ISSN 0002-3574 (print)
УДК 519.872 09/09/2016

Поступила в редакцию 09.09.2016
Received 09.09.2016

Д. Я. Копать, М. А. Маталыцкий

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь

О НЕСТАЦИОНАРНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОСТОЯНИЙ МАРКОВСКОЙ СЕТИ С БЕСКОНЕЧНОЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ ОБСЛУЖИВАНИЯ В УСЛОВИЯХ ВЫСОКОЙ НАГРУЗКИ

В настоящей статье объектом исследования является марковская сеть с бесконечнолинейными системами массового обслуживания (СМО). Дисциплины обслуживания заявок в системах – FIFO («первым пришел – первым обслуживается») и время обслуживания заявок в каждой линии СМО сети распределены по экспоненциальному закону со своими параметрами для каждой системы массового обслуживания. Целью исследования является получение достаточного условия представимости нестационарных вероятностей состояний такой сети, функционирующей в условиях высокой нагрузки, в мультипликативном виде. Во введении указана область прикладного применения марковских сетей с бесконечнолинейными системами обслуживания, обоснована актуальность настоящей работы, приведен краткий обзор результатов, полученных по данной тематике ранее. В основной части приведено описание сети, выведена система разностно-дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей состояний сети. Представлен основной результат данной статьи, т. е. мультипликативный вид нестационарных вероятностей состояний описанной выше марковской сети, функционирующий в условиях высокой нагрузки, который сформулирован и доказан в виде теоремы. Полученные результаты могут быть использованы при моделировании поведения информационно-компьютерных систем и сетей, логистических транспортных систем, страховых компаний, банковских сетей и других объектов, стохастическими моделями которых являются сети массового обслуживания.

Ключевые слова: марковская сеть, бесконечнолинейные системы обслуживания, условие высокой нагрузки, нестационарный режим, мультипликативный вид.

D. J. Kopats, M. A. Matalytski

Yanka Kupala State University of Grodno, Grodno, Belarus

NON-STATIONARY DISTRIBUTION OF THE PROBABILITY STATES OF THE MARKOV NETWORK WITH INFINITE-SERVER QUEUING SYSTEMS OPERATING AT HIGH LOAD

The object of research is the Markov queuing network with infinite-server queues. The disciplines of the customer's service in queuing systems (QS) are FIFO (first come – first served), service rates of customers are distributed exponentially with their own rates for each QS in each line of QS. The purpose of the research is to obtain sufficient conditions for representability of non-stationary state probabilities of such a network operating within the heavy-traffic regime in the multiplicative form. In the introduction, the field of applications of Markov networks with infinite-server queues has been described; the relevance of this work has also been indicated; a brief overview of the previous results on this subject has been given. In the main part, the network has been shown; the system of Kolmogorov's difference-differential equations for the state probabilities of the network conditions has been derived. The main result of this article is as follows, i.e. the multiplicative form of the non-stationary state probabilities of the above-mentioned Markov network operating within the heavy-traffic regime is formulated and proved as a theorem. The obtained results can be used for modeling the behavior of information and computer systems and networks, transportation systems, insurance companies, banking networks and other facilities, the stochastic models which are the queuing networks.

Keywords: Markov networks, infinitely linear service system, high-load condition, non-stationary regime, multiplicative form.

Введение. При проектировании различных реальных объектов, таких как информационно-компьютерные системы и сети, логистические транспортные системы, страховые компании, банковские сети, производственные системы и т. д., часто необходимо промоделировать их текущее поведение, найти различные характеристики, зависящие от времени. В таких случаях важной задачей является нахождение вероятностей состояний их моделей – марковских и произвольных сетей массового обслуживания с различными особенностями в переходном (нестационарном) режиме [1–4]. Опыт выполненных за последние годы исследований показал, что такие задачи в своем большинстве являются принципиально трудноразрешимыми.

Точные результаты в переходном режиме для вероятностей состояний марковских сетей получены только в некоторых частных случаях [5] из-за большой размерности систем разностно-дифференциальных уравнений (РДУ), которым они удовлетворяют. Для их нахождения в условиях большой нагрузки применяется метод диффузионной аппроксимации [6–9], сущность которого состоит в аппроксимации дискретного случайного процесса, описывающего количество заявок в системах сети, непрерывным диффузионным процессом. В [10–12] для нахождения нестационарных вероятностей состояний марковских сетей с разнотипными заявками, дисциплинами обслуживания заявок FIFO в многолинейных системах массового обслуживания (СМО) разработан метод последовательных приближений, совмещенный с методом рядов. Монографии [13, 14] посвящены анализу марковских сетей, функционирующих в условиях высокой нагрузки, когда в каждый момент времени в СМО сети находится хотя бы одна заявка. Именно в такой ситуации систему РДУ для нестационарных вероятностей состояний можно решить методом, основанным на использовании аппарата многомерных производящих функций, и получить решение в виде многократных рядов.

