^{(k)} \in C^2[(k-1)l, (k+1)l]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из условий теоремы и условий согласования (7).

Л е м м а 2. Если выполняются условия леммы 1 и равенства (5), то решения $u_j^{(k)}$ уравнения (6) в каждой области $Q_j^{(k)}$ можно представить в виде выражения

$$u_j^{(k)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2a} \int_{\frac{(k-1)l}{a}}^{x_0} \int_{x_1 - a(x_0 - \tau)}^{x_1 + a(x_0 - \tau)} f(\tau, \xi) d\xi d\tau + p^{(k)}(x_1 - ax_0) + g^{(k)}(x_1 + ax_0), \quad (10)$$

$$k=1,2,\dots, \quad j=\overline{1,4}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение леммы 2 следует из леммы 1, равенств (6) и формулы (5).

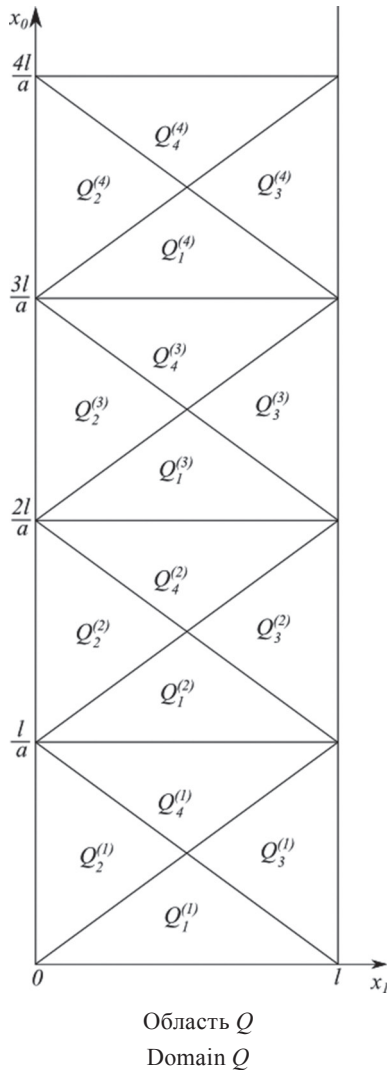
Пусть $\overline{Q}$ – замыкание области Q , аналогично $\overline{Q_j^{(k)}}$ – замыкания соответствующих областей $Q_j^{(k)}$. Обозначим через $u^{(k)}$ функцию $u^{(k)} : \mathbb{R} \supset \bigcup_{j=1}^4 Q_j^{(k)} \ni (x_0, x_1) \rightarrow u^{(k)}(x_0, x_1) \in \mathbb{R}$, где ее значения определяются равенствами $u^{(k)}(x_0, x_1) = u_j^{(k)}(x_0, x_1)$, если $(x_0, x_1) \in Q_j^{(k)}, j=\overline{1,4}$.

Функции $u_j^{(k)}$ соприкасаются друг с другом в точках $(-(k-1)l, x_1 + ax_0), (x_1 - ax_0, kl) \in \overline{Q^{(k)}}$. Чтобы $u^{(k)}$ были дважды непрерывно дифференцируемы, требуем выполнения условий, при которых будут справедливы следующие равенства:

$$\partial_{x_0}^i u_j^{(k)}\left(\frac{(k-1)l}{a}, 0\right) = \partial_{x_0}^i u_{j+1}^{(k)}\left(\frac{(k-1)l}{a}, 0\right), \quad j=1,3, \quad \left(\frac{(k-1)l}{a}, 0\right) \in \overline{Q_j^{(k)}}, \quad (11)$$

$$\partial_{x_1}^i u_j^{(k)}\left(\frac{(k-1)l}{a}, l\right) = \partial_{x_1}^i u_{j+2}^{(k)}\left(\frac{(k-1)l}{a}, l\right), \quad j=1,2, \quad \left(\frac{(k-1)l}{a}, l\right) \in \overline{Q_j^{(k)}}, \quad (12)$$

где $i=\overline{0,2}$ и $\partial_{x_0}^0 u_j^{(k)} = u_j^{(k)}, \partial_{x_0}^1 u_j^{(k)} = \partial_{x_0} u_j^{(k)}, \partial_{x_0}^2 u_j^{(k)} = \partial_{x_0 x_0} u_j^{(k)}, \partial_{x_1}^i$ – аналогичное обозначение. Отсюда следует



Утверждение. Если функции $u_j^{(k)} \in C^2(\overline{Q_j^{(k)}})$, то следующие утверждения эквивалентны:

$$1) u^{(k)} \in C^2(\overline{Q^{(k)}});$$

2) выполняются однородные условия согласования (11), (12).

