ISSN 1561-2430 (print)

МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

УДК 519.65

Поступила в редакцию 10.03.2017
Received 10.03.2017

Л. А. Янович[1], М. В. Игнатенко[2]

[1]Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь
[2]Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

К ТЕОРИИ ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ ЭРМИТА – БИРКГОФА НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Данная статья посвящена задаче построения и исследования обобщенных интерполяционных формул Эрмита – Биркгофа для операторов, заданных на функциональных пространствах. Построение операторных интерполяционных формул основано на интерполяционных полиномах для скалярных функций относительно произвольной чебышевской системы. Приведенные формулы содержат интегралы Стилтьеса и дифференциалы Гато интерполируемого оператора и являются инвариантными для операторных многочленов специального класса. Получено явное представление погрешности операторного интерполирования обобщенными многочленами Эрмита – Биркгофа. На основе обобщенных интерполяционных формул Эрмита – Биркгофа построены интерполяционные многочлены для обыкновенных дифференциальных операторов произвольного порядка, заданных в пространстве непрерывно дифференцируемых функций. Рассмотрены также некоторые частные случаи формул Эрмита – Биркгофа такого вида для различных чебышевских систем скалярных функций. Полученные результаты могут быть использованы в теоретических исследованиях как основа построения приближенных методов решения некоторых нелинейных операторных уравнений, встречающихся в нелинейной динамике, математической физике.

Ключевые слова: операторный многочлен, операторное интерполирование, обобщенное интерполирование типа Эрмита – Биркгофа, дифференциальный оператор, дифференциал Гато, интеграл Стилтьеса, погрешность интерполяции

L. A. Yanovich[1], M. V. Ignatenko[2]

[1]Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
[2]Belarusian State University, Minsk, Belarus

TO THE THEORY OF HERMITE – BIRKHOFF INTERPOLATION OF NONLINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL OPERATORS

This article is devoted to the problem of construction and research of generalized interpolation formulas of Hermite – Birkhoff type for operators given on the function spaces. The construction of operator interpolation formulas is based on interpolation polynomials for scalar functions with respect to the arbitrary Chebyshev system of functions. The given formulas contain the Stieltjes integrals and the Gateaux differentials of an interpolated operator and are invariant for the special-class operator polynomials. An explicit representation of the error of the generalized Hermite – Birkhoff operator interpolation is obtained. On the basis of the generalized interpolation Hermite – Birkhoff formulas the interpolation polynomials for ordinary differential operators of arbitrary order given in the space of continuously differentiable functions are constructed. Some special cases of the Hermite – Birkhoff formulas of this type for various Chebyshev systems of scalar functions are also considered. The obtained results can be used in theoretical research as a basis for constructing approximate methods of solving some nonlinear operator equations that occur in nonlinear dynamics, mathematical physics.

Keywords: operator polynomial, operator interpolation, generalized Hermite – Birkhoff-type interpolation, differential operator, differential of Gateaux, integral of Stieltjes, interpolation error

Введение. Рассмотрим на числовом множестве $T \subseteq \mathbb{R}$ произвольную чебышевскую систему непрерывно дифференцируемых на T необходимое число раз функций $\{\varphi_k(t)\}_{k=0}^{q}$ и соответствующие многочлены вида

$$P_q(t) = \sum_{k=0}^{q} c_k \varphi_k(t), \tag{1}$$

где c_k – комплексные или действительные числа ($k = 0,1,\ldots,q$; $q = 0,1,2,\ldots$).

Пусть $I_{m,n} = \left(\varepsilon_{ij}\right)_{i,j=0}^{m,n}$ – матрица размерности (m + 1) × (n + 1), элементы ε_{ij} (i = 0,1,…,m; j = 0,1,…n) которой 0 или 1. Через $N_{m,n}$ обозначим множество пар чисел (i, j), которые определяют индексы ненулевых элементов этой матрицы, т. е. $N_{m,n} = \{(i,j) : \varepsilon_{ij} = 1,\ 0 \le i \le m,\ 0 \le j \le n\}$, в том числе $N_{m,0} = \{(i,0) : \varepsilon_{i0} = 1,\ 0 \le i \le m\}$, а через $M_{m,n} = N_{m,n} \setminus N_{m,0}$ – множество всех пар чисел (i, j), соответствующих ε_{ij} = 1 ($0 \le i \le m,\ 1 \le j \le n$).

Обобщенная интерполяционная задача Эрмита – Биркгофа для функции $f(t)$ $(t \in T)$ состоит в построении многочлена $B_{m,n}(t) \equiv B_{m,n}(f;t)$ вида (1), удовлетворяющего условиям

$$D_j B_{m,n}(t_i) = D_j f(t_i), \quad (i,j) \in N_{m,n}, \tag{2}$$

где узлы t_i $(i = 0,1,...,m)$ – различные точки из T; линейные дифференциальные операторы $D_j f(t) = \sum_{\nu=1}^{j} a_{\nu j} f^{(\nu)}(t)$, $(j = 1,2,\ldots,n)$; $a_{\nu j}$ – заданные числа, $f^{(\nu)}(t)$ – производная ν-го порядка функции $f(t)$, $D_0 f(t) = f(t)$. В обычной постановке этой интерполяционной задачи оператор $D_j f(t) = f^{(j)}(t)$.