1. Описание сети. Рассмотрим открытую сеть, состоящую из n систем массового обслуживания. На вход сети поступает пуассоновский поток заявок с интенсивностью λ. Заявка с вероятностью p_{0i} поступает на обслуживание в i-ю СМО, $\sum_{i=1}^{n} p_{0i} = 1.$ Длительность обслуживания в i-й СМО является случайной величиной (СВ), имеющей экспоненциальное распределение с параметром, зависящим от числа заявок в ней. Если в момент времени t в i-й СМО имеется k_i заявок, то в интервале $[t, t+\Delta t)$, где Δt мало, обслуживание одной заявки закончится с вероятностью $\mu_i(k_i)\Delta t + o(\Delta t)$. Далее эта заявка мгновенно поступает на обслуживание в j-ю СМО с вероятностью p_{ij} или с вероятностью p_{i0} покидает сеть, $\sum_{j=0}^{n} p_{ij} = 1,\ i=\overline{1,n}$. Дисциплинами обслуживания заявок являются FIFO. Матрица $P = \|p_{ij}\|_{n\times n}$ неразложима. Введем случайный процесс $k(t) = (k_1(t), k_2(t), ..., k_n(t))$, где $k_i(t)$ – число заявок в i-й СМО в момент времени $t, i=\overline{1,n}$. Он описывает состояние сети и является цепью Маркова со счетным числом состояний. Требуется определить нестационарное распределение вероятностей состояний такой сети $P(k,t) = P(k_1, k_2, ..., k_n, t) = = P\{k_1(t) = k_1, k_2(t) = k_2, ..., k_n(t) = k_n\}$.

2. Основной результат. Пусть I_i – вектор размерности n с нулевыми компонентами за исключением компоненты с номером i, которая равна 1, $u(x) = \begin{cases} 1, x>0 \\ 0, x\le 0 \end{cases}$ – функция Хевисайда.

Л е м м а. *Система РДУ для вероятностей состояний сети имеет вид*

$$\frac{dP(k,t)}{dt} = -\left(\lambda + \sum_{i=1}^{n} \mu_i(k_i)u(k_i)\right)P(k,t) + \lambda\sum_{i=1}^{n} p_{0i}u(k_i)P(k-I_i,t) + \sum_{i=1}^{n}\mu_i(k_i+1)p_{i0}P(k+I_i,t) +$$
$$+\sum_{i,j=1}^{n}\mu_i(k_i+1)p_{ij}u(k_j)P(k+I_i-I_j,t). \tag{1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для цепи Маркова $k(t)$ возможны следующие переходы в состояние $k(t+\Delta t) = (k, t+\Delta t)$ за время Δt:

– из состояния $(k-I_i, t)$ с вероятностью $\lambda p_{0i}u(k_i)\Delta t + o(\Delta t)$, при этом заявка поступает извне в систему $S_i, i=\overline{1,n}$;

– из состояния $(k+I_i,t)$ с вероятностью $\mu_i(k_i+1)p_{i0}\Delta t+o(\Delta t)$, при этом заявка завершает обслуживание в системе S_i и уходит из сети $i=\overline{1,n}$;

– из состояния $(k+I_i-I_j,t)$ с вероятностью $\mu_i(k_i+1)p_{ij}u(k_j)\Delta t+o(\Delta t)$, если заявка завершает обслуживание в системе S_i и переходит в систему $S_j, i, j=\overline{1,n}$;

– из состояния (k,t) с вероятностью $1-\left(\lambda+\sum_{i=1}^{n}\mu_i(k_i)u(k_i)\right)\Delta t+o(\Delta t)$, при этом ни поступления заявок, ни завершения обслуживания не происходит, сеть остается в состоянии k.