Здесь под $u^{(k)}$ подразумевается продолжение по непрерывности на все множество $\overline{Q^{(k)}}$ определенной выше функции, обозначенной этим же символом $u^{(k)}$.

Лемма 3. Пусть функция $f: (x_0, x_1) \in \overline{Q} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow f(x_0, x_1) \in \mathbb{R}$ из уравнения (5) принадлежит классу $C^1(\overline{Q})$. Условия лемм 1 и 2 выполняются тогда и только тогда, когда решение уравнения (5) принадлежит классу $C^2(Q^{(k)})$, которое определяется по формуле (10) для $j = \overline{1, 4}$.

Доказательство. Так как функции $p^{(k)}, g^{(k)}$ согласно лемме 1 являются дважды непрерывно дифференцируемыми, то решение уравнения (5) $u_j^{(k)} \in C^2(\overline{Q_j^{(k)}})$, $j = \overline{1, 4}$. Для завершения доказательства леммы 3 необходимо проверить выполнение условий согласования (11), (12) для функций $u_j^{(k)}$.

Положим $i = 0$ в условиях (11). Тогда

$$u_j^{(k)}\left(\frac{(k-1)l}{a}, 0\right) = u_{j+1}^{(k)}\left(\frac{(k-1)l}{a}, 0\right), \quad j = \overline{1, 3}. \quad (13)$$

Рассмотрим теперь производную первого порядка

$$\partial_{x_0} u_j^{(k)}\left(\frac{(k-1)l}{a}, 0\right) = -a \frac{dp^{(k)}}{dx_0}(-(k-1)l) + a \frac{dg^{(k)}}{dx_0}((k-1)l), \quad j = \overline{1, 3}. \quad (14)$$

Аналогично

$$\partial_{x_0} u_{j+1}^{(k)}\left(\frac{(k-1)l}{a}, 0\right) = -a \frac{dp^{(k)}}{dx_0}(-(k-1)l) + a \frac{dg^{(k)}}{dx_0}((k-1)l), \quad j = \overline{1, 3}. \quad (15)$$

Из равенства (13) следует, что производные (14), (15) равны между собой. По этой схеме проверяются условия (11) и все условия согласования (12) для $i = \overline{0, 2}$.

Искать решение задачи (1)–(4) будем с помощью метода характеристик [4]. Для этого мы сначала рассмотрим задачу в области $Q^{(k)}$ с начальными условиями

$$\begin{aligned} u^{(k)}\left(\frac{(k-1)l}{a}, x_1\right) &= \varphi^{(k)}(x_1), \\ \partial_{x_0} u^{(k)}\left(\frac{(k-1)l}{a}, x_1\right) &= \psi^{(k)}(x_1), \quad x_1 \in [0, l], \end{aligned} \quad (16)$$

интегральным условием (3) и граничным условием (4). Здесь $\varphi^{(k)}, \psi^{(k)}$ выражаются из решения в области $Q^{(k-1)}$ при $x_0 = \frac{(k-1)l}{a}$, причем $\varphi^{(1)} \equiv \varphi, \psi^{(1)} \equiv \psi$.

Задача Коши. В области $Q_1^{(k)}$ задаются начальные условия (16). С помощью данных условий строится система

$$\begin{cases} \varphi^{(k)}(x_1) = p_1^{(k)}(x_1 - (k-1)l) + g_1^{(k)}(x_1 + (k-1)l), \\ \psi^{(k)}(x_1) = -a \frac{dp_1^{(k)}}{dx_0}(x_1 - (k-1)l) + a \frac{dg_1^{(k)}}{dx_0}(x_1 + (k-1)l). \end{cases} \quad (17)$$

Из системы (17) функции $p_1^{(k)}$, $g_1^{(k)}$ определяются как

$$p_1^{(k)}(z) = \frac{1}{2} \varphi^{(k)}(z + (k-1)l) - \frac{1}{2a} \int_0^{z+(k-1)l} \psi^{(k)}(\xi) d\xi - \frac{1}{2} C, z \in [-(k-1)l, -(k-2)l], \quad (18)$$

$$g_1^{(k)}(z) = \frac{1}{2} \varphi^{(k)}(z - (k-1)l) + \frac{1}{2a} \int_0^{z-(k-1)l} \psi^{(k)}(\xi) d\xi + \frac{1}{2} C, z \in [(k-1)l, kl], \quad (19)$$

где C – произвольная константа.