Отметим, что даже в частных случаях задача Эрмита – Биркгофа не всегда разрешима [1, 2]. Исследование регулярности интерполирования типа Эрмита – Биркгофа, различные постановки этой задачи и некоторые ее применения имеются в монографии [3] и работах [4, 5]. Поэтому для данного общего случая предположим, что указанный интерполяционный многочлен $B_{m,n}(f;t)$ существует и записан в виде

$$B_{m,n}(f;t) = \sum_{(i,j)\in N_{m,n}} H_{ij}^{(m)}(t) D_j f(t_i). \tag{3}$$

Здесь $H_{ij}^{(m)}(t)$ – многочлены класса (1), удовлетворяющие условиям $D_\nu H_{ij}^{(m)}(t_k) = \delta_{ik}\delta_{\nu j}$, где δ_{ij} – символ Кронекера $\left(0 \le i,k \le m;\ 0 \le j,\nu \le n\right)$. В верхнем индексе ($m$) обозначения $H_{ij}^{(m)}(t)$ указан номер последней строки в соответствующей матрице $I_{m,n}$.

Для отдельных чебышевских систем функций в случае задачи Абеля – Гончарова интерполяционные многочлены вида (3), для которых справедливы равенства (2), ранее получены в [6], а для алгебраической системы функций и задачи Эрмита – Биркгофа специального вида – в работах [7–9].

Пусть $X = X(T)$ – заданное пространство гладких на T функций, на котором определен оператор $F : X \to Y$, где Y – также некоторое функциональное пространство. Далее будем рассматривать только те операторы, для которых ν-е дифференциалы Гато $\delta^\nu F[x; h_1, h_2, ..., h_\nu]$ содержат произведение функций $h_1(t), h_2(t), ..., h_\nu(t)$ $\left(h_i = h_i(t) \in X\right)$. Предположим, что если в качестве аргумента t функций $\varphi_k(t)$ и $f(t)$ и узлов интерполирования t_k взять соответственно $x \equiv x(t)$ и $x_k \equiv x_k(t)$ $(t \in T)$ – элементы пространства X (причем такие, что значения функций $x(t)$, $x_k(t)$ принадлежат $T \subseteq \mathbb{R}$), то формулы вида (3) существуют и для них выполняются условия, аналогичные условиям (2).

Будем рассматривать также операторные многочлены $P_{q,\nu} : X \to Y$ вида

$$P_{q,\nu}(x) = \sum_{k=0}^{q} \int_T a_k(\nu; s, t) \frac{d^\nu}{dt^\nu} \frac{\varphi_k(x(t))}{\sigma_m(x(t))} dt \ (\nu = 0,1,2,...), \tag{4}$$

где $a_k(\nu; s, t)$ – фиксированные функции $(s \in \mathbb{R},\ \ t \in T)$, а сумма фундаментальных многочленов $\sigma_m(x(t)) = \sum_{(i,0)\in N_{m,0}} H_{i0}^{(m)}(x(t))$ – постоянная или некоторая переменная на T функция. Предполагается также, что интегралы, входящие в формулу (4), существуют, а необходимые в дальнейшем преобразования допустимы.

Рассмотрим следующие операторно-дифференциальные выражения вида

$$\tilde{D}_j F(x) = \sum_{\nu=1}^{j} a_{\nu j} \delta^{\nu} F[x; h_1 h_2 ... h_j], \tag{5}$$

где $\delta^{\nu} F[x; h_1 h_2 ... h_j]$ – дифференциал Гато ν-го порядка оператора F в точке x, когда первые $(\nu - 1)$ направления $h_i = h_i(t) \equiv 1 \left(i = 1,2,...,\nu-1\right)$, а последнее ν-е направление является произведением вида $h_{\nu} = h_1 h_2 ... h_j \left(h_{\nu} = h_{\nu}(t) \in X\right)$. Далее считаем, что $\tilde{D}_0 F(x) = F(x)$. В частном случае при $a_{\nu j} = \delta_{\nu j}$ будем иметь $\tilde{D}_j F(x) = \delta^j F[x; h_1 h_2 ... h_j]$. Аналогично, через $\tilde{D}_j F[x; h]$ обозначим оператор вида (5), когда $h_{\nu}(t) \equiv 1$ для $\nu = 1,2,..., j-1$, а j-е направление равно $h(t)$.

Если $F(x) = f(x(t))$, где $f(u)$ – числовая функция, имеющая производную порядка j в точке $u = x(t)$, тогда справедливо равенство $\tilde{D}_j F(x) = D_j f(x) h_1(t) h_2(t) ... h_j(t)$, в котором все направления $h_i(t)$ $(i = 1,2,\ldots,j)$ входят в виде их произведения.

Заметим, что условия интерполирования требуют, как правило, совпадения значений интерполяционного и приближаемого оператора, а также их производных в заданных точках (узлах интерполирования). В приведенных далее формулах используются значения интерполируемого оператора на более широком множестве, чем совокупность узлов.

Интерполяционные формулы Эрмита – Биркгофа, содержащие дифференциалы интерполируемого оператора. Рассмотрим обыкновенные дифференциальные операторы $F: C^{(s)}(T) \to Y$ общего вида

$$F(x) = f\left(t, x(t), x'(t), x''(t), ..., x^{(s)}(t)\right), \tag{6}$$

где $x^{(k)}(t) = \dfrac{d^k x(t)}{dt^k}$ $(k = 0,1,...,s)$, $C^{(s)}(T)$ – пространство s раз непрерывно дифференцируемых на $T \subseteq R$ функций $x(t)$, функция $y = f(t, u_0, u_1, ..., u_s)$ переменных t, $u_0, u_1, ..., u_s$ задана на прямоугольнике $\Omega = T \times T_0 \times T_1 \times \cdots \times T_s$, где $T_i \subseteq R$ $(i = 0,1,...,s)$, а Y – некоторое функциональное пространство.