Тогда, используя формулу полной вероятности, имеем

$$P(k,t+\Delta t)=\left[1-\left(\lambda+\sum_{i=1}^{n}\mu_i(k_i)u(k_i)\right)\Delta t\right]P(k,t)+\lambda\sum_{i=1}^{n}p_{0i}u(k_i)P(k-I_i,t)\Delta t+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\mu_i(k_i+1)p_{i0}P(k+I_i,t)\Delta t+\sum_{i,j=1}^{n}\mu_i(k_i+1)p_{ij}u(k_j)P(k+I_i-I_j,t)\Delta t+o(\Delta t).$$

Отсюда, переходя к пределу при $\Delta t\to 0$, получим систему разностно-дифференциальных уравнений Колмогорова (1) для вероятностей состояний.

Далее мы предположим, что СМО сети функционируют в условиях высокой нагрузки, т. е. $k_i(t)>0\ \forall t,\ i=\overline{1,n}$, тогда система РДУ (1) примет вид

$$\frac{dP(k,t)}{dt}=-\left(\lambda+\sum_{i=1}^{n}\mu_i(k_i)\right)P(k,t)+\lambda\sum_{i=1}^{n}p_{0i}P(k-I_i,t)+\sum_{i=1}^{n}\mu_i(k_i+1)p_{i0}P(k+I_i,t)+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}\mu_i(k_i+1)p_{ij}P(k+I_i-I_j,t). \tag{2}$$

В монографии [12] приведено описание нахождения в частном случае точного нестационарного распределения вероятностей состояний в аналитическом виде путем решения системы РДУ (2). Однако при этом не было учтено, что система (2) справедлива только для сети, функционирующей в условиях высокой нагрузки. Этот частный случай касается ситуации, когда в качестве начальных условий используется произведение стационарных вероятностей состояний СМО сети, каждое из которых является законом Пуассона, и системы массового обслуживания сети должны быть бесконечнолинейными. Таким образом, в данной работе описаны аналогичные результаты, а именно, приведено достаточное условие представимости в этом частном случае вероятностей состояний $P(k,t)$ в мультипликативном виде, когда сеть функционирует в условиях высокой нагрузки. Проведено уточнение мультипликативного вида для вероятностей состояний. Докажем следующую теорему.

Теорема. *Для того чтобы нестационарное распределение вероятностей состояний* $P(k,t)$, *удовлетворяющее системе РДУ* (2), *представлялось в виде*

$$P(k,t)=\prod_{i=1}^{n}\frac{(\lambda y_i(t))^{k_i}}{\mu_i^{k_i}k_i!}u(k_i)e^{-\frac{\lambda}{\mu_i}y_i(t)}, \tag{3}$$

достаточно, чтобы

1) $$\mu_i(k_i)=\mu_i k_i,\ k=1,2,...,\ \mu_i=\mu_i(1),\ i=\overline{1,n}; \tag{4}$$

2) *начальное распределение имело вид*

$$P(k,0)=\prod_{i=1}^{n}\frac{(\lambda y_i(0))^{k_i}}{\mu_i^{k_i}k_i!}e^{-\frac{\lambda}{\mu_i}y_i(0)},\ k_i\geq 1,\ i=\overline{1,n}; \tag{5}$$

3) *функции* $y_i(t), i=\overline{1,n},$ *удовлетворяли системе линейных дифференциальных уравнений*

$$y_i'(t)=\mu_i\left(\sum_{j=1}^{n}p_{ji}y_j(t)-y_i(t)+p_{0i}\right),\ i=\overline{1,n}, \tag{6}$$

с начальными условиями $y_i(0),\ i=\overline{1,n}.$

З а м е ч а н и е 1. В соотношении (3) присутствие сомножителя $u(k_i)$ нужно для того, чтобы выполнялось условие $P(k,t)=0$, если в векторе существует компонента с номером i, для которой $k_i=0$, как это предполагается в условиях высокой нагрузки.

З а м е ч а н и е 2. Условие (4) фактически означает, что СМО сети должны быть бесконечно-линейными.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы. Будем искать решение системы РДУ (2) в виде

$$P(k,t)=\prod_{i=1}^{n}\frac{(\lambda y_i(t))^{k_i}u(k_i)}{\prod_{l=1}^{k_i}\mu_i(l)}Q(t)=Q(t)\frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n}k_i}}{\prod_{i=1}^{n}\prod_{l=1}^{k_i}\mu_i(l)}\prod_{i=1}^{n}y_i(t)^{k_i}u(k_i), \tag{7}$$

