ISSN 0002-3574 (print)
УДК 519.216.2

Поступила в редакцию 12.09.2016
Received 12.09.2016

А. А. Леваков, Я. Б. Задворный

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

СУЩЕСТВОВАНИЕ ИЗМЕРИМЫХ СОГЛАСОВАННЫХ СЕЛЕКТОРОВ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

В настоящей статье рассматриваются измеримые многозначные случайные отображения, согласованные с заданным потоком σ-алгебр, значениями которых являются замкнутые подмножества некоторого полного сепарабельного метрического пространства. Для них установлен критерий измеримости и согласованности, аналогичный известному критерию Кастэна измеримости многозначных отображений. Доказана теорема о существовании у случайных многозначных отображений измеримых и согласованных селекторов, с заданной точностью аппроксимирующих некоторую однозначную измеримую и согласованную случайную функцию. Данная теорема усилена в случае, когда рассматриваемое многозначное отображение принимает компактные значения. Доказана теорема, обобщающая на многозначные измеримые случайные отображения теорему Филиппова об обратной функции. Полученные результаты могут быть использованы при доказательстве существования и исследовании свойств решений стохастических дифференциальных включений.

Ключевые слова: многозначное отображение, селектор, измеримость.

A. A. Levakov, Y. B. Zadvorny

Belarusian State University, Minsk, Belarus

EXISTENCE OF MEASURABLE ADAPTED SELECTORS OF SET-VALUED FUNCTIONS

The present article is devoted to considering measurable set-valued random functions that are adapted to a fixed filtration of σ-algebras and the values of which are closed subsets of some complete separable metric space. For such functions, a criterion of measurability and adaptation is proved, which is analogous to Castain's well-known criterion of measurability of set-valued functions. A theorem on existence of measurable and adapted selectors of set-valued random functions, which approximate some measurable adapted random function, is obtained. This theorem is improved in the case of set-valued functions with compact values. The generalization of Filippov's theorem about the inverse function to the set-valued measurable random functions is proved. The obtained results can be useful both for proving the existence and for considering the properties of the solutions of stochastic differential inclusions.

Keywords: set-valued function, selector, measurability.

Пусть (X,ρ) – полное сепарабельное метрическое пространство; $S(X)$ – множество всех подмножеств из X, а $P(X)$, $\mathrm{cl}(X)$, $\mathrm{comp}(X)$ – соответственно семейство всех непустых, всех непустых замкнутых, непустых компактных подмножеств из X; (T,F) – измеримое пространство. Многозначное отображение $\Gamma : T \to S(X)$ называется (F)-измеримым ($(F)_c$-измеримым; $(F)_b$-измеримым), если $\Gamma^{-1}(M) = \{t \in T : \Gamma(t) \cap M \neq \varnothing\} \in F$ для каждого открытого (замкнутого; борелевского) множества $M \subset X$. Если $\Gamma : T_1 \times T_2 \to S(X)$, где $(T_1, F_1), (T_2, F_2)$ – два измеримых пространства, то измеримость отображения Γ понимается в терминах произведения σ-алгебр $F_1 \times F_2$. Отметим, что однозначная функция $f : T \to X$ – F-измерима, если многозначная функция $\Gamma(x) := \{f(x)\}$ – (F)-измерима (эквивалентно $(F)_c$-измерима; $(F)_b$-измерима). Отображение $\gamma : T \to X$ называют селектором многозначного отображения $\Gamma : T \to P(X)$, если $\gamma(t) \in \Gamma(t)$ для всех $t \in T$. Для произвольного многозначного отображения $\Gamma : T \to \mathrm{cl}(X)$ имеют место следующие импликации: Γ – $(F)_b$-измеримо $\Rightarrow$ Γ – $(F)_c$-измеримо $\Rightarrow$ Γ – (F)-измеримо. Если на измеримом пространстве (T,F) существует положительная мера ν такая, что пространство (T,F,ν) – полное σ-конечное, то все три понятия измеримости совпадают: Γ – $(F)_b$ -измеримо $\Leftrightarrow$ Γ – $(F)_c$ -измеримо $\Leftrightarrow$ Γ – (F)-измеримо [1].

Первая теорема о существовании измеримого селектора у многозначного измеримого отображения в конечномерном пространстве была доказана А. Ф. Филипповым в работе [2]. К. Куратовским и С. Рыль-Нардзевским получено обобщение этой теоремы на сепарабельные банаховы пространства [3]. Ш. Кастэн усилил эти результаты и показал [4, 5], что если $\Gamma : T \to \mathrm{cl}(X)$ – многозначное отображение, то следующие три утверждения эквивалентны: 1) Γ – (F)-измеримо; 2) функция $t \to \rho(x, \Gamma(t))$ (F)-измерима для каждого $x \in X$; 3) существует последовательность (F)-измеримых селекторов $\sigma_n(\cdot)$ для Γ такая, что $\Gamma(t) = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma_n(t)}$, $t \in T$.

Пусть T – либо R_+, либо отрезок $[0, a] \subseteq R_+$, $\beta(T)$ – борелевская σ-алгебра на T, (Ω, F) – измеримое пространство с потоком под-σ-алгебр F_t, $t \geq 0$.

Многозначное отображение $\Gamma : T \times \Omega \to S(X)$ называем $(\beta(T), F)$-измеримым ($(\beta(T), F)_c$-измеримым; $(\beta(T), F)_b$-измеримым), если $\{(t, \omega) : \Gamma(t, \omega) \cap B \neq \varnothing\} \in \beta(T) \times F$ для любого открытого $B \subseteq X$ (для любого замкнутого $B \subseteq X$, для любого борелевского $B \subseteq X$), если, кроме того, для каждого $\bar{t} \in T$ многозначное отображение $\omega \to \Gamma(\bar{t}, \omega)$ является $(F_{\bar{t}})$-измеримым ($(F_{\bar{t}})_c$-измеримым), то говорим, что многозначное отображение (F_t)-согласовано (($F_t)_c$-согласовано). Для произвольного многозначного отображения $\Gamma : T \times \Omega \to \mathrm{cl}(X)$ имеют место следующие импликации: Γ – $(\beta(T), F)_b$-измеримо ⇒ Γ – $(\beta(T), F)_c$-измеримо ⇒ Γ – $(\beta(T), F)$-измеримо.