Ранее в работе [10] на основе формул вида (3) были построены обобщенные интерполяционные операторные многочлены, заданные в функциональных пространствах, которые содержат дифференциалы интерполируемого оператора и являются инвариантными относительно многочленов вида (4). Доказана [10] следующая

Т е о р е м а 1. *Для операторного многочлена*

$$B_{m,n}(F; x) = F(x_p) +$$

$$+ \sum_{(i,0) \in N_{m,0}} \int_0^1 \delta F\left[x_p + \tau(x_i - x_p); \frac{H_{i0}^{(m)}(x)}{\sigma_m(x)}(x_i - x_p)\right] d\tau + \sum_{(i,j) \in M_{m,n}} \tilde{D}_j F\left[x_i; \frac{H_{ij}^{(m)}(x)}{\sigma_m(x)} \sigma_m(x_i)\right], \tag{7}$$

где x_p – фиксированный узел, соответствующий элементу ε_{p0} множества $N_{m,0}$, выполняются интерполяционные условия

$$B_{m,n}(F; x_i) = F(x_i), (i,0) \in N_{m,0}; \quad \tilde{D}_j B_{m,n}(F; x_i) = \tilde{D}_j F(x_i), (i,j) \in M_{m,n}. \tag{8}$$

(*Когда множество $N_{m,0}$ пустое, то*

$$B_{m,n}(F; x) = \sum_{(i,j) \in M_{m,n}} \tilde{D}_j F\left[x_i; H_{ij}^{(m)}(x)\right]$$

и первая группа равенств в (8) *отсутствует.*) *Если формула* (3) *точна для обобщенных многочленов* (1) *при некотором фиксированном значении q и любых различных узлах $t_i \in T$ $(i = 0,1,...,m)$, то интерполяционная формула* (7) *будет инвариантна относительно операторных многочленов вида* (4) *с таким же значением q.*

Частный случай формулы (7) для $\sigma_m(x) \equiv 1$ получен в работе [11].

Заметим, что в интерполяционной задаче Эрмита – Биркгофа при добавлении узла x_{m+1} к системе узловых точек $x_0, x_1, \dots x_m$ размерность матрицы $I_{m,n}$ увеличивается: добавляется одна строка и k столбцов, где k может принимать значения 0,1,2… . В частности, для задачи Эрмита с двукратными узлами $k = 0$, а для задачи Абеля – Гончарова $k = 1$. При этом размерность новой матрицы $I_{m+1,n+k}$ становится равной $(m+2)\times(n+1+k)$, а множества $N_{m,0}$, $N_{m,n}$, $M_{m,n}$ преобразуются к виду $N_{m+1,0}$, $N_{m+1,n+k}$, $M_{m+1,n+k}$ соответственно. Отметим, что для одной и той же системы узлов $x_0, x_1, \dots x_m$ множества $M_{m,n}$ и $M_{m,n+k}$ (k = 0,1,2,…) – пары чисел (i, j), соответствующих $\varepsilon_{ij} = 1$ $\left(0 \le i \le m,\ 1 \le j \le n+k\right)$, совпадают.

В данной работе получим представление погрешности $r_{m,n}(x) = F(x) - B_{m,n}(F;x)$ интерполирования оператора $F(x)$ полиномом $B_{m,n}(F;x)$ вида (7).

Т е о р е м а 2. *Для погрешности* $r_{m,n}(x) = F(x) - B_{m,n}(F;x)$, *где* $B_{m,n}(F;x)$ *– интерполяционный полином* (7), *имеет место представление*

$$r_{m,n}(x) = \sum_{(i,0)\in N_{m+1,0}} \int_0^1 \delta F\left[x_p + \tau(x_i - x_p);\left\{\frac{H_{i0}^{(m+1)}(x)}{\sigma_{m+1}(x)} - \frac{H_{i0}^{(m)}(x)}{\sigma_m(x)}\right\}(x_i - x_p)\right]d\tau +$$

$$+\sum_{(i,j)\in M_{m+1,n+k}} \tilde{D}_j F\left[x_i;\frac{H_{ij}^{(m+1)}(x)}{\sigma_{m+1}(x)}\sigma_{m+1}(x_i) - \frac{H_{ij}^{(m)}(x)}{\sigma_m(x)}\sigma_m(x_i)\right], \qquad (9)$$

где x_p *– фиксированный узел, соответствующий элементу* ε_{p0} *множества* $N_{m,0}$; $x_{m+1} = x$; k *– разность числа столбцов матриц* $I_{m+1,n+k}$ и $I_{m,n}$; $H_{m+1,j}^{(m)}(x) \equiv 0$ $\left(j = 0,1,2,\dots\right)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, погрешность $r_{m,n}(x_\nu) = 0$ для $(\nu,0)\in N_{m,0}$. При $\nu = m+1$ с учетом тождества $M_{m,n} \equiv M_{m,n+k}$ $\left(k = 0,1,2,\dots\right)$ получим

$$r_{m,n}(x_{m+1}) = \sum_{(i,0)\in N_{m+1,0}} \int_0^1 \delta F\left[x_p + \tau(x_i - x_p);\frac{H_{i0}^{(m+1)}(x_{m+1})}{\sigma_{m+1}(x_{m+1})}(x_i - x_p)\right]d\tau +$$

$$+\sum_{(i,j)\in M_{m+1,n+k}} \tilde{D}_j F\left[x_i;\frac{H_{ij}^{(m+1)}(x_{m+1})}{\sigma_{m+1}(x_{m+1})}\sigma_{m+1}(x_i)\right] -$$

$$-\sum_{(i,0)\in N_{m+1,0}} \int_0^1 \delta F\left[x_p + \tau(x_i - x_p);\frac{H_{i0}^{(m)}(x_{m+1})}{\sigma_m(x_{m+1})}(x_i - x_p)\right]d\tau -$$

$$-\sum_{(i,j)\in M_{m+1,n+k}} \tilde{D}_j F\left[x_i;-\frac{H_{ij}^{(m)}(x_{m+1})}{\sigma_m(x_{m+1})}\sigma_m(x_i)\right] = F(x_{m+1}) -$$

