УДК 519.2

Е. Е. ЖУК

СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОТНЕСЕНИЕ РЕАЛИЗАЦИЙ СТАЦИОНАРНЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ К КЛАССАМ, ОПРЕДЕЛЕННЫМ В ПРОСТРАНСТВЕ КОВАРИАЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ

Белорусский государственный университет

(Поступила в редакцию 20.02.2015)

1. Математическая модель и постановка задачи. Пусть $\{x_t\}_{t\in Z}$ ($Z=\{0,\pm1,\pm2,\ldots\}$ – множество целых чисел) – стационарный в широком смысле временной ряд (ВР) [1, 2] с отсчетами $x_t\in R$, $t\in Z$, имеющими нулевое математическое ожидание:

$$\mathrm{E}\{x_t\}=0,\ t\in Z, \tag{1}$$

и ковариационную функцию

$$\sigma(\tau)=\sigma(-\tau)=\mathrm{Cov}\{x_t,x_{t+\tau}\}=\mathrm{E}\{x_t x_{t+\tau}\},\ t,\tau\in Z, \tag{2}$$

а дисперсия отсчетов конечна: $\mathrm{D}\{x_t\}=\sigma(0)<+\infty$.

ВР $\{x_t\}_{t\in Z}$ с учетом (1), (2) при весьма общих условиях регулярности представи́м в следующем виде [1, 2]:

$$x_t+\sum_{j=1}^{+\infty}\beta_j x_{t-j}=u_t,\ t\in Z;\quad \sum_{j=1}^{+\infty}\beta_j^2<+\infty, \tag{3}$$

где случайные величины $\{u_t\}_{t\in Z}$ (ошибки наблюдений [1, 2]) некоррелированы и имеют нулевые математические ожидания и одинаковую ограниченную дисперсию:

$$\mathrm{E}\{u_t\}=0,\ \mathrm{D}\{u_t\}=\mathrm{E}\{u_t^2\}=\sigma^2<+\infty; \tag{4}$$
$$\mathrm{E}\{u_t u_l\}=0,\ \forall t,l\in Z,\ l\neq t.$$

Разложение (3), (4) представляет собой авторегрессию бесконечного порядка [1, 2] и однозначно определяется коэффициентами авторегрессии $\beta=(\beta_j)_{j=1}^{+\infty}$.

С другой стороны, значения ковариационной функции $\sigma(\tau)$, $\tau\in Z$, из (2) взаимнооднозначно связаны с коэффициентами $\beta=(\beta_j)_{j=1}^{+\infty}$ так называемыми уравнениями Юла – Уокера [1, 2]:

$$\sigma(\tau)+\sum_{j=1}^{+\infty}\beta_j\sigma(\tau-j)=0,\ \tau\geq 1,$$

и ковариационная функция (2), в свою очередь, тоже однозначно определяет ВР $\{x_t\}_{t\in Z}$.

В условиях регулярности также сходится ряд [1, 2]:

$$\sum_{\tau=1}^{+\infty}|\sigma(\tau)|<+\infty, \tag{5}$$

что на практике означает «затухание» ковариационной функции $\sigma(\tau)$ с ростом лага τ:

$$\sigma(\tau) \to 0, \ \tau \to +\infty, \tag{6}$$

и имеет простой содержательный смысл: зависимость между отсчетами x_t и $x_{t+\tau}$ уменьшается с ростом расстояния между ними по времени (по лагу τ).

Пусть задано $L \geq 2$ классов $\{\Omega_i\}_{i \in S}$ стационарных в широком смысле ВР ($S = \{1, \ldots, L\}$ – множество номеров классов), определяемых своими ковариационными функциями $\{\sigma_{(i)}(\tau), \tau \in Z\}_{i \in S}$ [3]. Наблюдается реализация $X = \{x_t\}_{t=1}^{T}$ длительности T некоторого произвольного стационарного ВР, ковариационная функция $\sigma(\tau)$, $\tau \in Z$, которого неизвестна и, в отличие от [3], вообще говоря, не совпадает ни с одной из ковариационных функций $\{\sigma_{(i)}(\cdot)\}_{i \in S}$ (данный ВР не принадлежит ни к одному из классов $\{\Omega_i\}_{i \in S}$). Задача состоит в отнесении [4, 5] этого ВР к одному из классов $\{\Omega_i\}_{i \in S}$ по имеющейся реализации $X = \{x_t\}_{t=1}^{T}$. Предварительно необходимо определить критерий эффективности – принцип, по которому будет производиться отнесение.