В статье рассматривается задача существования $(\beta(T), F)$-измеримых согласованных с потоком (F_t) селекторов со специальными свойствами у $(\beta(T), F)$-измеримых и (F_t)-согласованных многозначных отображений. Существование указанных селекторов не вытекает из известных теорем теории многозначных отображений [5–11], но именно такие селекторы используются при построении теории стохастических дифференциальных включений [12–13].

Скажем, что многозначное отображение $\Gamma : T \times \Omega \to S(X)$ имеет $(\beta(T), F)$-измеримое и (F_t)-согласованное аппроксимирующее семейство [6, с. 338], если существует последовательность $(\beta(T), F)$-измеримых и (F_t)-согласованных отображений $x_i : T \times \Omega \to X$ такая, что для каждого $i \in N$ множество $\{(t, \omega) \in T \times \Omega : x_i(t, \omega) \in \Gamma(t, \omega)\}$ – $(\beta(T), F)$-измеримо, а для каждого i для всех $\bar{t} \in T$ множество $\{\omega \in \Omega : x_i(\bar{t}, \omega) \in \Gamma(\bar{t}, \omega)\}$ – $(F_{\bar{t}})$-измеримо и, кроме того, при всех (t,ω) выполняется включение $\Gamma(t, \omega) \subset \overline{\Gamma(t, \omega) \cap (\bigcup_{i=1}^{\infty} x_i(t, \omega))}$. Далее, $(\beta(T), F)$-измеримое и (F_t)-согласованное отображение $\gamma : T \times \Omega \to X$ называем $(\beta(T), F)$-измеримым и (F_t)-согласованным селектором многозначного отображения $\Gamma : T \times \Omega \to P(X)$, если $\gamma(t, \omega) \in \Gamma(t, \omega)$ для всех $(t, \omega) \in T \times \Omega$.

Докажем для $(\beta(T), F)$-измеримых и (F_t)-согласованных многозначных отображений $\Gamma : T \times \Omega \to \mathrm{cl}(X)$ утверждение, аналогичное указанному выше результату Ш. Кастэна. При доказательстве мы во многом следуем гл. 8 монографии [6], где исследуются многозначные отображения в конечномерных пространствах, и статье [1].

Л е м м а 1. *Пусть* $\Gamma : T \times \Omega \to P(X)$ *– многозначное отображение такое, что множество* Γ(t,ω) *открыто для каждых* (t,ω), *и пусть* $D = \{x_i\}$ *– счетное плотное подмножество* X. *Если для любого* i *множество* $\{(t, \omega) \in T \times \Omega : x_i \in \Gamma(t, \omega)\}$ *является* $(\beta(T), F)$-*измеримым и для каждых* $i \in N$, $\bar{t} \in T$ *множество* $\{\omega \in \Omega : x_i \in \Gamma(\bar{t}, \omega)\}\}$ – $(F_{\bar{t}})$-*измеримо, то* $\{x_i(t, \omega)\}$, $i \in N$, $x_i(t, \omega) = x_i$ $\forall (t, \omega) \in T \times \Omega$ *является* $(\beta(T), F)$-*измеримым и* (F_t)-*согласованным аппроксимирующим семейством для* Γ.

Действительно, так как множества Γ(t,ω) открыты, то пересечения $D \cap \Gamma(t, \omega)$ плотны в Γ(t,ω) и $\{x_i, i \in N\}$ – $(\beta(T), F)$-измеримое (F_t)-согласованное аппроксимирующее семейство для Γ. Лемма установлена.

Будем говорить, что отображение $f: T\times\Omega\times X\to Y$ является (F_t)-согласованным отображением Каратеодори, если оно непрерывно по x при всех фиксированных $(t,\omega)\in T\times\Omega$, $(\beta(T),F)$-измеримо при каждом фиксированном $x\in X$ и (F_t)-измеримо при каждых фиксированных $(t,x)\in T\times X$.

Л е м м а 2. *Пусть* $f: T\times\Omega\times X\to Y$ *является* (F_t)*-согласованным отображением Каратеодори,* $U\subset Y$ *– открытое множество. Тогда отображение* $\Gamma: T\times\Omega\to S(X)$, $\Gamma(t,\omega)=\{x\in X: f(t,\omega,x)\in U\}$ *–* $(\beta(T),F)_c$*-измеримо и* $(F_t)_c$*-согласовано.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $B\subset X$ – замкнутое множество, $A=\{x_i, i\in N\}$ – счетное плотное подмножество в B. Отображение Γ обладает следующим свойством: $\Gamma^{-1}(B)=\{(t,\omega)\in T\times\Omega:\Gamma(t,\omega)\cap B\neq\varnothing\}=\{(t,\omega)\in T\times\Omega: f(t,\omega,x)\in U$ для некоторой точки $x\in B\}=$ $=\{(t,\omega)\in T\times\Omega: f(t,\omega,x_i)\in U$ для некоторой точки $x_i\in A\}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\{(t,\omega)\in T\times\Omega: f(t,\omega,x_i)\in U\}$. Отсюда следует $(\beta(T),F)_c$-измеримость отображения Γ, а его $(F_t)_c$-согласованность доказывается аналогичным образом.

Л е м м а 3. *Многозначное отображение* $\Gamma: T\times\Omega\to P(X)$ *является* $(\beta(T),F)$*-измеримым и* (F_t)*-согласованным тогда и только тогда, когда для любого* $x\in X$ *функция* $(t,\omega)\to\rho(x,\Gamma(t,\omega))$ *–* $(\beta(T),F)$*-измерима и* (F_t)*-согласована.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Многозначное отображение $\Gamma: T\times\Omega\to P(X)$ является $(\beta(T),F)$-измеримым, если и только если $\Gamma^{-1}(B(x,\varepsilon))\in(\beta(T)\times F)$ для каждого $x\in X$ и для каждого открытого шара $B(x,\varepsilon)$. Для каждого $x\in X$ функция $(t,\omega)\to\rho(x,\Gamma(t,\omega))$ – $(\beta(T),F)$-измерима, если и только если $\{(t,\omega):\rho(x,\Gamma(t,\omega))<\varepsilon\}\in(\beta(T)\times F)$ для каждого $\varepsilon>0$. Так как $\Gamma^{-1}(B(x,\varepsilon))=\{(t,\omega):\Gamma(t,\omega)\cap B(x,\varepsilon)\neq\varnothing\}=$ $=\{(t,\omega):\rho(x,\Gamma(t,\omega)<\varepsilon)\}$, то утверждение о том, что отображение Γ является $(\beta(T),F)$-измеримым тогда и только тогда, когда функция $(t,\omega)\to\rho(x,\Gamma(t,\omega))$ – $(\beta(T),F)$-измерима для любого $x\in X$, доказано. Остальная часть леммы доказывается аналогичным образом.