$$-\left\{\sum_{(i,0)\in N_{m,0}} \int_0^1 \delta F\left[x_p + \tau(x_i - x_p);\frac{H_{i0}^{(m)}(x_{m+1})}{\sigma_m(x_{m+1})}(x_i - x_p)\right]d\tau + \sum_{(i,j)\in M_{m,n}} \tilde{D}_j F\left[x_i;\frac{H_{ij}^{(m)}(x_{m+1})}{\sigma_m(x_{m+1})}\sigma_m(x_i)\right]\right\} =$$

$$= F(x_{m+1}) - B_{m,n}(F;x_{m+1}).$$

Таким образом, справедливо равенство $r_{m,n}(x) = F(x) - B_{m,n}(F;x)$, т. е. выражение (9) действительно представляет погрешность интерполирования оператора $F(x)$ полиномом $B_{m,n}(F;x)$ вида (7). Теорема 2 доказана.

Далее, на основе формулы (7), построим интерполяционный многочлен для обыкновенного дифференциального оператора (6). Дифференциальный оператор (6) зависит от одной функциональной переменной $x(t)$, для него дифференциал Гато $\delta F[x;h]$ в точке $x = x(t)$ по направлению $h = h(t)$ $\left(x, h \in C^{(s)}(T)\right)$ вычисляется по правилу

$$\delta F[x;h]=\frac{\partial f}{\partial x}h(t)+\frac{\partial f}{\partial x'}h'(t)+\dots+\frac{\partial f}{\partial x^{(s)}}h^{(s)}(t)=\sum_{q=0}^{s}\frac{\partial}{\partial x^{(q)}}f\left(t,x(t),x'(t),x''(t),\dots,x^{(s)}(t)\right)h^{(q)}(t).$$

Дифференциал Гато второго порядка $\delta^2F[x;h_1,h_2]$ оператора F в точке x по направлениям h_1, h_2 равен

$$\delta^2F[x;h_1,h_2]=\sum_{q=0}^{s}\sum_{j=0}^{s}\frac{\partial^2}{\partial x^{(j)}\partial x^{(q)}}f\left(t,x(t),x'(t),x''(t),\dots,x^{(s)}(t)\right)h_1^{(j)}(t)h_2^{(q)}(t).$$

Обозначим $h_{1,j}=h_1h_2\dots h_j$ $(j=2,3,\dots)$. Тогда

$$\delta^2F[x;h_{1,2}]\equiv\delta^2F[x;1,h_{1,2}]=\sum_{q=0}^{s}\frac{\partial^2}{\partial x\partial x^{(q)}}f\left(t,x(t),x'(t),x''(t),\dots,x^{(s)}(t)\right)h_{1,2}^{(q)}(t).$$

Аналогично получим, что

$$\delta^{\nu}F[x;h_{1,\nu}]\equiv\delta^{\nu}F[x;\underbrace{1,1,\dots,1}_{\nu-1},h_{1,\nu}]=\sum_{q=0}^{s}\frac{\partial^{\nu}}{\partial x^{\nu-1}\partial x^{(q)}}f\left(t,x(t),x'(t),x''(t),\dots,x^{(s)}(t)\right)h_{1,\nu}^{(q)}(t).$$

Следовательно,

$$\tilde{D}_jF\left[x;h_{1,j}\right]=\sum_{\nu=1}^{j}\sum_{q=0}^{s}a_{\nu j}\frac{\partial^{\nu}}{\partial x^{\nu-1}\partial x^{(q)}}f\left(t,x(t),x'(t),x''(t),\dots,x^{(s)}(t)\right)h_{1,j}^{(q)}(t),\tag{10}$$

и для операторов (6) формула (7) преобразуется к виду

$$B_{m,n}(F,x)=f\left(t,x_p(t),x'_p(t),x''_p(t),\dots,x_p^{(s)}(t)\right)+$$
$$+\sum_{(i,0)\in N_{m,0}}\int_0^1\sum_{\nu=0}^{s}\frac{\partial}{\partial\upsilon_i^{(\nu)}}f\left(t,\upsilon_i(t,\tau),\frac{\partial}{\partial t}\upsilon_i(t,\tau),\dots,\frac{\partial^s}{\partial t^s}\upsilon_i(t,\tau)\right)\frac{\partial^{\nu}}{\partial t^{\nu}}\left\{\frac{H_{i0}^{(m)}(x(t))}{\sigma_m(x(t))}(x_i(t)-x_p(t))\right\}d\tau+$$
$$+\sum_{(i,j)\in M_{m,n}}\sum_{\nu=1}^{j}\sum_{q=0}^{s}a_{\nu j}\frac{\partial^{\nu}}{\partial x_i^{\nu-1}\partial x_i^{(q)}}f\left(t,x_i(t),x'_i(t),x''_i(t),\dots,x_i^{(s)}(t)\right)\frac{\partial^q}{\partial t^q}\left\{\frac{H_{ij}^{(m)}(x(t))}{\sigma_m(x(t))}\sigma_m(x_i(t))\right\},\tag{11}$$

где функция $\upsilon_i=\upsilon_i(t,\tau)=x_p(t)+\tau\left(x_i(t)-x_p(t)\right)$, $\upsilon_i^{(\nu)}=\dfrac{\partial^{\nu}\upsilon_i}{\partial t^{\nu}}$, $(i,0)\in N_{m,0}$.