где

$$Q(t)=\prod_{i=1}^{n}e^{-\frac{\lambda}{\mu_i}y_i(t)}. \tag{8}$$

Из (7) следует, что

$$P(k-I_i,t)=P(k,t)\frac{\mu_i(k_i)}{\lambda y_i(t)},\ P(k+I_i,t)=P(k,t)\frac{\lambda y_i(t)}{\mu_i(k_i+1)},$$

$$P(k+I_i-I_j,t)=P(k,t)\frac{\mu_j(k_j)y_i(t)}{\mu_i(k_i+1)y_j(t)},\ i,j=\overline{1,n}. \tag{9}$$

Кроме того,

$$\frac{dP(k,t)}{dt}=Q'(t)\prod_{i=1}^{n}\frac{(\lambda y_i(t))^{k_i}u(k_i)}{\prod_{l=1}^{k_i}\mu_i(l)}+Q(t)\frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n}k_i}}{\prod_{i=1}^{n}\prod_{l=1}^{k_i}\mu_i(l)}\sum_{i=1}^{n}k_i(y_i(t))^{k_i-1}y_i'(t)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}y_j^{k_j}(t)=$$

$$=\frac{Q'(t)}{Q(t)}P(k,t)+\sum_{i=1}^{n}k_i\frac{y_i'(t)}{y_i(t)}P(k,t). \tag{10}$$

Тогда, подставив выражения (9), (10) в систему РДУ (2) и поделив на $P(k,t)$, получим

$$\frac{Q'(t)}{Q(t)}+\sum_{i=1}^{n}k_i\frac{y_i'(t)}{y_i(t)}=-\left(\lambda+\sum_{i=1}^{n}\mu_i(k_i)\right)+\sum_{i=1}^{n}p_{0i}\frac{\mu_i(k_i+1)}{y_i(t)}+$$

$$+\lambda\sum_{i=1}^{n}y_i(t)p_{i0}+\sum_{i,j=1}^{n}p_{ij}\frac{\mu_j(k_j)y_i(t)}{y_j(t)}. \tag{11}$$

Используя условие $\sum_{i-1}^{n}p_{0i}=1$ и поменяв местами индексы суммирования в двойной сумме, будем иметь:

$$\frac{Q'(t)}{Q(t)}+\lambda\left(\sum_{i=1}^{n}p_{0i}-p_{i0}y_i(t)\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\mu_i k_i}{y_i(t)}\left[\sum_{j=1}^{n}p_{ji}y_j(t)-y_i(t)+p_{0i}-\frac{y_i'(t)}{\mu_i}\right]. \tag{12}$$

Если выполнена система дифференциальных уравнений (6), то правая часть в (12) равна нулю. Покажем, что и левая часть в (12) также будет равна нулю. Подставляя выражение (8) в левую часть (12) и используя соотношения

$$\left(\prod_{i=1}^{n} a_i(t)\right)' = \sum_{i=1}^{n} a_i'(t) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} a_j(t), \quad \frac{\left(\prod_{i=1}^{n} a_i(t)\right)'}{\prod_{i=1}^{n} a_i(t)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i'(t)}{a_i(t)},$$

имеем в левой части (12):

$$\frac{Q'(t)}{Q(t)} + \lambda\left(1 - \sum_{i=1}^{n} p_{i0} y_i(t)\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{-\frac{\lambda}{\mu_i} y_i'(t) e^{-\frac{\lambda}{\mu_i} y_i(t)}}{e^{-\frac{\lambda}{\mu_i} y_i(t)}} + \lambda\left(1 - \sum_{i=1}^{n} p_{i0} y_i(t)\right) =$$

$$= -\lambda \sum_{i=1}^{n} -\frac{y_i'(t)}{\mu_i} + \lambda - \lambda \sum_{i=1}^{n} p_{i0} y_i(t),$$

и нам надо показать, что выполняется равенство

$$-\sum_{i=1}^{n} -\frac{y_i'(t)}{\mu_i} + 1 - \sum_{i=1}^{n} p_{i0} y_i(t) = 0. \tag{13}$$

Деля систему дифференциальных уравнений (6) на μ_i и суммируя от 1 до n, получим

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i'(t)}{\mu_i} = \sum_{i,j=1}^{n} p_{ji} y_j(t) - \sum_{i=1}^{n} y_i(t) + 1 = 1 + \sum_{j=1}^{n} y_j(t) \sum_{i=1}^{n} p_{ji} - \sum_{i=1}^{n} y_i(t) =$$

$$= 1 + \sum_{j=1}^{n} y_j(t)(1 - p_{j0}) - \sum_{i=1}^{n} y_i(t) = 1 - \sum_{j=1}^{n} p_{j0} y_j(t),$$

т. е. (13) имеет место, что и требовалось доказать. Теорема доказана.