Л е м м а 4. *Для любой* $(\beta(T),F)$*-измеримой и* (F_t)*-согласованной функции* $y: T\times\Omega\to X$ *существует последовательность* $(\beta(T),F)$*-измеримых и* (F_t)*-согласованных функций* $y_n(t,\omega)$*, принимающих не более счетного множества различных значений, сходящаяся к функции* $y(t,\omega)$ при каждых (t,ω).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $a_1,a_2,\ldots$ – последовательность, плотная в X. Возьмем произвольное $\varepsilon>0$ и образуем последовательность множеств $C_{k,\varepsilon}=B(a_k,\varepsilon)\cap\complement B(a_1,\varepsilon)\cap\complement B(a_2,\varepsilon)\ldots\cap\complement B(a_{k-1},\varepsilon)$ ($\complement B$ – дополнение множества B). Множества $C_{k,\varepsilon}$ не пересекаются и являются борелевскими. Множества $D_{k,\varepsilon}=y^{-1}(C_{k,\varepsilon})$ не пересекаются и их объединение равно $T\times\Omega$. Пусть $y_n(t,\omega)$ – функция, равная a_k на множестве $D_{k,\frac{1}{n}}$. По построению $\rho(y(t,\omega),y_n(t,\omega))\le\frac{1}{n}$, поэтому $y_n(t,\omega)\to y(t,\omega)$ при каждых (t,ω). Множества $D_{k,\frac{1}{n}}$ являются $(\beta(T),F)$-измеримыми, следовательно, функции $y_n(t,\omega)$ – $(\beta(T),F)$-измеримы. При каждом $\bar t\in T$ множество $y^{-1}\left(\bar t, C_{k,\frac{1}{n}}\right)$ – $\left(F_{\bar t}\right)$-измеримо, и поэтому множество $\{\omega: y_n(\bar t,\omega)=a_k\}=y^{-1}\left(\bar t, C_{k,\frac{1}{n}}\right)$ также $\left(F_{\bar t}\right)$-измеримо.

Л е м м а 5. *Пусть отображение* $f: T\times\Omega\times X\to Y$ *является* (F_t)*-согласованным отображением Каратеодори, функция* $y: T\times\Omega\to X$ *является* $(\beta(T),F)$*-измеримой и* (F_t)*-согласованной. Тогда многозначное отображение* $(t,\omega)\to f(t,\omega,y(t,\omega))$ *также* $(\beta(T),F)$*-измеримо и* (F_t)*-согласовано.*

Доказательство. Возьмем последовательность $\left(\beta(T),F\right)$-измеримых (F_t)-согласованных функций $y_n(t,\omega)$, каждая из которых принимает не более счетного множества различных значений $\{a_k^n\}$, сходящуюся к функции $y(t,\omega)$ при каждых (t,ω) (лемма 4). Для каждого открытого множества $U \subset Y$, согласно лемме 2, многозначное отображение $\Gamma(t,\omega)=\{x\in X: f(t,\omega,x)\in U\}$ – $(\beta(T),F)_c$-измеримо и $(F_t)_c$-согласовано. Множество $D_n=\{(t,\omega)\in T\times\Omega: f(t,\omega,y_n(t,\omega))\in U\}$ можно представить в виде $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\{(t,\omega): y_n(t,\omega)=a_k^n, a_k^n\in\Gamma(t,\omega)\}$. Следовательно, множества D_n являются $\left(\beta(T),F\right)$-измеримыми. Аналогично множества $\{\omega: f(\bar t,\omega,y_n(\bar t,\omega))\in U\}=$ $=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\{(\bar t,\omega): y_n(\bar t,\omega)=a_k^n, a_k^n\in\Gamma(\bar t,\omega)\}$ – $\left(F_{\bar t}\right)$-измеримы для каждых $\bar t\in T$ и $n \in N$. Отсюда вытекает $\left(\beta(T),F\right)$-измеримость и (F_t)-согласованность отображения $(t,\omega)\to f(t,\omega,y_n(t,\omega))$ для каждого n. По лемме 3 при каждом $x\in X$ функция $(t,\omega)\to\rho(x,f(t,\omega,y_n(t,\omega)))$ – $\left(\beta(T),F\right)$-измерима и (F_t)-согласована. Так как функция $f(t,\omega,y)$ непрерывна по y, то при каждых $(t,\omega)\in T\times\Omega$, $x\in X$, имеем $\rho(x,f(t,\omega,y_n(t,\omega)))\xrightarrow[n\to\infty]{}\rho(x,f(t,\omega,y(t,\omega)))$, поэтому отображение $(t,\omega)\to\rho(x,f(t,\omega,y(t,\omega)))$ – $\left(\beta(T),F\right)$-измеримо и (F_t)-согласовано. Но тогда по лемме 3 и отображение $f(t,\omega,y(t,\omega))$ является $\left(\beta(T),F\right)$-измеримым (F_t)-согласованным. Лемма 5 установлена.

Замечание 1. Если отображение $f: T\times\Omega\times X\to Y$ в лемме 5 не является непрерывным по x при каждых фиксированных (t,ω), а лишь полунепрерывно сверху или снизу, то, как показывают примеры, приведенные в [11, с. 77–78], лемма 5 не имеет места.

Через $\mathrm{dom}\Gamma:=\{(t,\omega)\in T\times\Omega:\Gamma(t,\omega)\neq\varnothing\}$, $\mathrm{dom}\Gamma_{\bar t}:=\{\omega\in\Omega:\Gamma(t,\omega)\neq\varnothing\}$ обозначим соответственно эффективные множества отображений $\Gamma: T\times\Omega\to S(X)$, $\omega\to\Gamma(\bar t,\omega)$.