Для погрешности $r_{m,n}(x)=F(x)-B_{m,n}(F;x)$, где $F(x)$ – обыкновенный дифференциальный оператор вида (6), а $B_{m,n}(F;x)$ – интерполяционный полином (11), представление (9) примет вид

$$r_{m,n}(x)=\sum_{(i,0)\in N_{m+1,0}}\int_0^1\sum_{\nu=0}^{s}\frac{\partial}{\partial\upsilon_i^{(\nu)}}f\left(t,\upsilon_i(t,\tau),\frac{\partial}{\partial t}\upsilon_i(t,\tau),\dots,\frac{\partial^s}{\partial t^s}\upsilon_i(t,\tau)\right)\times$$
$$\times\frac{\partial^{\nu}}{\partial t^{\nu}}\left\{\left(\frac{H_{i0}^{(m+1)}(x(t))}{\sigma_{m+1}(x(t))}-\frac{H_{i0}^{(m)}(x(t))}{\sigma_m(x(t))}\right)(x_i(t)-x_p(t))\right\}d\tau+$$
$$+\sum_{(i,j)\in M_{m+1,n+k}}\sum_{\nu=1}^{j}\sum_{q=0}^{s}a_{\nu j}\frac{\partial^{\nu}}{\partial x_i^{\nu-1}\partial x_i^{(q)}}f\left(t,x_i(t),x'_i(t),x''_i(t),\dots,x_i^{(s)}(t)\right)\times$$
$$\times\frac{\partial^q}{\partial t^q}\left\{\frac{H_{ij}^{(m+1)}(x(t))}{\sigma_{m+1}(x(t))}\sigma_{m+1}(x_i(t))-\frac{H_{ij}^{(m)}(x(t))}{\sigma_m(x(t))}\sigma_m(x_i(t))\right\},$$

где, как и ранее, $x_{m+1}=x$, k – разность числа столбцов матриц $I_{m+1,n+k}$ и $I_{m,n}$, $H_{m+1,j}^{(m)}(x)\equiv 0$ $(j=0,1,2,\dots)$.

В частности, если через $h_{m,k}(x)$ и $q_{m,k}(x)$ обозначить фундаментальные многочлены Эрмита в случае двукратных узлов $x_0, x_1, \ldots x_m$ относительно чебышевской системы функций $\{\varphi_q(t)\}_{q=0}^{2m+1}$, для которых $h_{m,k}(x_j) = q'_{m,k}(x_j) = \delta_{kj}$, $h'_{m,k}(x_j) = q_{m,k}(x_j) = 0$ $(k, j = 0,1,\ldots,m)$, $\sigma_m(x) = \sum\limits_{k=0}^{m} h_{m,k}(x) \equiv 1$, то при $p = 0$ формула (7) принимает вид

$$B_{m,1}(F;x) = F(x_0) + \sum_{k=0}^{m} \delta F[x_k; q_{m,k}(x)] + \sum_{k=1}^{m} \int_0^1 \delta F[x_0 + \tau(x_k - x_0); h_{m,k}(x)(x_k - x_0)] d\tau. \tag{12}$$

В работе [12] для обыкновенного дифференциального оператора (6) на основе операторного многочлена (12) построен интерполяционный многочлен

$$B_{m,1}(F;x) = f\left(t, x_0(t), x'_0(t), x''_0(t), \ldots, x_0^{(s)}(t)\right) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{s} \frac{\partial}{\partial x_k^{(\nu)}} f\left(t, x_k(t), x'_k(t), x''_k(t), \ldots, x_k^{(s)}(t)\right) \frac{\partial^\nu}{\partial t^\nu} q_{m,k}(x(t)) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \int_0^1 \sum_{\nu=0}^{s} \frac{\partial}{\partial \upsilon_k^{(\nu)}} f\left(t, \upsilon_k(t,\tau), \frac{\partial}{\partial t}\upsilon_k(t,\tau), \ldots, \frac{\partial^s}{\partial t^s}\upsilon_k(t,\tau)\right) \frac{\partial^\nu}{\partial t^\nu} \left\{h_{m,k}(x(t))(x_k(t) - x_0(t))\right\} d\tau, \tag{13}$$

где $\upsilon_k = \upsilon_k(t,\tau) = x_0(t) + \tau\left(x_k(t) - x_0(t)\right)$, $\upsilon_k^{(\nu)} = \dfrac{\partial^\nu \upsilon_k}{\partial t^\nu}$, $k = 1,2,\ldots,m$.

Погрешность интерполирования многочленом (13) представима [12] в виде

$$r_{m,1}(x) = \sum_{k=1}^{m+1} \int_0^1 \sum_{\nu=0}^{s} \frac{\partial}{\partial \upsilon_k^{(\nu)}} f\left(t, \upsilon_k(t,\tau), \frac{\partial}{\partial t}\upsilon_k(t,\tau), \ldots, \frac{\partial^s}{\partial t^s}\upsilon_k(t,\tau)\right) \times$$

$$\times \frac{\partial^\nu}{\partial t^\nu} \left\{\left(h_{m+1,k}(x) - h_{m,k}(x)\right)(x_k(t) - x_0(t))\right\} d\tau +$$

$$+ \sum_{k=0}^{m+1} \sum_{\nu=0}^{s} \frac{\partial}{\partial x_k^{(\nu)}} f\left(t, x_k(t), x'_k(t), x''_k(t), \ldots, x_k^{(s)}(t)\right) \frac{\partial^\nu}{\partial t^\nu} \left\{q_{m+1,k}(x(t)) - q_{m,k}(x(t))\right\},$$

где $x_{m+1} = x$, $h_{m,m+1}(x) = q_{m,m+1}(x) \equiv 0$.