Следовательно, решение в области $Q_1^{(k)}$ запишется в виде

$$\begin{aligned} u_1^{(k)}(\mathbf{x}) = & \frac{\varphi^{(k)}(x_1 - ax_0 + (k-1)l) + \varphi^{(k)}(x_1 + ax_0 - (k-1)l)}{2} + \\ & + \frac{1}{2a} \int_{x_1 - ax_0 + (k-1)l}^{x_1 + ax_0 - (k-1)l} \psi^{(k)}(\xi) d\xi + \frac{1}{2a} \int_{\frac{(k-1)l}{a}}^{x_0} \int_{x_1 - a(x_0 - \tau)}^{x_1 + a(x_0 - \tau)} f(\tau, \xi) d\xi d\tau. \end{aligned} \quad (20)$$

Функция $p_1^{(k)}$, определенная по формуле (18) в области $Q_1^{(k)}$, определена и в области $Q_3^{(k)}$, где имеет такой же вид. Функция $g_1^{(k)}$, определенная по формуле (19) в области $Q_1^{(k)}$, задана и в области $Q_2^{(k)}$, где также представима в виде (19).

Граничное условие на правой границе. Как показано в [4], решение задачи (1), (2), (4) в области $Q_3^{(k)}$ имеет вид

$$\begin{aligned} u_3^{(k)}(\mathbf{x}) = & \mu^{(l)} \left(\frac{x_1 + ax_0 - l}{a} \right) - \frac{\varphi^{(k)}((k+1)l - x_1 - ax_0) - \varphi^{(k)}(x_1 - ax_0 + (k-1)l)}{2} + \\ & + \frac{1}{2a} \int_{x_1 - ax_0 + (k-1)l}^{l - x_1 - ax_0 + kl} \psi^{(k)}(\xi) d\xi - \frac{1}{2a} \int_{\frac{(k-1)l}{a}}^{\frac{x_1 + ax_0 - l}{a}} \int_{2l - x_1 - ax_0 + a\tau}^{x_1 + ax_0 - a\tau} f(\tau, \xi) d\xi d\tau + \frac{1}{2a} \int_{\frac{(k-1)l}{a}}^{x_0} \int_{x_1 - a(x_0 - \tau)}^{x_1 + a(x_0 - \tau)} f(\tau, \xi) d\xi d\tau, \end{aligned} \quad (21)$$

а функция $g_3^{(k)}$ задается формулой

$$\begin{aligned} g_3^{(k)}(z) = & \mu^{(l)} \left(\frac{z - l}{a} \right) - \frac{1}{2} \varphi^{(k)}(l - z + kl) + \frac{1}{2a} \int_0^{l - z + kl} \psi^{(k)}(\xi) d\xi - \\ & - \frac{1}{2a} \int_{\frac{(k-1)l}{a}}^{\frac{z - l}{a}} \int_{2l - z + a\tau}^{z - a\tau} f(\tau, \xi) d\xi d\tau + \frac{1}{2} C, z \in [kl, (k+1)l]. \end{aligned} \quad (22)$$

Интегральное условие. Условие (3) представляет собой интегральный оператор второго рода. Подставив в него общее решение (5) в области $Q_2^{(k)}$, получим уравнение относительно неизвестной функции $p_2^{(k)}$:

$$\begin{aligned} p_2^{(k)}(-ax_0) + \int_0^l K(x_0, s) p^{(k)}(s - ax_0) ds = & \mu^{(0)}(x_0) - g^{(k)}(ax_0) - \\ & - \int_0^l K(x_0, s) g^{(k)}(s + ax_0) ds - \frac{1}{2a} \int_{\frac{(k-1)l}{a}}^{x_0} \int_{x_1 - a(x_0 - \tau)}^{x_1 + a(x_0 - \tau)} f(\tau, \xi) d\xi d\tau. \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь

$$\begin{aligned} p^{(k)}(z) &= \begin{cases} p_1^{(k)}(z), & z \in [-(k-1)l, -(k-2)l], \\ p_2^{(k)}(z), & z \in [-kl, -(k-1)l], \end{cases} \\ g^{(k)}(z) &= \begin{cases} g_1^{(k)}(z), & z \in [(k-1)l, kl], \\ g_3^{(k)}(z), & z \in [kl, (k+1)l]. \end{cases} \end{aligned} \quad (24)$$