Лемма 6. *Если* $\Gamma: T\times\Omega\to S(X)$ *имеет* $\left(\beta(T),F\right)$*-измеримое и* (F_t)*-согласованное аппроксимирующее семейство* $\{x_m(t,\omega), m\in N\}$, *то множество* $\mathrm{dom}\Gamma$ *является* $\left(\beta(T),F\right)$*-измеримым, а множество* $\mathrm{dom}\Gamma_{\bar t}$ – $\left(F_{\bar t}\right)$*-измеримым при каждом* $\bar t\in T$.

Действительно, $\mathrm{dom}\Gamma=\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}\{(t,\omega)\in T\times\Omega: x_m(t,\omega)\in\Gamma(t,\omega)\}$, $\mathrm{dom}\Gamma_{\bar t}=\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}\{\omega\in\Omega: x_m(\bar t,\omega)\in\Gamma(\bar t,\omega)\}$.

Лемма 7. *Пусть отображения* $\Gamma_1: T\times\Omega\to P(X)$, $\Gamma_2: T\times\Omega\to P(X)$ *такие, что множества* $\Gamma_2(t,\omega)$ *открыты, а отображение* Γ_1 *имеет* $\left(\beta(T),F\right)$*-измеримое и* (F_t)*-согласованное аппроксимирующее семейство, причем для каждой* $\left(\beta(T),F\right)$*-измеримой и* (F_t)*-согласованной функции* $y: T\times\Omega\to X$ *множество* $\{(t,\omega)\in T\times\Omega: y(t,\omega)\in\Gamma_2(t,\omega)\}$ – $\left(\beta(T),F\right)$*-измеримо, а множество* $\{\omega\in\Omega: y(\bar t,\omega)\in\Gamma_2(\bar t,\omega)\}$ – $\left(F_{\bar t}\right)$*-измеримо при каждых* $\bar t\in T$. *Тогда отображение* $(t,\omega)\to\Gamma_1(t,\omega)\cap\Gamma_2(t,\omega)$ *имеет* $\left(\beta(T),F\right)$*-измеримое и* (F_t)*-согласованное аппроксимирующее семейство.*

Действительно, пусть $\{\sigma_n(t,\omega), n\in N\}$ – последовательность $\left(\beta(T),F\right)$-измеримых (F_t)-согласованных отображений, аппроксимирующее Γ_1. Покажем, что семейство $\{\sigma_n(t,\omega), n\in N\}$ является аппроксимирующим и для $\Gamma_1(t,\omega)\cap\Gamma_2(t,\omega)$. Во-первых, множества

$$\{(t,\omega)\in T\times\Omega:\sigma_n(t,\omega)\in\Gamma_1(t,\omega)\cap\Gamma_2(t,\omega)\}=\{(t,\omega)\in T\times\Omega:\sigma_n(t,\omega)\in\Gamma_1(t,\omega)\}\cap$$
$$\cap\{(t,\omega)\in T\times\Omega:\sigma_n(t,\omega)\in\Gamma_2(t,\omega)\}$$

– $\left(\beta(T),F\right)$-измеримы, а множества

$$\{\omega\in\Omega:\sigma_n(\bar t,\omega)\in\Gamma_1(\bar t,\omega)\cap\Gamma_2(\bar t,\omega)\}=\{\omega\in\Omega:\sigma_n(\bar t,\omega)\in\Gamma_1(\bar t,\omega)\}\cap\ \{\omega\in\Omega:\sigma_n(\bar t,\omega)\in\Gamma_2(\bar t,\omega)\}$$

– $\left(F_{\bar{t}}\right)$-измеримы при каждом $\bar{t}\in T$. Во-вторых, так как множества $\Gamma_2(t,\omega)$ открыты, то пересечения $\Gamma_2(t,\omega)\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\sigma_n(t,\omega)\right)$ плотны в $\Gamma_1(t,\omega)\cap\Gamma_2(t,\omega)$.

Л е м м а 8. *Если многозначное отображение* $\Gamma: T\times\Omega\to \mathrm{cl}(X)$ *имеет аппроксимирующее* $\left(\beta(T),F\right)$*-измеримое и* (F_t)*-согласованное семейство, а функция* $x: T\times\Omega\to X$ *является* $\left(\beta(T),F\right)$*-измеримой и* (F_t)*-согласованной, то множество* $\{(t,\omega)\in T\times\Omega: x(t,\omega)\in\Gamma(t,\omega)\}$ *является* $\left(\beta(T),F\right)$*-измеримым, а множество* $\{\omega\in\Omega: x(\bar{t},\omega)\in\Gamma(\bar{t},\omega)\}$ – $\left(F_{\bar{t}}\right)$*-измеримым для всех* $\bar{t}\in T$.

Действительно, отображения $\Gamma(t,\omega)$ и $F_n(t,\omega)=\left\{x\in X:\rho(x,x(t,\omega))<\dfrac{1}{n}\right\}$ удовлетворяют условиям леммы 7. Надо лишь проверить, что для любой $\left(\beta(T),F\right)$-измеримой (F_t)-согласованной функции $y: T\times\Omega\to X$ множество $A=\{(t,\omega)\in T\times\Omega: y(t,\omega)\in F_n(t,\omega)\}$ – $\left(\beta(T),F\right)$-измеримо, а множество $A_{\bar{t}}=\{\omega\in\Omega: y(\bar{t},\omega)\in F_n(\bar{t},\omega)\}$ – $\left(F_{\bar{t}}\right)$-измеримо. Но множество A совпадает с $\left\{(t,\omega):\rho(x(t,\omega),y(t,\omega))<\dfrac{1}{n}\right\}$ и оно $\left(\beta(T),F\right)$-измеримо, если функция $(t,\omega)\to\rho(y(t,\omega),x(t,\omega))$ – $\left(\beta(T),F\right)$-измерима. Измеримость последней функции следует из леммы 5 (если положить $f(t,\omega,z)=\rho(x(t,\omega),z)$). Аналогично устанавливается $\left(F_{\bar{t}}\right)$-измеримость множества $A_{\bar{t}}$. По лемме 7 отображение $(t,\omega)\to\Gamma(t,\omega)\cap F_n(t,\omega)$ имеет аппроксимирующее $\left(\beta(T),F\right)$-измеримое (F_t)-согласованное семейство. Но тогда в силу леммы 6 множества $\mathrm{dom}(\Gamma\cap F_n)$ – $\left(\beta(T),F\right)$-измеримы, а множества $\mathrm{dom}(\Gamma\cap F_n)_t$ – (F_t)-измеримы. Так как $\Gamma(t,\omega)$ замкнуты, то множество $\{(t,\omega)\in T\times\Omega: x(t,\omega)\in\Gamma(t,\omega)\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathrm{dom}(\Gamma\cap F_n)$ – $\left(\beta(T),F\right)$-измеримо. Аналогично устанавливается, что множество $\{\omega\in\Omega: x(\bar{t},\omega)\in\Gamma(\bar{t},\omega)\}$ – $\left(F_{\bar{t}}\right)$-измеримо при каждом $\bar{t}\in T$.