П р и м е р. Построим интерполяционный многочлен $B_{1,1}(F;x)$ вида (13) для дифференциального оператора

$$F(x) = f\left(t, x(t), x'(t), x''(t)\right) = x''(t) + \alpha x'(t) + \beta x^p(t) + \gamma x(t), \tag{14}$$

где p – целое фиксированное неотрицательное число. Матрица второго порядка $I_{1,1}$, соответствующая случаю $m = 1$, $n = 1$, имеет вид $I_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. В качестве фундаментальных многочленов интерполирования $h_{1,k}(x)$ и $q_{1,k}(x)$, $k = 0,1$, выберем алгебраические многочлены

$$h_{1,k}(x) = l_{1,k}^2(x)\left(1 + 2l_{1,1-k}(x)\right),$$

$$q_{1,k}(x) = l_{1,k}^2(x)\left(x - x_k\right),$$

где $l_{1,k}(x) = \dfrac{x - x_{1-k}}{x_k - x_{1-k}}$, $k = 0,1$, а в качестве узлов интерполирования $x_k(t)$, $k = 0,1$, – тригонометрическую систему функций $x_0(t) \equiv 2$, $x_1(t) = \sin t$. Тогда функция $\upsilon_1(t,\tau) = 2 + \tau\left(\sin t - 2\right)$, значение $\sigma_1(x) \equiv 1$, а формула (13) при $m = 1$ примет вид

$$B_{1,1}(F;x)=f\left(t,2,0,0\right)+\sum_{k=0}^{1}\sum_{\nu=0}^{2}\frac{\partial}{\partial x_k{}^{(\nu)}}f\left(t,x_k(t),x_k'(t),x_k''(t)\right)\frac{\partial^\nu}{\partial t^\nu}q_{1,k}(x(t))+$$

$$+\int_0^1\sum_{\nu=0}^{2}\frac{\partial}{\partial \upsilon_1^{(\nu)}}f\left(t,\upsilon_1(t,\tau),\frac{\partial}{\partial t}\upsilon_1(t,\tau),\frac{\partial^2}{\partial t^2}\upsilon_1(t,\tau)\right)\frac{\partial^\nu}{\partial t^\nu}\left\{h_{1,1}(x(t))(\sin t-2)\right\}d\tau. \tag{15}$$

Преобразуем равенство (15) с учетом представления (14). Имеем

$$B_{1,1}(F;x)=2^p\beta+2\gamma+\left(\beta p2^{p-1}+\gamma\right)q_{1,0}(x(t))+\alpha\sum_{k=0}^{1}\frac{\partial}{\partial t}q_{1,k}\left(x(t)\right)+$$

$$+\sum_{k=0}^{1}\frac{\partial^2}{\partial t^2}q_{1,k}\left(x(t)\right)+\left(\beta p\sin^{p-1}t+\gamma\right)q_{1,1}(x(t))+$$

$$+\int_0^1\left(\beta p\upsilon_1^{p-1}(t,\tau)+\gamma\right)h_{1,1}(x(t))(\sin t-2)+\alpha\frac{\partial}{\partial t}\left\{h_{1,1}(x(t))(\sin t-2)\right\}+\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left\{h_{1,1}(x(t))(\sin t-2)\right\}d\tau.$$

Далее воспользуемся равенствами

$$\upsilon_1^{p-1}(t,\tau)=\left(2+\tau\left(\sin t-2\right)\right)^{p-1}=2^{p-1}\sum_{k=0}^{p-1}C_{p-1}^k\frac{\tau^k(\sin t-2)^k}{2^k},$$

$$\sum_{k=0}^{p-1}\frac{p!(\sin t-2)^k}{(k+1)!(p-1-k)!2^k}=\frac{2}{(\sin t-2)}\left(\sum_{k=0}^{p}\frac{p!(\sin t-2)^k}{k!(p-k)!2^k}-1\right)=\frac{2^{1-p}\sin^p t-2}{\sin t-2}.$$

Получим, что для оператора (14) имеет место следующая интерполяционная формула Эрмита:

$$F(x)\approx B_{1,1}(F;x)=2^p\beta+2\gamma+\left(\beta p2^{p-1}+\gamma\right)q_{1,0}(x(t))+\alpha\sum_{k=0}^{1}\frac{\partial}{\partial t}q_{1,k}\left(x(t)\right)+$$

$$+\sum_{k=0}^{1}\frac{\partial^2}{\partial t^2}q_{1,k}\left(x(t)\right)+\left(\beta p\sin^{p-1}t+\gamma\right)q_{1,1}(x(t))+$$

$$+\beta\left(\sin^p t-2^p\right)h_{1,1}(x(t))+\gamma(\sin t-2)h_{1,1}(x(t))+$$

$$+\alpha\frac{\partial}{\partial t}\left\{h_{1,1}(x(t))(\sin t-2)\right\}+\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left\{h_{1,1}(x(t))(\sin t-2)\right\}. \tag{16}$$

Непосредственными вычислениями убедимся в справедливости интерполяционных условий

$$B_{1,1}^{(j)}(F;x_i)=F^{(j)}(x_i)\quad (i,j=0,1). \tag{17}$$

Действительно, в силу равенств $h_{1,1}(2)=0,\ q_{1,0}(2)=0$ и $q_{1,1}(2)=0$ получим, что $B_{1,1}(F;2)=$ $=2^p\beta+2\gamma=F(2)$. Так как $h_{1,1}(\sin t)=1,\ q_{1,0}(\sin t)=q_{1,1}(\sin t)=0,$ то

$$B_{1,1}(F;\sin t)=2^p\beta+2\gamma+\beta\left(\sin^p t-2^p\right)+\gamma(\sin t-2)+\alpha\cos t-\sin t=$$

$$=-\sin t+\alpha\cos t+\beta\sin^p t+\gamma\sin t=F(\sin t).$$

Далее, поскольку

$$q_{1,0}'(2)=q_{1,1}'(\sin t)=1,$$

$$q'_{1,1}(2) = h'_{1,1}(2) = 0,$$

$$q'_{1,0}(\sin t) = h'_{1,1}(\sin t) = 0,$$

то

$$B'_{1,1}(F;2) = \beta p 2^{p-1} + \gamma = F'(2),$$

$$B'_{1,1}(F;\sin t) = \beta p \sin^{p-1} t + \gamma = F'(\sin t).$$

Таким образом, интерполяционная формула Эрмита (16) удовлетворяет условиям (17).