В области $Q_2^{(k)}$ на отрезке $x_1 \in [0, l], \forall x_0 \in \left[\frac{(k-1)l}{a}, \frac{kl}{a}\right]$ определены две функции: $p_1^{(k)}$, которая известна, и $p_2^{(k)}$, которую требуется отыскать. Граница между двумя этими функциями проходит по характеристике $x_1 = -(k-1)l + ax_0$. Используя данный факт, уравнение (24) можно переписать как

$$\begin{aligned} p_2^{(k)}(-ax_0) + \int_0^{-(k-1)l+ax_0} K(x_0, s) p_2^{(k)}(s - ax_0) ds = \mu^{(0)}(x_0) - g^{(k)}(ax_0) - \\ - \int_0^l K(x_0, s) g^{(k)}(s + ax_0) ds - \int_{-(k-1)l+ax_0}^l K(x_0, s) p_1^{(k)}(s - ax_0) ds - \frac{1}{2a} \int_{\frac{(k-1)l}{a}}^{x_0} \int_{-a(x_0-\tau)}^{a(x_0-\tau)} f(\tau, \xi) d\xi d\tau. \end{aligned} \quad (25)$$

Введя замену $x_0 = -\frac{z}{a}$, получим уравнение

$$p_2^{(k)}(z) + \int_0^{-(k-1)l-z} K\left(-\frac{z}{a}, s\right) p_2^{(k)}(s + z) ds = M(z), \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned} M(z) &= \mu^{(0)}\left(-\frac{z}{a}\right) - g^{(k)}(-z) - \int_0^l K\left(-\frac{z}{a}, s\right) g^{(k)}(s - z) ds - \\ &- \int_{-(k-1)l-z}^l K\left(-\frac{z}{a}, s\right) p_1^{(k)}(s + z) ds - \frac{1}{2a} \int_{\frac{(k-1)l}{a}}^{\frac{z}{a}} \int_{-z-a\tau}^{z+a\tau} f(\tau, \xi) d\xi d\tau - \\ &- \frac{1}{2a} \int_0^{\frac{(k-1)l}{a}} \int_{\frac{z}{a}}^{\frac{s-a\tau-z}{a}} K\left(-\frac{z}{a}, s\right) f(\tau, \xi) d\xi d\tau ds. \end{aligned} \quad (27)$$

После замены переменной интегрирования $s = \tau - z$ получим интегральное уравнение Вольтерры второго рода для нахождения неизвестной функции $p_2^{(k)}$:

$$p_2^{(k)}(z) + \int_z^{-(k-1)l} K\left(-\frac{z}{a}, \tau - z\right) p_2^{(k)}(\tau) d\tau = M(z). \quad (28)$$

Решение данного уравнения существует в классе $C^2([-kl, -(k-1)l])$ и является единственным тогда, когда выполнены следующие условия гладкости функций: $M \in C^2([-kl, -(k-1)l])$, $K \in C^2\left(\left[\frac{(k-1)l}{a}, \frac{kl}{a}\right] \times [0, l]\right)$. Таким образом, решение в области $Q_2^{(k)}$ может быть найдено по формуле

$$u_2^{(k)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2a} \int_{\frac{(k-1)l}{a}}^{x_0} \int_{x_1-a(x_0-\tau)}^{x_1+a(x_0-\tau)} f(\tau, \xi) d\xi d\tau + p_2^{(k)}(x_1 - ax_0) + g_1^{(k)}(x_1 + ax_0). \quad (29)$$

В области $Q_4^{(k)}$ решение находится по формуле

$$u_4^{(k)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2a} \int_{\frac{(k-1)l}{a}}^{x_0} \int_{x_1-a(x_0-\tau)}^{x_1+a(x_0-\tau)} f(\tau, \xi) d\xi d\tau + p_2^{(k)}(x_1 - ax_0) + g_3^{(k)}(x_1 + ax_0). \quad (30)$$

Для того чтобы решение задачи, определяемое по формулам (29), (30), было единственным, требуется показать, что $p_2^{(k)}(z) = \tilde{p}_2^{(k)}(z) - \frac{C}{2}$, где $\tilde{p}_2^{(k)}(z)$ – функция из $C^2([-kl, -(k-1)l])$, которая не содержит произвольных констант C .