Л е м м а 9. *Если многозначное отображение* $\Gamma: T\times\Omega\to P(X)$ *имеет аппроксимирующее* $\left(\beta(T),F\right)$*-измеримое и* (F_t)*-согласованное семейство, то существует семейство* $\left(\beta(T),F\right)$*-измеримых и* (F_t)*-согласованных селекторов, аппроксимирующее* Γ.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\{y_i(t,\omega), i\in N\}$ – $\left(\beta(T),F\right)$-измеримая и (F_t)-согласованная аппроксимирующая последовательность для Γ. Положим $T_i=\{(t,\omega)\in T\times\Omega: y_i(t,\omega)\in\Gamma(t,\omega)\}$, $i = 1, 2,\dots$. Множества T_i – $\left(\beta(T),F\right)$-измеримы при каждом i, а множества $\{\omega\in\Omega: y_i(\bar{t},\omega)\in\Gamma(\bar{t},\omega)\}$ – $\left(F_{\bar{t}}\right)$-измеримы при всех i и $\bar{t}\in T$. Построим последовательность

$$x_1(t,\omega)=\begin{cases} y_1(t,\omega),(t,\omega)\in T_1,\\ y_2(t,\omega),(t,\omega)\in T_2\setminus T_1,\\ \dots\dots\dots\dots\\ y_k(t,\omega),(t,\omega)\in T_k\setminus\bigcup_{i=1}^{k-1}T_i,\\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}\qquad x_m(t,\omega)=\begin{cases} x_{m-1}(t,\omega),(t,\omega)\notin\bigcup_{i=m}^{\infty}T_i,\\ y_m(t,\omega),(t,\omega)\in T_m,\\ y_{m+1}(t,\omega),(t,\omega)\in T_{m+1}\setminus T_m,\\ \dots\dots\dots\dots\\ y_{m+k}(t,\omega),(t,\omega)\in T_{m+k}\setminus\bigcup_{i=0}^{k-1}T_{m+i},\\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Последовательность $x_m(t,\omega)$ искомая.

Л е м м а 10. *Для того чтобы многозначное отображение* $\Gamma: T\times\Omega\to P(X)$ *имело аппроксимирующее* $\left(\beta(T),F\right)$*-измеримое и* (F_t)*-согласованное семейство, необходимо, а в случае* $\Gamma(t,\omega)\in\mathrm{cl}(X)$

$\forall(t,\omega)\in T\times\Omega$ *и достаточно, чтобы для каждого* $x\in X$ *функция* $(t,\omega)\to\rho(x,\Gamma(t,\omega))$ *была* $\left(\beta(T),F\right)$*-измеримой и* (F_t)*-согласованной.*

Доказательство. Так как

$$\rho(x,\Gamma(t,\omega))=\inf_{1\le m<\infty}\rho(x,x_m(t,\omega)),$$

где $\{x_m(t,\omega),m\in N\}$ – аппроксимирующая $\left(\beta(T),F\right)$-измеримая (F_t)-согласованная последовательность селекторов отображения Γ, то $(t,\omega)\to\rho(x,\Gamma(t,\omega))$ – $\left(\beta(T),F\right)$-измеримая (F_t)-согласованная функция.

Предположим теперь, что $(t,\omega)\to\rho(x,\Gamma(t,\omega))$ – $\left(\beta(T),F\right)$-измеримая (F_t)-согласованная функция при каждом $x\in X$ и $\Gamma(t,\omega)\in\mathrm{cl}(X)$. Положим $F_m(t,\omega)=\{x\in X:\rho(x,\Gamma(t,\omega))<2^{-m}\}$. Множества $F_m(t,\omega)$ открыты, и из условия леммы 10 следует, что для каждого $y\in X$ множество $\{(t,\omega):y\in F_m(t,\omega)\}=\{(t,\omega):\rho(y,\Gamma(t,\omega))<2^{-m}\}$ – $\left(\beta(T),F\right)$-измеримо и для каждого $\bar t\in T$ множество $\{\omega\in\Omega:y\in\Gamma(\bar t,\omega)\}$ – $\left(F_{\bar t}\right)$-измеримо. Согласно лемме 1 отображение $(t,\omega)\to F_m(t,\omega)$ имеет $\left(\beta(T),F\right)$-измеримое (F_t)-согласованное аппроксимирующее семейство. В силу леммы 9 при каждом m можно выбрать последовательность $\{x_{mi}(t,\omega),i\in N\}$ (F_t)-согласованных селекторов, аппроксимирующих F_m. Для каждой пары номеров m, i построим индуктивно следующую последовательность отображений: $x_{mi0}(t,\omega)=x_{mi}(t,\omega)$; если уже построена $\left(\beta(T),F\right)$-измеримая (F_t)-согласованная функция $x_{mil}(t,\omega)$ такая, что $x_{mil}(t,\omega)\in F_{m+l}(t,\omega)$, то в качестве $x_{mi(l+1)}(t,\omega)$ возьмем произвольную $\left(\beta(T),F\right)$-измеримую (F_t)-согласованную функцию, удовлетворяющую условиям $x_{mi(l+1)}(t,\omega)\in F_{m+l+1}(t,\omega)$, $\rho(x_{mil}(t,\omega),x_{mi(l+1)}(t,\omega))<2^{-(m+l)}$. Такая функция существует, поскольку множество $\Phi_{mi(l+1)}(t,\omega)=\{x:x\in F_{m+l+1}(t,\omega),\rho(x,x_{mil}(t,\omega))<2^{-(m+l)}\}$ непусто при всех (t,ω) и многозначное отображение $(t,\omega)\to\Phi_{mi(l+1)}(t,\omega)$ имеет $\left(\beta(T),F\right)$-измеримую (F_t)-согласованную аппроксимирующую последовательность селекторов (леммы 7, 9). Последовательность $x_{mil}(t,\omega)$, $l\ge 1$, при каждых фиксированных (t,ω) является фундаментальной в X, следовательно, она сходится к некоторой $\left(\beta(T),F\right)$-измеримой (F_t)-согласованной функции $u_{mi}(t,\omega)$ такой, что $\rho(x_{mi}(t,\omega),u_{mi}(t,\omega))<2^{-(m-1)}$ и, кроме того, $u_{mi}(t,\omega)\in\Gamma(t,\omega)$ $\forall(t,\omega)\in T\times\Omega$. Осталось проверить, что семейство $u_{mi}(t,\omega)$, m, $i=1,2,...$, аппроксимирует отображение $\Gamma(t,\omega)$. Это вытекает из следующего факта: если $A\subset X$ – замкнутое множество, множество y_{mi}, $i=1,2,\dots$, плотно в некоторой окрестности множества A при каждом натуральном m, $z_{mi}\in A$ и $\rho(y_{mi},z_{mi})<2^{-(m-1)}$, то множество $\{z_{mi}:m,i=1,2,...\}$ плотно в A. Таким образом, семейство $\{u_{mi}(t,\omega):m,i=1,2,...\}$ удовлетворяет условиям леммы 10.