Интерполяционные формулы Эрмита – Биркгофа, содержащие дифференциалы и интеграл Стилтьеса интерполируемого оператора. В работе [10] на основе формул вида (3) построены обобщенные интерполяционные операторные многочлены, заданные в функциональных пространствах, содержащие дифференциалы и интегралы Стилтьеса интерполируемого оператора. Интерполяционные формулы инвариантны относительно многочленов вида (4). Введем числовую функцию

$$\chi(\tau,\ t) = \begin{cases} 1, & \tau \ge t; \\ 0, & \tau < t, \end{cases}$$

где $0 < \tau < 1$, а $\chi(0,\ t) \equiv 0$ и $\chi(1,\ t) \equiv 1$. Для этого класса интерполяционных многочленов доказана [10] следующая

Т е о р е м а 3. *Операторный многочлен*

$$B_{m,n}(F;x) = F(x_p) +$$

$$+ \sum_{(i,0)\in N_{m,0}} \int_0^1 \frac{H_{i0}^{(m)}\left[x(\tau)\right]}{\sigma_m\left[x(\tau)\right]} d_\tau F[x_p(\cdot) + \chi(\tau,\cdot)(x_i(\cdot) - x_p(\cdot))] + \sum_{(i,j)\in M_{m,n}} \tilde{D}_j F\left[x_i; \frac{H_{ij}^{(m)}(x)}{\sigma_m(x)} \sigma_m(x_i)\right], \quad (18)$$

где, как и в теореме 1, x_p *– фиксированный узел, соответствующий элементу* ε_{p0} *матрицы* $I_{m,n}$, *удовлетворяет интерполяционным условиям* (8). (*Когда множество* $N_{m,0}$ *пустое, то*

$$B_{m,n}(F;x) = \sum_{(i,j)\in M_{m,n}} \tilde{D}_j F\left[x_i; H_{ij}^{(m)}(x)\right]$$

и первая группа равенств в (8) *отсутствует.*) *Если формула* (3) *точна для обобщенных многочленов* (1) *при некотором фиксированном значении q и любых различных узлах* $t_i \in T$ $(i = 0,1,\dots,m)$, *то интерполяционная формула* (18) *будет инвариантна относительно операторных многочленов вида* (4) *с таким же значением q в случае* $\nu = 0$ *и* $T = [0,1]$.

Отметим, что частный случай формулы (18) для $\sigma_m(x) \equiv 1$ рассмотрен в работе [13].

Далее докажем теорему о представлении погрешности $r_{m,n}(x) = F(x) - B_{m,n}(F;x)$ интерполирования оператора $F(x)$ полиномом $B_{m,n}(F;x)$ вида (18).

Т е о р е м а 4. *Для погрешности* $r_{m,n}(x) = F(x) - B_{m,n}(F;x)$, *где* $B_{m,n}(F;x)$ *– интерполяционный полином* (18), *справедливо представление*

$$r_{m,n}(x) = \sum_{(i,0)\in N_{m+1,0}} \int_0^1 \left\{ \frac{H_{i0}^{(m+1)}\left[x(\tau)\right]}{\sigma_{m+1}\left[x(\tau)\right]} - \frac{H_{i0}^{(m)}\left[x(\tau)\right]}{\sigma_m\left[x(\tau)\right]} \right\} d_\tau F[x_p(\cdot) + \chi(\tau,\cdot)(x_i(\cdot) - x_p(\cdot))] +$$

$$+ \sum_{(i,j)\in M_{m+1,n+k}} \tilde{D}_j F\left[x_i; \frac{H_{ij}^{(m+1)}(x)}{\sigma_{m+1}(x)} \sigma_{m+1}(x_i) - \frac{H_{ij}^{(m)}(x)}{\sigma_m(x)} \sigma_m(x_i)\right], \quad (19)$$

где x_p *– фиксированный узел, соответствующий элементу* ε_{p0} *множества* $N_{m,0}$, $x_{m+1} = x$, k *– разность числа столбцов матриц* $I_{m+1,n+k}$ и $I_{m,n}$, $H_{m+1,j}^{(m)}(x) \equiv 0$ $\left(j = 0,1,2,\dots\right)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, в случае $(\nu,0)\in N_{m,0}$ погрешность $r_{m,n}(x_\nu)=0$. Учитывая, что $M_{m,n}\equiv M_{m,n+k}$ $(k=0,1,2,...)$ при $\nu = m+1$, получим

$$r_{m,n}(x_{m+1})=\sum_{(i,0)\in N_{m+1,0}}\int_0^1\frac{H_{i0}^{(m+1)}[x_{m+1}(\tau)]}{\sigma_{m+1}[x_{m+1}(\tau)]}d_\tau F[x_p(\cdot)+\chi(\tau,\cdot)(x_i(\cdot)-x_p(\cdot))]+$$

$$+\sum_{(i,j)\in M_{m+1,n+k}}\tilde{D}_jF\left[x_i;\frac{H_{ij}^{(m+1)}(x_{m+1})}{\sigma_{m+1}(x_{m+1})}\sigma_{m+1}(x_i)\right]-$$

$$-\sum_{(i,0)\in N_{m+1,0}}\int_0^1\frac{H_{i0}^{(m)}[x_{m+1}(\tau)]}{\sigma_m[x_{m+1}(\tau)]}d_\tau F[x_p(\cdot)+\chi(\tau,\cdot)(x_i(\cdot)-x_p(\cdot))]d\tau-$$