2. Решающее правило в пространстве ковариационных функций и его риск. В предположении, что ковариационные функции $\{\sigma_{(i)}(\cdot)\}_{i \in S}$, определяющие классы $\{\Omega_i\}_{i \in S}$, также удовлетворяют условиям (5), (6):

$$\sigma_{(i)}(\tau) \to 0, \ \tau \to +\infty, \ i \in S, \tag{7}$$

выберем N – максимальное значение лага, при котором мы еще будем учитывать значения ковариационных функций, считая их отличными от нуля, что характеризуется величиной [3]:

$$\varepsilon(N) = \max\{|\sigma_{(i)}(\tau)| : \tau > N, i \in S\} \to 0, \ N \to +\infty.$$

Пусть N «значительно меньше» длительности T подлежащей отнесению реализации $X = \{x_t\}_{t=1}^{T}$:

$$\frac{N}{T} \to 0, \ N \to +\infty, \ T \to +\infty. \tag{8}$$

Заменим реализацию $X = \{x_t\}_{t=1}^{T}$ на статистическую оценку по ней первых $N+1$ ковариаций $\sigma^{N+1} = (\sigma(0), \sigma(1), \ldots, \sigma(N))' \in R^{N+1}$ ($\sigma(0) = \mathrm{D}\{x_t\}$ – дисперсия отсчетов, а «$'$» – символ транспонирования):

$$\hat{\sigma}^{N+1} = (\hat{\sigma}(0), \hat{\sigma}(1), \ldots, \hat{\sigma}(N))' \in R^{N+1}; \quad \hat{\sigma}(\tau) = \frac{1}{T-\tau} \sum_{t=1}^{T-\tau} x_t x_{t+\tau}, \ \tau = \overline{0, N}, \tag{9}$$

$\hat{\sigma}(\tau)$ – известная непараметрическая оценка [1–3] про реализации X ковариации $\sigma(\tau)$ с лагом τ.

Как и в [3], в условиях (6), (7) для отнесения реализации X к одному из классов $\{\Omega_i\}_{i \in S}$ будем использовать решающее правило (РП) следующего вида:

$$d = d(\hat{\sigma}^{N+1}; \{\sigma_{(i)}^{N+1}\}_{i \in S}) = \arg\min_{i \in S} \left| \hat{\sigma}^{N+1} - \sigma_{(i)}^{N+1} \right|, \tag{10}$$

где $\sigma_{(i)}^{N+1} = (\sigma_{(i)}(0), \sigma_{(i)}(1), \ldots, \sigma_{(i)}(N))' \in R^{N+1}$ – $(N+1)$-вектор ковариаций, описывающий класс Ω_i («центр» [2, 3] i-го класса), а само РП (10) является так называемым РП L-средних [2, 3] в метрике Евклида ($|z| = \sqrt{z'z}$ – евклидова норма вектора $z \in R^p$). Содержательный смысл РП (10) очевиден: оно относит временной ряд $\{x_t\}_{t \in Z}$ по его реализации $X = \{x_t\}_{t=1}^{T}$ к тому классу с номером $d \in S$, к «центру» которого ближе всего оценка ковариаций $\hat{\sigma}^{N+1}$ из (9).

Определим теперь меру эффективности РП (10). Как и в [4, 5], будем использовать обобщение традиционного риска [2, 3]:

$$r_T = \mathrm{P}\{d(\hat{\sigma}^{N+1}; \{\sigma_{(i)}^{N+1}\}_{i \in S}) \notin D^o\}, \quad D^o = \left\{k : \left|\sigma^{N+1} - \sigma_{(k)}^{N+1}\right| = \min_{i \in S} \left|\sigma^{N+1} - \sigma_{(i)}^{N+1}\right|\right\}, \tag{11}$$

где $D^o \subseteq S$ – множество номеров тех классов из $\{\Omega_i\}_{i\in S}$, к которым ВР $\{x_t\}_{t\in Z}$ ближе всего в смысле расстояний Евклида между истинным значением вектора ковариаций σ^{N+1} и «центрами» классов $\{\sigma_{(i)}^{N+1}\}_{i\in S}$ (учтено, что могут быть совпадающие по значению расстояния).

Чем меньше риск r_T из (11) ($0 \le r_T \le 1$ – вероятность не отнести ВР к ближайшему классу), тем эффективнее РП (10).