Из лемм 3, 9, 10 сразу вытекает следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $\Gamma:T\times\Omega\to\mathrm{cl}(X)$ *– многозначное отображение. Следующие утверждения эквивалентны:* 1) *отображение* Γ *является* $\left(\beta(T),F\right)$*-измеримым и* (F_t)*-согласованным*; 2) *для каждого* $x\in X$ *функция* $(t,\omega)\to\rho(x,\Gamma(t,\omega))$ – $\left(\beta(T),F\right)$*-измерима и* (F_t)*-согласована;* 3) *существует* $\left(\beta(T),F\right)$*-измеримое и* (F_t)*-согласованное семейство селекторов, аппроксимирующее отображение* Γ.

Теорема 2. *Пусть отображения* $\Gamma:T\times\Omega\to\mathrm{cl}(X)$ *и* $x:T\times\Omega\to X$ *являются* $\left(\beta(T),F\right)$*-измеримыми и* (F_t)*-согласованными. Тогда для любого* $\left(\beta(T),F\right)$*-измеримого и* (F_t)*-согласованного отображения* $\delta:T\times\Omega\to R$ *такого, что* $\delta(t,\omega)>0$ *при всех* $(t,\omega)\in T\times\Omega$, *существует* $\left(\beta(T),F\right)$*-измеримый и* (F_t)*-согласованный селектор* $y:T\times\Omega\to X$ *отображения* Γ, *удовлетворяющий для всех* $(t,\omega)\in T\times\Omega$ *неравенству*

$$\rho(x(t,\omega),y(t,\omega))\le\rho(x(t,\omega),\Gamma(t,\omega))+\delta(t,\omega). \tag{1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу леммы 3 функция $(t,\omega,x)\to\rho(x,\Gamma(t,\omega))$ является (F_t)-согласованным отображением Каратеодори. По лемме 5 функция $(t,\omega)\to r(t,\omega)=\rho(x(t,\omega),\Gamma(t,\omega))$ – $\left(\beta(T),F\right)$-измерима (F_t)-согласована. Определим отображения

$$(t,\omega)\to\Phi(t,\omega)=\{x\in X: x\in\Gamma(t,\omega),\rho(x,x(t,\omega))<\delta(t,\omega)+r(t,\omega)\},$$
$$(t,\omega)\to\Psi(t,\omega)=\{x\in X:\rho(x,x(t,\omega))<\delta(t,\omega)+r(t,\omega)\}.$$

При каждых (t,ω) множество $\Phi(t,\omega)$ непусто. Покажем, что отображения $\Gamma(t,\omega)$ и $\Psi(t,\omega)$ удовлетворяют условиям леммы 7. Множества $\Psi(t,\omega)$ открыты. По теореме 1 отображение $\Gamma(t,\omega)$ имеет $\left(\beta(T),F\right)$-измеримое (F_t)-согласованное аппроксимирующее семейство. Так как для любой $\left(\beta(T),F\right)$-измеримой (F_t)-согласованной функции $z:T\times\Omega\to X$ отображения $(t,\omega)\to r(t,\omega)$, $(t,\omega)\to\rho(x(t,\omega),z(t,\omega))$ – $\left(\beta(T),F\right)$-измеримы (F_t)-согласованы, то множество $\{(t,\omega):z(t,\omega)\in\Psi(t,\omega)\}=\{(t,\omega):\rho(x(t,\omega),z(t,\omega))<\delta(t,\omega)+r(t,\omega)\}$ – $\left(\beta(T),F\right)$-измеримо, а множество $\{\omega:z(\bar t,\omega)\in\Psi(\bar t,\omega)\}=\{\omega:\rho(x(\bar t,\omega),z(\bar t,\omega))<\delta(\bar t,\omega)+r(\bar t,\omega)\}$ – $\left(F_{\bar t}\right)$-измеримо. По лемме 7 отображение $\Phi(t,\omega)=\Gamma(t,\omega)\cap\Psi(t,\omega)$ имеет $\left(\beta(T),F\right)$-измеримое (F_t)-согласованное аппроксимирующее семейство. В силу леммы 9 отображение $(t,\omega)\to\Phi(t,\omega)$ имеет $\left(\beta(T),F\right)$-измеримое (F_t)-согласованное аппроксимирующее семейство селекторов. Любой такой селектор удовлетворяет неравенству (1).

З а м е ч а н и е 2. Как показывает следующий пример, теорема 2 с отображением $\delta:T\times\Omega\to R$, принимающим значение 0 при некоторых $(t,\omega)\in T\times\Omega$, в общем случае неверна. Пусть $X=l_\infty$, $T=[0,1]$, $A=\{(1+1,0,0,\ldots),(0,1+1/2,0,\ldots),\ldots,(0,\ldots,0,1+1/n,0,\ldots),\ldots\}$, $x(t,\omega)=0$, $\Gamma(t,\omega)=A\ \forall(\mathrm{t},\omega)$. Так как $\rho(x(t,\omega),\Gamma(t,\omega))=1$, а множество $\{x:x\in\Gamma(t,\omega),\rho(x,x(t,\omega))=1\}$ пусто, то у рассматриваемого многозначного отображения не существует селектора с требуемыми свойствами.