Заметим, что $M(z) = \tilde{M}(z) - \frac{C}{2} - \frac{C}{2} \int_z^{-(k-1)l} K\left(-\frac{z}{a}, \tau - z\right) d\tau$. Здесь $\tilde{M}(z)$ обозначает сумму слагаемых из (27), которые не содержат свободных констант. С учетом этого факта уравнение (28) можно переписать в виде

$$\tilde{p}_2^{(k)}(z) + \int_z^{-(k-1)l} K\left(-\frac{z}{a}, \tau - z\right) \tilde{p}_2^{(k)}(\tau) d\tau = \tilde{M}(z), \quad (31)$$

где $\tilde{p}_2^{(k)}(z) = p_2^{(k)}(z) + \frac{C}{2}$. Решение уравнения (31) существует и единственно в классе C^2 . Таким образом, решение уравнения (28) представимо в виде $p_2^{(k)} = \tilde{p}_2^{(k)}(z) - \frac{C}{2}$, где функция $\tilde{p}_2^{(k)}(z)$ не зависит от свободных констант.

Условия согласования. Для того чтобы решение задачи (20), (21), (29), (30) было из класса $C^2(\overline{Q^{(k)}})$, необходимо и достаточно, чтобы функции $p_1^{(k)}$, $p_2^{(k)}$ были согласованы в точке $z = -(k-1)l$ вместе со своими производными до второго порядка включительно, а функции $g_1^{(k)}$, $g_3^{(k)}$ – в точке $z = kl$ вместе со своими производными до второго порядка включительно. Обозначим $\frac{d^i}{dz^i} p_2^{(k)}(-(k-1)l) - \frac{d^i}{dz^i} p_1^{(k)}(-(k-1)l) = \delta_i^{(k)}$, $i = \overline{0, 2}$, и $\frac{d^i}{dz^i} g_3^{(k)}(kl) - \frac{d^i}{dz^i} g_1^{(k)}(kl) = \sigma_i^{(k)}$, $i = \overline{0, 2}$. Условия согласования функций $g_1^{(k)}$, $g_3^{(k)}$ и их производных рассмотрены в [4] и имеют вид

$$\begin{aligned} \mu^{(l)}\left(\frac{(k-1)l}{a}\right) - \varphi^{(k)}(l) &= \sigma_0^{(k)}, \\ \frac{1}{a} \left(d\mu^{(l)}\left(\frac{(k-1)l}{a}\right) - \psi^{(k)}(l) \right) &= \sigma_1^{(k)}, \\ \frac{1}{a^2} d^2\mu^{(l)}\left(\frac{(k-1)l}{a}\right) - d^2\varphi^{(k)}(l) - \frac{1}{a^2} f\left(\frac{(k-1)l}{a}, l\right) &= \sigma_2^{(k)}. \end{aligned} \quad (32)$$

Далее находим условия согласования для функций $p_1^{(k)}$, $p_2^{(k)}$ и их производных.

Из уравнения (28) выражаем функцию $p_2^{(k)}$ как

$$p_2^{(k)}(z) = - \int_z^{-(k-1)l} K\left(-\frac{z}{a}, \tau - z\right) p_2^{(k)}(\tau) d\tau + M(z). \quad (33)$$

Приравняв (18) и (33) в точке $z = -(k-1)l$, получаем условие согласования функций $p_1^{(k)}$, $p_2^{(k)}$:

$$\mu^{(0)}\left(\frac{(k-1)l}{a}\right) - \varphi^{(k)}(0) - \int_0^l K\left(\frac{(k-1)l}{a}, s\right) \varphi^{(k)}(s) ds = \delta_0^{(k)}. \quad (34)$$