3. Асимптотическое вычисление риска. Случай двух классов. Исследуем риск (11) РП (10) в условиях асимптотики (8). Сформулируем сначала вспомогательный результат относительно оценки (9) [1, 3]. Представление (3), (4) можно переписать в виде так называемого разложения Вольда [1–3]:

$$x_t = \sum_{j=1}^{+\infty} \gamma_j u_{t-j} + u_t,\ t \in Z, \tag{12}$$

где коэффициенты $\gamma = (\gamma_j)_{j=1}^{+\infty}$ связаны с коэффициентами авторегрессии $\beta = (\beta_j)_{j=1}^{+\infty}$ из (3) соотношениями [1] ($\gamma_0 := 1, \beta_0 := 1$):

$$\sum_{j=0}^{\tau} \beta_{\tau-j}\gamma_j = 0,\ \tau \ge 1. \tag{13}$$

Введем обозначения:

$$n_p(z\,|\,\mu,\Sigma) = (2\pi)^{-\frac{p}{2}} (\det(\Sigma))^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(z-\mu)'\,\Sigma^{-1}(z-\mu)\right),\ z \in R^p,$$

– плотность p-мерного нормального (гауссовского) закона распределения вероятностей (закон $N_p(\mu,\Sigma)$ [2]) с вектором математического ожидания $\mu \in R^p$ и невырожденной ковариационной $(p\times p)$-матрицей Σ ($\det(\Sigma) \ne 0$).

Л е м м а. *Пусть значения коэффициентов* $\gamma = (\gamma_j)_{j=1}^{+\infty}$ *в* (12), (13) *таковы, что сходится ряд:* $\sum_{j=1}^{+\infty}|\gamma_j| < +\infty$, *а случайные величины* $\{u_t\}_{t\in Z}$ *независимы в совокупности и одинаково распределены по нормальному закону* $N_1(0,\sigma^2)$, $0 < \sigma^2 < +\infty$, *тогда статистическая оценка* $\hat\sigma^{N+1}$ *из* (9) *асимптотически нормально распределена:*

$$L\left\{\sqrt{T}(\hat\sigma^{N+1} - \sigma^{N+1})\right\} \to N_{N+1}(0_{N+1}, \Sigma_{N+1,N+1}),\ T \to +\infty, \tag{14}$$

где 0_{N+1} *– нулевой* $(N+1)$*-вектор, а ковариационная* $((N+1)\times(N+1))$*-матрица* $\Sigma_{N+1,N+1}$ *задается соотношениями:*

$$\Sigma_{N+1,N+1} = (w_{kl})_{k,l=0}^{N}:\ w_{kl} = w_{lk} = \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} \sigma(\tau)\big(\sigma(\tau+l-k) + \sigma(\tau-l-k)\big),\ 0 \le k \le l \le N. \tag{15}$$

Вычислим теперь риск r_T из (11). Отметим, что если $D^o = S$, то $r_T = 0$, $\forall T$, и принимаемое РП (10) решение не существенно. Если множество D^o состоит из одного элемента (один ближайший класс), то риск (11) упрощается:

$$r_T = \mathrm{P}\{d(\hat\sigma^{N+1}; \{\sigma_{(i)}^{N+1}\}_{i\in S}) \ne d^o\},\qquad d^o = \arg\min_{i\in S}\left|\sigma^{N+1} - \sigma_{(i)}^{N+1}\right|, \tag{16}$$

где $d^o \in S$ – истинный номер ближайшего класса.

Т е о р е м а. *Пусть в условиях леммы у ВР* $\{x_t\}_{t\in Z}$ *один ближайший класс среди* $\{\Omega_i\}_{i\in S}$:

$$\exists d^o \in S: \left|\sigma^{N+1} - \sigma_{(d^o)}^{N+1}\right| < \left|\sigma^{N+1} - \sigma_{(i)}^{N+1}\right|,\ \forall i \in S, i \ne d^o, \tag{17}$$

тогда риск r_T *РП* (10) *удовлетворяет асимптотическому соотношению:*

$$r_T / \tilde{r}_T \to 1,\ T \to +\infty; \tag{18}$$

$$\tilde{r}_T = 1 - \int_{R^{N+1}} \prod_{\substack{j \in S \\ j \neq d^o}} U\left(\left| z - \sigma_{(j)}^{N+1} \right| - \left| z - \sigma_{(d^o)}^{N+1} \right| \right) n_{N+1}\left(z \middle| \sigma^{N+1}, \frac{1}{T} \Sigma_{N+1,N+1} \right) dz,$$