Для отображений $\Gamma:T\times\Omega\to\mathrm{comp}(X)$ теорема 2 может быть усилена.

Т е о р е м а 3. *Если отображения* $\Gamma:T\times\Omega\to\mathrm{comp}(X)$ *и* $x:T\times\Omega\to X$ *являются* $\left(\beta(T),F\right)$-*измеримыми и* (F_t)-*согласованными, то существует* $\left(\beta(T),F\right)$-*измеримый и* (F_t)-*согласованный селектор* $y:T\times\Omega\to X$ *отображения* Γ *такой, что для всех* $(t,\omega)\in T\times\Omega$ *выполняется равенство*

$$\rho(x(t,\omega),y(t,\omega))=\rho(x(t,\omega),\Gamma(t,\omega)). \tag{2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу леммы 3 функция $(t,x,\omega)\to\rho(x,\Gamma(t,\omega))$ является (F_t)-согласованным отображением Каратеодори. По лемме 5 функция $(t,\omega)\to r(t,\omega)=\rho(x(t,\omega),\Gamma(t,\omega))$ – $(\beta(T),F)$-измерима (F_t)-согласована. Определим отображения

$$(t,\omega)\to\Phi_0(t,\omega)=\{x\in X:x\in\Gamma(t,\omega),\rho(x,x(t,\omega))\le r(t,\omega)\},$$

$$(t,\omega)\to\Phi_n(t,\omega)=\{x\in X:x\in\Gamma(t,\omega),\rho(x,x(t,\omega))<\frac{1}{n}+r(t,\omega)\},$$

$$(t,\omega)\to\Psi_n(t,\omega)=\{x\in X:\rho(x,x(t,\omega))<\frac{1}{n}+r(t,\omega)\}.$$

При каждых (t,ω) множество $\Phi_0(t,\omega)$ непусто. Покажем, что отображения $\Gamma(t,\omega)$ и $\Psi_n(t,\omega)$ удовлетворяют условиям леммы 7. Множества $\Psi_n(t,\omega)$ открыты. По теореме 1 отображение $\Gamma(t,\omega)$ имеет $\left(\beta(T),F\right)$-измеримое (F_t)-согласованное аппроксимирующее семейство. Так как для любой $\left(\beta(T),F\right)$-измеримой (F_t)-согласованной функции $z:T\times\Omega\to X$ отображения $(t,\omega)\to r(t,\omega)$,

$(t,\omega)\to\rho(x(t,\omega),z(t,\omega))$ – $\left(\beta(T),F\right)$-измеримы (F_t)-согласованы, то множество $\{(t,\omega):z(t,\omega)\in\Psi_n(t,\omega)\}=\{(t,\omega):\rho(x(t,\omega),z(t,\omega))<\frac{1}{n}+r(t,\omega)\}$ – $\left(\beta(T),F\right)$-измеримо, а множество $\{\omega:z(\bar{t},\omega)\in\Psi_n(\bar{t},\omega)\}=\{\omega:\rho(x(\bar{t},\omega),z(\bar{t},\omega))<\frac{1}{n}+r(\bar{t},\omega)\}$ – $\left(F_{\bar{t}}\right)$-измеримо. По лемме 7 отображение $\Phi_n(t,\omega)=\Gamma(t,\omega)\cap\Psi_n(t,\omega)$ имеет $\left(\beta(T),F\right)$-измеримое (F_t)-согласованное аппроксимирующее семейство. В силу леммы 10 при каждом $y\in X$ функция $(t,\omega)\to\rho(y,\Phi_n(t,\omega))$ – $\left(\beta(T),F\right)$-измерима (F_t)-согласована. Так как при каждых фиксированных (t,y,ω) выполняется $\rho(y,\Phi_n(t,\omega))\xrightarrow[n\to\infty]{}\rho(y,\Phi_0(t,\omega))$, то при каждом $y\in X$ функция $(t,\omega)\to\rho(y,\Phi_0(t,\omega))$ – $\left(\beta(T),F\right)$-измерима (F_t)-согласована. В силу лемм 9, 10 отображение $(t,\omega)\to\Phi_0(t,\omega)$ имеет $\left(\beta(T),F\right)$-измеримое (F_t)-согласованное аппроксимирующее семейство селекторов. Любой такой селектор удовлетворяет равенству (2).

Аналогично теореме 3 доказывается следующий аналог теоремы Филиппова о неявной функции.

Теорема 4. *Пусть отображение* $f:T\times\Omega\times X\to Y$ *является* (F_t)-*согласованным отображением Каратеодори, отображения* $\Gamma:T\times\Omega\to\mathrm{comp}(X)$ *и* $x:T\times\Omega\to X$ – $\left(\beta(T),F\right)$-*измеримы и* (F_t)-*согласованы, а* $x(t,\omega)\in f(t,\omega,\Gamma(t,\omega))$ *для всех* (t,ω). *Тогда существует* $\left(\beta(T),F\right)$-*измеримый и* (F_t)-*согласованный селектор* $y:T\times\Omega\to X$ *отображения* Γ *такой, что для всех* $(t,\omega)\in T\times\Omega$ *выполнено равенство* $x(t,\omega)=f(t,\omega,y(t,\omega))$.

Доказательство. Определим отображения

$$(t,\omega)\to H(t,\omega)=\{x\in X:x\in\Gamma(t,\omega),\rho(f(t,\omega,x),x(t,\omega))=0\},$$

$$(t,\omega)\to P_n(t,\omega)=\{x\in X:\rho(f(t,\omega,x),x(t,\omega))<\frac{1}{n}\}.$$

При каждых (t,ω) множество H(t,ω) непусто. Так же, как и при доказательстве теоремы 3, можно проверить, что отображения $\Gamma(t,\omega)$ и $P_n(t,\omega)$ удовлетворяют условиям леммы 7. По лемме 7 отображение $Q_n(t,\omega)=\Gamma(t,\omega)\cap P_n(t,\omega)$ имеет $\left(\beta(T),F\right)$-измеримое (F_t)-согласованное аппроксимирующее семейство. В силу леммы 10 при каждом $y\in X$ функция $(t,\omega)\to\rho(y,Q_n(t,\omega))$ – $\left(\beta(T),F\right)$-измерима (F_t)-согласована. Так как при каждых фиксированных (t,y,ω) выполняется $\rho(y,Q_n(t,\omega))\xrightarrow[n\to\infty]{}\rho(y,H(t,\omega))$, то при каждом $y\in X$ функция $(t,\omega)\to\rho(y,H(t,\omega))$ – $\left(\beta(T),F\right)$-измерима (F_t)-согласована. В силу лемм 9, 10 отображение $(t,\omega)\to H(t,\omega)$ имеет $\left(\beta(T),F\right)$-измеримое (F_t)-согласованное аппроксимирующее семейство селекторов. Любой такой селектор является селектором с требуемыми в теореме свойствами.