Условие согласования функций $dp_1^{(k)}$, $dp_2^{(k)}$ имеет вид

$$-\frac{1}{a}d\mu^{(0)}\left(\frac{(k-1)l}{a}\right)+K\left(\frac{(k-1)l}{a},0\right)\delta_0^{(k)}+\frac{1}{a}\psi^{(k)}(0)-$$

$$-\int_0^l\frac{\partial}{\partial x_0}K\left(\frac{(k-1)l}{a},s\right)\varphi^{(k)}(s)ds-\frac{1}{a}\int_0^lK\left(\frac{(k-1)l}{a},s\right)\psi^{(k)}(s)ds=\delta_1^{(k)}. \quad (35)$$

Условие согласования на функции $d^2p_1^{(k)}$ и $d^2p_2^{(k)}$ в точке $z=-(k-1)l$ представляется следующим образом:

$$K\left(\frac{(k-1)l}{a},0\right)\delta_1^{(k)}-\frac{2}{a}\frac{\partial}{\partial x_0}K\left(\frac{(k-1)l}{a},0\right)\delta_0^{(k)}-\frac{1}{a^2}f\left(\frac{(k-1)l}{a},0\right)+$$

$$+\frac{1}{a^2}d^2\mu^{(0)}\left(\frac{(k-1)l}{a}\right)-\frac{1}{a^2}\int_0^l\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}K\left(\frac{(k-1)l}{a},s\right)\varphi^{(k)}(s)ds-d^2\varphi^{(k)}(0)-$$

$$-\frac{2}{a^2}\int_0^l\frac{\partial}{\partial x_0}K\left(\frac{(k-1)l}{a},s\right)\psi^{(k)}(s)ds-\int_0^lK\left(\frac{(k-1)l}{a},s\right)d^2\varphi^{(k)}(s)ds-$$

$$-\frac{1}{a^2}\int_0^lK\left(\frac{(k-1)l}{a},s\right)f\left(\frac{(k-1)l}{a},s\right)ds=\delta_2^{(k)}. \quad (36)$$

Лемма 4. Пусть известные функции удовлетворяют условиям: $\varphi^{(k)}(x_1) \in C^2([0, l])$; $\psi^{(k)}(x_1) \in C^1([0, l])$; $\mu^{(0)}, \mu^{(l)} \in C^2\left(\left[\frac{(k-1)l}{a}, \frac{kl}{a}\right]\right)$; $K \in C^2\left(\left[\frac{(k-1)l}{a}, \frac{kl}{a}\right] \times [0, l]\right)$; $f \in C^{0,1}\left(\left[\frac{(k-1)l}{a}, \frac{kl}{a}\right] \times [0, l]\right)$.

Единственное решение задачи (1), (16), (3), (4) $u^{(k)}(\mathbf{x}) \in C^2(\overline{Q^{(k)}})$ существует тогда и только тогда, когда выполняются однородные условия согласования (33)–(36), т. е. при $\sigma_i^{(k)} \equiv 0, \delta_i^{(k)} \equiv 0, i = 0, 2$.

Классическое решение в области $\overline{Q}$. Далее рассматривается вопрос существования классического решения задачи (1)–(4) во всей области $\overline{Q} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{Q^{(k)}}$.

Лемма 5. Пусть для задачи (1)–(4) $u^{(k)}$ – решение в области $Q^{(k)}$, $u^{(k-1)}$ – решение в области $Q^{(k-1)}$, и в каждой из этих областей выполняются условия леммы 4. Тогда при определении функций

$$\varphi^{(k)}(x_1) = u_4^{(k-1)}\left(\frac{(k-1)l}{a}, x_1\right) = g_3^{(k-1)}(x_1) + p_2^{(k-1)}(x_1) + \frac{1}{2a} \int_{\frac{(k-2)l}{a}}^{\frac{(k-1)l}{a}} \int_{x_1 - a\tau - (k-1)l}^{x_1 - a\tau + (k-1)l} f(\tau, \xi) d\xi d\tau,$$

$$\psi^{(k)}(x_1) = \partial_{x_0} u_4^{(k-1)}\left(\frac{(k-1)l}{a}, x_1\right) = -a \frac{d}{dx_1} g_3^{(k-1)}(x_1) + a \frac{d}{dx_1} p_2^{(k-1)}(x_1) +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{\frac{(k-2)l}{a}}^{\frac{(k-1)l}{a}} f(\tau, x_1 - a\tau - (k-1)l) + f(\tau, x_1 - a\tau + (k-1)l) d\tau, \quad (37)$$

где $u_4^{(k-1)}$ определена как (30), $g_3^{(k-1)}$ – в виде (22), $p_2^{(k-1)}$ – по формуле (33), функция

$$u^{(k,k-1)}(x) = \begin{cases} u^{(k)}(x), & x \in Q^{(k)}, \\ u^{(k-1)}(x), & x \in Q^{(k-1)} \end{cases} \quad (38)$$

будет дважды непрерывно дифференцируема на множестве $\overline{Q^{(k-1)}} \cup \overline{Q^{(k)}}$.