Отметим, что метод решения системы дифференциальных уравнений (6) описан в [12].

Выводы. В статье получено достаточное условие представимости нестационарных вероятностей состояний марковской сети массового обслуживания, функционирующей в условиях высокой нагрузки, в мультипликативном виде. При этом системы массового обслуживания сети должны быть бесконечнолинейными, а начальные вероятности состояний являться произведением стационарных распределений вероятностей состояний СМО сети, каждое из которых является законом Пуассона.

Дальнейшие исследования могут быть связаны с получением аналогичных результатов для сетей с другими особенностями: ограниченным временем ожидания заявок в СМО, ненадежными СМО, с положительными и отрицательными заявками и т. д.

Список использованных источников

1. Вишневский, В. М. Теоретические основы проектирования компьютерных сетей / В. М. Вишневский. – М.: Техносфера, 2003. – 506 с.

2. Маталыцкий, М. А. Системы и сети массового обслуживания: анализ и применения / М. А. Маталыцкий, О. М. Тихоненко, Е. В. Колузаева. – Гродно: ГрГУ, 2011. – 817 с.

3. Маталыцкий, М. А. Сетевые вероятности модели обработки заявок клиентов в страховой компании / М. А. Маталыцкий, Т. В. Русилко. – Берлин: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2012. – 327 с.

4. Маталыцкий, М. А. Математический анализ НМ-сетей и их применения в транспортной логистике / М. А. Маталыцкий, О. М. Китурко. – Гродно: ГрГУ, 2015. – 231 с.

5. Kelly, F. P. Stochastic Networks. The IMA Volumes in Mathematics and its Applications / F. P. Kelly, R. J. Williams. – N.Y.: Springer-Verlag, 1995. – 170 p.

6. Лебедев, Е. А. Диффузионная аппроксимация немарковских сетей обслуживания в переходном режиме / Е. А. Лебедев, А. А. Чечельницкий // Аналитические методы исследования стохастических систем. – Киев: КГУ, 1989. – С. 61–66.

7. Медведев, Г. А. Замкнутые системы массового обслуживания и их оптимизация / Г. А. Медведев // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. – 1978. – № 6. – С. 199–203.

8. Gelenbe, E. Probabilistic models of computer systems. Diffusion approximation waiting times and batch arrivals / E. Gelenbe // Acta Inform. – 1979. – Vol. 12. – P. 285–303.

9. Kobayashi, H. Application of the diffusion approximation to queueing networks I: Equilibrium queue distributions / H. Kobayashi // J. ACM. – 1974. – Vol. 21, № 2. – P. 316–328; Kobayashi H. Application of the diffusion approximation to queueing networks II: Nonequilibrium distributions and applications to computer modeling / H. Kobayashi // J. ACM. – 1974. – Vol. 21, № 3. – P. 456–469.

10. Маталыцкий, М. А. Метод нахождения нестационарных вероятностей состояний марковских сетей массового обслуживания / М. А. Маталыцкий // Проблемы передачи информации. – 1994. – Т. 30, вып. 2. – С. 104–107.

11. Маталыцкий, М. А. Исследование сетей с многолинейными системами обслуживания и разнотипными заявками / М. А. Маталыцкий // Автоматика и телемеханика. – 1996. – № 9. – С. 79–92.

12. Ивницкий, В. А. Теория сетей массового обслуживания / В. А. Ивницкий. – М.: Физматлит, 2004. – 772 с.

13. Маталыцкий, М. А. Стохастические сети с ограниченным временем ожидания заявок и ненадежным обслуживанием: монография / М. А. Маталыцкий, С. Э. Статкевич. – Гродно: ГрГУ, 2014. – 248 с.

14. Маталыцкий, М. А. Стохастические сети с нестационарными перемещениями заявок / М. А. Маталыцкий, В. В. Науменко. – Гродно: ГрГУ, 2016. – 348 с.

References

1. Vishnevskii V.M. *Theoretical Bases of Designing Computer Networks*. Moscow, Technosphere Publ., 2003. 506 p. (In Russian).

2. Matalytskii M.A., Tikhonenko O.M., Koluzaeva E.V. *Systems and Queueing Network Analysis and Application*. Grodno, Grodno State University, 2011. 817 p. (In Russian).

3. Matalytskii M.A., Rusilko T.V. *Network Probabilistic Models of Processing Customer Requests in an Insurance Company*. Berlin: LAP LAMBERT Academic Publ., 2012. 327 p. (In Russian).