где $U(y) = \{1,\ \text{если}\ y \geq 0;\ 0,\ \text{если}\ y < 0\}$ *– единичная функция Хэвисайда,* $\Sigma_{N+1,N+1}$ *– ковариационная матрица из* (15)*, а* $d^o \in S$ *– номер ближайшего класса из* (16)*.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В условиях (17) риск r_T РП (10) задается соотношениями (16), и для него справедлива цепочка равенств:

$$r_T = \mathrm{P}\{d(\hat{\sigma}^{N+1}; \{\sigma_{(i)}^{N+1}\}_{i \in S}) \neq d^o\} = 1 - \mathrm{P}\{d(\hat{\sigma}^{N+1}; \{\sigma_{(i)}^{N+1}\}_{i \in S}) = d^o\} =$$

$$= 1 - \mathrm{P}\left\{ \bigcap_{\substack{j \in S \\ j \neq d^o}} \left\{ \left| \hat{\sigma}^{N+1} - \sigma_{(j)}^{N+1} \right| \geq \left| \hat{\sigma}^{N+1} - \sigma_{(d^o)}^{N+1} \right| \right\} \right\},$$

откуда, воспользовавшись результатом (14) леммы, и устанавливаем справедливость (18).

С л е д с т в и е 1. *Пусть в условиях теоремы число классов равно двум* ($L = 2$, $S = \{1,2\}$)*, тогда*

$$\tilde{r}_T = \Phi\left(-\sqrt{T} \frac{\left| \left| \sigma^{N+1} - \sigma_{(1)}^{N+1} \right|^2 - \left| \sigma^{N+1} - \sigma_{(2)}^{N+1} \right|^2 \right|}{2\Delta} \right), \tag{19}$$

где $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} \exp\left(-\frac{y^2}{2} \right) dy$, $z \in R$ *– функция распределения вероятностей стандартного нормального закона* $N_1(0,1)$*, а величина*

$$\Delta = \sqrt{(\sigma_{(1)}^{N+1} - \sigma_{(2)}^{N+1})' \Sigma_{N+1,N+1} (\sigma_{(1)}^{N+1} - \sigma_{(2)}^{N+1})} \tag{20}$$

– аналог межклассового расстояния Махаланобиса [2].

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $L = 2$ из (18) получаем:

$$\tilde{r}_T = \begin{cases} 1 - \mathrm{P}\left\{ \left| \xi - \sigma_{(2)}^{N+1} \right|^2 - \left| \xi - \sigma_{(1)}^{N+1} \right|^2 \geq 0 \right\}, & \text{если} \quad d^o = 1; \\ \mathrm{P}\left\{ \left| \xi - \sigma_{(2)}^{N+1} \right|^2 - \left| \xi - \sigma_{(1)}^{N+1} \right|^2 \geq 0 \right\}, & \text{если} \quad d^o = 2, \end{cases} \tag{21}$$

где случайный $(N+1)$-вектор $\xi \in R^{N+1}$ распределен по нормальному закону $N_{N+1}(\sigma^{N+1}, \Sigma_{N+1,N+1} / T)$.

Преобразуем левую часть неравенства из (21):

$$\left| \xi - \sigma_{(2)}^{N+1} \right|^2 - \left| \xi - \sigma_{(1)}^{N+1} \right|^2 = 2\left(\xi - \frac{\sigma_{(1)}^{N+1} + \sigma_{(2)}^{N+1}}{2} \right)' \left(\sigma_{(1)}^{N+1} - \sigma_{(2)}^{N+1} \right) \in R \tag{22}$$

– случайная величина, линейная по ξ, и поэтому также имеющая нормальное распределение со следующими математическим ожиданием и дисперсией:

$$\left| \sigma^{N+1} - \sigma_{(2)}^{N+1} \right|^2 - \left| \sigma^{N+1} - \sigma_{(1)}^{N+1} \right|^2, \quad 4(\sigma_{(1)}^{N+1} - \sigma_{(2)}^{N+1})' \Sigma_{N+1,N+1} (\sigma_{(1)}^{N+1} - \sigma_{(2)}^{N+1}) / T = 4\Delta^2 / T,$$

где Δ – величина из (20).