Для доказательства леммы 5 достаточно показать, что значения функций $u^{(k)}(\mathbf{x})$ и $u^{(k-1)}(\mathbf{x})$, а также их производных до второго порядка включительно совпадают при $\mathbf{x} = \left(\frac{(k-1)l}{a}, x_1 \right)$. Данное утверждение очевидно верно для самих функций и их производных по переменной x_0 . Для первой производной функций $u^{(k)}(\mathbf{x})$ и $u^{(k-1)}(\mathbf{x})$ по переменной x_1 , а также вторых производных достаточно приравнять их значения при $\mathbf{x} = \left(\frac{(k-1)l}{a}, x_1 \right)$.

Следствие. Условия согласования для функций $p_1^{(k)}, p_2^{(k)}$, а также для $g_1^{(k)}, g_3^{(k)}$ и их производных до второго порядка включительно выполняются тогда и только тогда, когда выполняются условия согласования для функций $p_1^{(k-1)}$ и $p_2^{(k-1)}, g_1^{(k-1)}$ и $g_3^{(k-1)}$ и их производных до второго порядка включительно соответственно. Причем $\delta_i^{(k)} = -\sigma_i^{(k-1)}, \sigma_i^{(k)} = -\delta_i^{(k-1)}, i = \overline{0, 2}, k = 2, 3, \dots$.

Для доказательства данного следствия достаточно воспользоваться представлением в области $Q^{(k)}$ начальных функций по формулам (37) и подставить их в условия согласования (33)–(36). После упрощения полученных выражений имеем в точности условия согласования для функций в области $Q^{(k-1)}$.

Таким образом, доказана

Теорема. Пусть $\mu^{(0)}, \mu^{(l)} \in C^2([0, +\infty))$, $\varphi \in C^2([0, l])$, $\psi \in C^1([0, l])$, $K \in C^2(\overline{Q})$, $f \in C^{0,1}(\overline{Q})$. Для задачи (1)–(4) существует единственное классическое решение из класса $C^2(\overline{Q})$ тогда и только тогда, когда для функций $\mu^{(0)}, \mu^{(l)}, \varphi, \psi$ выполняются однородные условия согласования (33)–(36) при $k = 1$, а именно:

$$\mu^{(l)}(0) - \varphi(l) = 0, \quad d\mu^{(l)}(0) - \psi(l) = 0, \quad \frac{1}{a^2} d^2 \mu^{(l)}(0) - d^2 \varphi(l) - \frac{1}{a^2} f(0, l) = 0, \quad (39)$$

$$\mu^{(0)}(0) - \varphi(0) - \int_0^l K(0, s) \varphi(s) ds = 0, \quad (40)$$

$$-\frac{1}{a} d\mu^{(0)}(0) + \frac{1}{a} \psi(0) - \int_0^l \frac{\partial}{\partial x_0} K(0, s) \varphi(s) ds - \frac{1}{a} \int_0^l K(0, s) \psi(s) ds = 0, \quad (41)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a^2} d^2 \mu^{(0)}(0) - \frac{1}{a^2} \int_0^l \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} K(0, s) \varphi(s) ds - d^2 \varphi(0) - \frac{1}{a^2} f(0, 0) - \\ & - \frac{2}{a^2} \int_0^l \frac{\partial}{\partial x_0} K(0, s) \psi(s) ds - \int_0^l K(0, s) d^2 \varphi(s) ds - \frac{1}{a^2} \int_0^l K(0, s) f(0, s) ds = 0, \end{aligned} \quad (42)$$

и оно может быть найдено по формулам (20), (21), (29), (30).

Заключение. В данной статье с помощью метода характеристик выведены необходимые и достаточные условия существования единственного решения задачи (1)–(4) в классе $C^2(\overline{Q})$ при заданных условиях гладкости на исходные функции. Получены аналитические формулы для поиска решения, а также построено эквивалентное интегральное уравнение второго рода с переменными верхними пределами для решения в подобластях. Доказано, что выполнение условий согласования (33)–(36) эквивалентно гладкости решения задачи (1)–(4) при условии гладкости исходных функций.