4. Matalytskii M.A., Kiturko O.M. *Mathematical Analysis of HM-networks and their Application in the Transport Logistics*. Grodno, Grodno State University, 2015. 231 p. (In Russian).

5. Kelly F.P., Williams R.J. *Stochastic Networks. The IMA Volumes in Mathematics and its Applications*. N.Y., Springer-Verlag, 1995. 170 p.

6. Lebedev E.A., Chechelnitskii A.A. Diffusion Approximation of non-Markov Queueing Networks in the Transition Regime. *Analiticheskie metody issledovaniya stokhasticheskikh sistem* [Analytical Methods for Studying Stochastic Systems]. Kiev, Kiev State University, 1989, pp. 61–66. (In Russian).

7. Medvedev G.A. Closed queueing systems and their optimization. *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika* [Proceedings of the USSR Academy of Sciences. Technical Cybernetics], 1978, vol. 6, pp. 199–203. (In Russian).

8. Gelenbe E. Probabilistic models of computer systems. Part II: Diffusion approximation waiting times and batch arrivals. *Acta Informatica*, 1979, vol. 12, no. 4, pp. 285–303. Doi: 10.1007/bf00268317

9. Kobayashi H. Application of the diffusion approximation to queueing networks I: Equilibrium queue distributions. *Journal of ACM*, 1974, vol. 21, no 2, pp. 316–328. Doi: 10.1145/321812.321827; Kobayashi H. Application of the diffusion approximation to queueing networks II: Nonequilibrium distributions and applications to computer modeling. *Journal of ACM*, 1974, vol. 21, no 3, pp. 456–469. Doi: 10.1145/321832.321844

10. Matalytskii M.A. Method for Obtaining the Unsteady State Probabilities in Markovian Queueing Networks. *Problemy peredachi informatsii* [Information Transmission Problems], 1994, vol. 30, no. 2, pp. 104–107. (In Russian).

11. Matalytskii M.A. Research Network with a multiline service systems and heterogeneous applications. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Remote Control], 1996, no. 9, pp. 79–92. (In Russian).

12. Ivnitskii V.A. *Theory of Queuing Networks*. Moscow, FIZMATLIT, 2004. 772 p. (In Russian).

13. Matalytski M.A., Statkevich S.E. *Stochastic Networks with Bounded Waiting Time of Customers and Unreliable Servicing Systems*. Grodno, GrSU, 2014. 248 p. (In Russian).

14. Matalytskii M.A, Naumenko V.V. *Stochastic Networks with Non-Standard Customers Movement*. Grodno, Grodno State University, 2016. 346 p. (In Russian).

Информация об авторах

Копать Дмитрий Ярославович – аспирант кафедры стохастического анализа и эконометрического моделирования факультета математики и информатики, Гродненский государственный университет им. Я. Купалы (ул. Ожешко, 22, 230020, г. Гродно, Республика Беларусь). E-mail: dk80395@mail.ru

Маталыцкий Михаил Алексеевич – профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой стохастического анализа и эконометрического моделирования факультета математики и информатики, Гродненский государственный университет им. Я. Купалы (ул. Ожешко, 22, 230020, г. Гродно, Республика Беларусь). E-mail: m.matalytski@gmail.com

Information about the authors

Kopats Dzmitry Iaroslavovich – Postgraduate of the Department of Stochastic Analysis and Econometric Modeling, Faculty of Mathematics and Computer Science of the Yanka Kupala State University of Grodno (22, Ozheshko Str., 230023, Grodno, Republic of Belarus). E-mail: dk80395@mail.ru

Matalytski Mikhail Alekseevich – Professor, D. Sc. (Physics and Mathematics), Head of the Department of Stochastic Analysis and Econometric Modeling, Faculty of Mathematics and Computer Science of the Yanka Kupala State University of Grodno (22, Ozheshko Str., 230023, Grodno, Republic of Belarus). E-mail: m.matalytski@gmail.com

Для цитирования

Копать, Д. Я. О нестационарном распределении вероятностей состояний марковской сети с бесконечнолинейными системами обслуживания в условиях высокой нагрузки / Д. Я. Копать, М. А. Маталыцкий // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2017. – № 1. – С. 63–69.

For citation

Kopats D.J., Matalytski M.A. Non-stationary distribution of the probability states of the Markov network with infinite-server queuing systems operating at high load. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series], 2017, no. 1, pp. 63–69. (In Russian).