Список использованных источников

1. Himmelberg, C. H. Measurable Relations / C. H. Himmelberg // Fundamenta Mathematicae. – 1975. – Vol. 87, № 1. – P. 53–72.

2. Филиппов, А. Ф. О некоторых вопросах теории оптимального регулирования / А. Ф. Филиппов // Вестн. МГУ. Сер. Математика и механика. – 1959. – № 2. – С. 25–32.

3. Kuratowski, K. A general theorem on selectors / K. Kuratowski, C. Ryll-Nardzewski // Bull. Pol. Acad. Sci. – 1965. – Vol. 13. – P. 397–403.

4. Castaing, C. Sur les multi-applications mesurables / C. Castaing // Rev. Franc. Inform. Recherche Operationnelle. – 1967. – Vol. 1, № 1. – P. 91–126.

5. Castaing, C. Convex analysis and measurable multifunctions / C. Castaing, M. Valadier. – Berlin: Springer Verlag, 1977. – 286 p. – (Lect Notes in Math).

6. Иоффе, А. Д. Теория экстремальных задач / А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров. – М.: Наука, 1974. – 480 с.

7. Толстоногов, А. А. Дифференциальные включения в банаховом пространстве / А. А. Толстоногов. – Новосибирск: Наука, 1986. – 296 с.

8. Aubin, J.-P. Set-Valued Analysis / J.-P. Aubin, H. Frankowska. – Boston: Birkhauser, 2009. – 460 p.

9. Kisielewisz, M. Differential Inclusions and Optimal Control / M. Kisielewisz. – Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 1991. – 240 p.

10. Hu Sh. Handbook of Multivalued Analysis / Hu Sh., N. S. Papageorgiou. – Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 1997. – Vol. 1: Theory

11. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений / Ю. Г. Борисович [и др.]. – М.: Комкнига, 2005. – 214 с.

12. Леваков, А. А. Стохастические дифференциальные уравнения / А. А. Леваков. – Минск: БГУ, 2014. – 231 с.

13. Васьковский, М. М. Существование β-мартингальных решений стохастических эволюционных функциональных уравнений параболического типа с измеримыми локально ограниченными коэффициентами / М. М. Васьковский // Дифференц. уравнения. – 2012. – Т. 48, № 8. – С. 1080–1095.

References

1. Himmelberg C.H. Measurable Relations. *Fundamenta Mathematicae*, 1975, vol. 87, no.1, pp. 53–72.

2. Filippov A.F. On some issues of optimal regulation theory. *Vestnik Moskovskogo Universiteta. Seriya 1. Matematika. Mekhanika*, 1959, no. 2, pp. 25–32. (In Russian).

3. Kuratowski K, Ryll-Nardzewski C. A general theorem on selectors. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences*, 1965, vol. 13, pp. 397–403.

4. Castaing C. Sur les multi-applications mesurables. *Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle*, 1967, vol. 1, no. 1, pp. 91–126. Doi: 10.1051/m2an/1967010100911

5. Castaing C., Valadier M. *Convex analysis and measurable multifunctions*. Berlin, Springer Verlag, 1977. 286 p. Doi: 10.1007/bfb0087685

6. Ioffe A.D., Tikhomirov V.M. *Theory of extremal problems*. Moscow, Nauka Publ., 1974. 480 p. (In Russian).

7. Tolstonogov A.A. *Differential inclusions in Banach space*. Novosibirsk, Nauka Publ., 1986. 296 p. (In Russian).

8. Aubin J.-P., Frankowska H. *Set-Valued Analysis*. Boston, Birkhauser, 2009. 460 p. Doi: 10.1007/978-0-8176-4848-0

9. Kisielewisz M. *Differential Inclusions and Optimal Control*. Warszawa, PWN-Pol. sci. publ.; Dordrecht etc., Kluwer acad. publ., 1991. 240 p. (In Poland).

10. Hu Sh., Papageorgiou N.S. *Handbook of Multivalued Analysis. Vol. 1, Theory.* Dordrecht etc, Kluwer Acad. Publ, 1997.

11. Borisovich Yu.G., Gel'man B.D., Myshkis A.D., Obukhovskii V.V. *An Introduction to Multifunctions and Differential Inclusions Theory.* Moscow, Komkniga Publ., 2005. 214 p. (In Russian).

12. Levakov A.A. *Stochastic Differential Equations*. Minsk, Belarusian State University, 2014. 231 p. (In Russian).

13. Vas'kovskii M.M. Existence of β-martingale solutions of stochastic evolution functional equations of parabolic type with measurable locally bounded coefficients. *Differential Equations*, 2012, vol. 48, no. 8, pp. 1065–1080. Doi: 10.1134/s0012266112080022

Информация об авторах

Леваков Анатолий Афанасьевич – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры высшей математики, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: levakov@tut.by

Задворный Ярослав Борисович – аспирант. Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: yaraslau.zadvorny@yandex.ru

Information about the authors

Levakov Anatoliy Afanasyevich – D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Professor of the Department of Higher Mathematics, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: levakov @tut.by

Zadvorny Yaraslau Barysovich – Postgraduate, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: yaraslau.zadvorny@yandex.ru

Для цитирования

Леваков, А. А. Существование измеримых согласованных селекторов многозначных отображений / А. А. Леваков, Я. Б. Задворный // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2017. – № 1. – С. 70–78.

For citation

Levakov A.A., Zadvorny Y.B. Existence of measurable adapted selectors of set-valued functions. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series], 2017, no. 1, pp. 70–78. (In Russian).