Список использованных источников

1. Дмитриев, В. Б. Нелокальная задача с интегральными условиями для волнового уравнения / В. Б. Дмитриев // Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. – 2006. – № 2 (42). С. 15–26.
2. Пулькина, Л. С. Нелокальная задача с интегральными условиями для гиперболического уравнения в характеристическом прямоугольнике / Л. С. Пулькина, О. М. Кечина // Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. – 2005. – № 2 (36). – С. 1–9.

3. Корзюк, В. И. Решение задачи Коши гиперболического уравнения для однородного дифференциального оператора в случае двух независимых переменных / В. И. Корзюк, И. С. Козловская // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2011. – Т. 55, № 5. – С. 9–13.
4. Корзюк, В. И. Классическое решение первой смешанной задачи для уравнения Клейна – Гордона – Фока в полуполосе / В. И. Корзюк, И. И. Столярчук // Дифференц. уравнения. – 2014. – Т. 50, № 8. – С. 1108–1117.
5. Корзюк, В. И. Классическое решение первой смешанной задачи для уравнения Клейна – Гордона – Фока в криволинейной полуполосе / В. И. Корзюк, И. И. Столярчук // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2014. – Т. 58, № 3. – С. 9–15.
6. Березанский, Ю. М. Функциональный анализ / Ю. М. Березанский, Г. Ф. Ус, З. Г. Шефтель. – Киев: Высш. шк., 1990. – 600 с.
7. Корзюк, В. И. Уравнения математической физики / В. И. Корзюк. – Минск: БГУ, 2008. – 433 с.

References

1. Dmitriev V.B. Non-local problem with the integral conditions for the wave equation. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya* [Vestnik of the Samara State University. Natural Science Series], 2006, no. 2 (42), pp. 15–26. (In Russian).
2. Pul'kina L.S., Kechina O.M. Non-local problem with the integral conditions for the hyperbolic equation on the characteristic rectangle. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya* [Vestnik of the Samara State University. Natural Science Series], 2005, no. 2 (36), pp. 1–9. (In Russian).
3. Korzyuk V.I., Kozlovskaya I.S. Solving the Cauchy problem of the hyperbolic equation for a homogeneous differential operator in the case of two independent variables. *Doklady Natsionalnoi Akademii Nauk Belarusi* [Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus], 2011, vol. 55, no. 5, pp. 9–13. (In Russian).
4. Korzyuk V.I., Stolyarchuk I.I. Classical solution of the first mixed problem for the Klein-Gordon-Fock equation in a half-strip. *Differential Equations*, 2014, vol. 50, no. 8, pp. 1098–1111. Doi: 10.1134/s0012266114080084
5. Korzyuk V.I., Stolyarchuk I.I. Classical solution of the first mixed problem for the Klein-Gordon-Fock equation in the curvilinear half-strip. *Doklady Natsionalnoi Akademii Nauk Belarusi* [Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus], 2014, vol. 58, no. 3, pp. 9–15. (In Russian).
6. Berezanskii Yu.M., Us G.F., Sheftel' Z.G. *Functional Analysis*. Kiev, Vysshaya shkola Publ., 1990. 600 p. (In Russian).
7. Korzyuk V.I. *Equations of Mathematical Physics*. Minsk, Belarusian State University, 2008. 433 p. (In Russian).

Информация об авторе

Столярчук Иван Игоревич – магистр физико-математических наук, аспирант кафедры математической кибернетики механико-математического факультета, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: ivan.telkontar@gmail.com

Information about the author

Stolyarchuk Ivan Igorevich – Master of Physics and Mathematics, Postgraduate of the Mathematical Cybernetics Department, Faculty of Mechanics and Mathematics of the Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: ivan.telkontar@gmail.com

Для цитирования

Столярчук, И. И. Решение смешанных задач методом характеристик для волнового уравнения с интегральным условием / И. И. Столярчук // Вест. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2017. – № 1. – С. 53–62.

For citation

Stolyarchuk I.I. Solution of the mixed problems by the method of characteristics for the wave equation with the integral condition. *Vesti Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seriya fizika-matematychnykh navuk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series], 2017, no. 1, pp. 53–62. (In Russian).