С учетом нормировки случайной величины (22) до стандартного нормального закона $N_1(0,1)$ и известного свойства: $1-\Phi(z)=\Phi(-z),\ z\in R$, из (21) имеем:

$$\tilde{r}_T=\begin{cases}\Phi\left(-\sqrt{T}\,\dfrac{\left|\sigma^{N+1}-\sigma_{(2)}^{N+1}\right|^2-\left|\sigma^{N+1}-\sigma_{(1)}^{N+1}\right|^2}{2\Delta}\right), \text{если } d^o=1;\\ \Phi\left(\sqrt{T}\,\dfrac{\left|\sigma^{N+1}-\sigma_{(2)}^{N+1}\right|^2-\left|\sigma^{N+1}-\sigma_{(1)}^{N+1}\right|^2}{2\Delta}\right), \text{ если } d^o=2,\end{cases}$$

откуда из условия (17) и получаем (19).

С л е д с т в и е 2. *Для* $\tilde{r}_T$ *из* (19) *справедлива оценка сверху:*

$$\tilde{r}_T\le\tilde{r}_T^+,\quad \tilde{r}_T^+=\Phi\left(-\sqrt{T}\,\frac{\left|\sum_{\tau=0}^{N}\left(\left|\sigma(\tau)-\sigma_{(1)}(\tau)\right|^2-\left|\sigma(\tau)-\sigma_{(2)}(\tau)\right|^2\right)\right|}{2\sqrt{2(\sigma(0))^2+4\sum_{h=1}^{+\infty}(\sigma(h))^2}\ \sum_{\tau=0}^{N}\left|\sigma_{(1)}(\tau)-\sigma_{(2)}(\tau)\right|}\right). \tag{23}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость (23) непосредственно следует из (19) и полученной в [3] оценки сверху для величин типа Δ^2:

$$\Delta^2\le 2\left((\sigma(0))^2+2\sum_{h=1}^{+\infty}(\sigma(h))^2\right)\left(\sum_{\tau=0}^{N}\left|\sigma_{(1)}(\tau)-\sigma_{(2)}(\tau)\right|\right)^2.$$

Практическая значимость полученных выше асимптотических результатов состоит в том, что они при больших длительностях реализаций ($T\to+\infty$) позволяют приближенно вычислить риск: $r_T\approx\tilde{r}_T$ (на основе выражений для $\tilde{r}_T$ из (18), (19)) или оценить его сверху (используя (23)).

Из (19) следует, что $r_T\to 0, T\to+\infty$: с ростом длительности подлежащей отнесению реализации эффективность принимаемых решений повышается (значение риска уменьшается). Из (19) также видно, что риск уменьшается при увеличении различия между собой расстояний $\left|\sigma^{N+1}-\sigma_{(1)}^{N+1}\right|$ и $\left|\sigma^{N+1}-\sigma_{(2)}^{N+1}\right|$ между вектором ковариаций σ^{N+1} подлежащего отнесению ВР и векторами ковариаций $\sigma_{(1)}^{(N+1)}$ и $\sigma_{(2)}^{(N+1)}$ – «центрами» классов.

Отметим, что при $\left|\sigma^{N+1}-\sigma_{(1)}^{N+1}\right|=\left|\sigma^{N+1}-\sigma_{(2)}^{N+1}\right|$ риск заведомо равен нулю: $r_T=0,\ \forall T$, а выражение (19) приводит к неверному результату, поскольку получено в предположении (17): $\left|\sigma^{N+1}-\sigma_{(1)}^{N+1}\right|\ne\left|\sigma^{N+1}-\sigma_{(2)}^{N+1}\right|$.

Литература

1. *Андерсон Т.* Статистический анализ временных рядов. М., 1976.
2. *Харин Ю. С., Жук Е. Е.* Математическая и прикладная статистика. Минск, 2005.
3. *Жук Е. Е.* // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2004. № 4. С. 26–30.
4. *Жук Е. Е.* // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2012. № 4. С. 37–41.
5. *Жук Е. Е.* // Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и их приложения. Минск, 2014. С. 59–63.

E. E. ZHUK

STATISTICAL ASSIGNMENT OF REALIZATIONS OF THE STATIONARY TIME SERIES TO THE CLASSES DETERMINED IN A SPACE OF COVARIANCE FUNCTIONS

Summary

The problem of statistical assignment of realizations of the stationary time series to the fixed classes is considered. The decision rule in a space of covariance functions is proposed and its efficiency is investigated analytically. The case of two classes is studied.