$$-\sum_{(i,j)\in M_{m+1,n+k}}\tilde{D}_jF\left[x_i;-\frac{H_{ij}^{(m)}(x_{m+1})}{\sigma_m(x_{m+1})}\sigma_m(x_i)\right]=F(x_{m+1})-$$

$$-\left\{\sum_{(i,0)\in N_{m,0}}\int_0^1\frac{H_{i0}^{(m)}[x_{m+1}(\tau)]}{\sigma_m[x_{m+1}(\tau)]}d_\tau F[x_p(\cdot)+\chi(\tau,\cdot)(x_i(\cdot)-x_p(\cdot))]+\right.$$

$$\left.+\sum_{(i,j)\in M_{m,n}}\tilde{D}_jF\left[x_i;\frac{H_{ij}^{(m)}(x_{m+1})}{\sigma_m(x_{m+1})}\sigma_m(x_i)\right]\right\}=F(x_{m+1})-B_{m,n}(F;x_{m+1}).$$

Таким образом, выражение (19) действительно задает погрешность $r_{m,n}(x)=F(x)-B_{m,n}(F;x)$ интерполирования оператора $F(x)$ полиномом $B_{m,n}(F;x)$ вида (18). Теорема 4 доказана.

Для обыкновенного дифференциального оператора (6) с учетом равенства (10) формула (18) преобразуется к виду

$$B_{m,n}(F,x)=f\left(t,x_p(t),x_p'(t),x_p''(t),...,x_p^{(s)}(t)\right)+$$

$$+\sum_{(i,0)\in N_{m,0}}\int_0^1\frac{H_{i0}^{(m)}[x(\tau)]}{\sigma_m[x(\tau)]}d_\tau f\left(\theta,\xi_i(\theta,\tau),\frac{\partial}{\partial\theta}\xi_i(\theta,\tau),...,\frac{\partial^s}{\partial\theta^s}\xi_i(\theta,\tau)\right)+$$

$$+\sum_{(i,j)\in M_{m,n}}\sum_{\nu=1}^{j}\sum_{q=0}^{s}a_{\nu j}\frac{\partial^\nu}{\partial x_i^{\nu-1}\partial x_i^{(q)}}f\left(t,x_i(t),x_i'(t),x_i''(t),...,x_i^{(s)}(t)\right)\frac{\partial^q}{\partial t^q}\left\{\frac{H_{ij}^{(m)}(x(t))}{\sigma_m(x(t))}\sigma_m(x_i(t))\right\},\quad(20)$$

где функция $\xi_i(\theta,\tau)=x_p(\theta)+\chi(\tau,\theta)\left(x_i(\theta)-x_p(\theta)\right)$, $(i,0)\in N_{m,0}$.

Погрешность $r_{m,n}(x)=F(x)-B_{m,n}(F;x)$, как частный случай формулы (19), где $F(x)$ – оператор вида (6), а $B_{m,n}(F;x)$ – интерполяционный полином (20), примет вид

$$r_{m,n}(x)=\sum_{(i,0)\in N_{m+1,0}}\int_0^1\left(\frac{H_{i0}^{(m+1)}[x(t)]}{\sigma_{m+1}[x(t)]}-\frac{H_{i0}^{(m)}[x(t)]}{\sigma_m[x(t)]}\right)d_\tau f\left(\theta,\xi_i(\theta,\tau),\frac{\partial}{\partial\theta}\xi_i(\theta,\tau),...,\frac{\partial^s}{\partial\theta^s}\xi_i(\theta,\tau)\right)+$$

$$+\sum_{(i,j)\in M_{m+1,n+k}}\sum_{\nu=1}^{j}\sum_{q=0}^{s}a_{\nu j}\frac{\partial^\nu}{\partial x_i^{\nu-1}\partial x_i^{(q)}}f\left(t,x_i(t),x_i'(t),x_i''(t),...,x_i^{(s)}(t)\right)\times$$

$$\times\frac{\partial^q}{\partial t^q}\left\{\frac{H_{ij}^{(m+1)}(x(t))}{\sigma_{m+1}(x(t))}\sigma_{m+1}(x_i(t))-\frac{H_{ij}^{(m)}(x(t))}{\sigma_m(x(t))}\sigma_m(x_i(t))\right\},$$

где $x_{m+1}=x$, k – разность числа столбцов матриц $I_{m+1,n+k}$ и $I_{m,n}$, $H_{m+1,j}^{(m)}(x)\equiv 0$ $(j=0,1,2,...)$.

В частности, в случае двукратных узлов $x_0, x_1, \ldots x_m$ относительно чебышевской системы функций $\left\{\varphi_q(t)\right\}_{q=0}^{2m+1}$ с фундаментальными многочленами Эрмита $h_{m,k}(x)$ и $q_{m,k}(x)$, для которых

$$h_{m,k}(x_j) = q'_{m,k}(x_j) = \delta_{kj},$$

$$h'_{m,k}(x_j) = q_{m,k}(x_j) = 0 \quad (k, j = 0,1,\ldots,m),$$

$$\sigma_m(x) = \sum_{k=0}^{m} h_{m,k}(x) \equiv 1,$$

формула (18) при $p = 0$ принимает более простой вид

$$B_{m,1}(F;x) = F(x_0) + \sum_{k=0}^{m} \delta F[x_k; q_{m,k}(x)] + \sum_{k=1}^{m} \int_0^1 h_{m,k}\left(x(\tau)\right) d_\tau F[x_0(\cdot) + \chi(\tau,\cdot)(x_k(\cdot) - x_0(\cdot))]. \quad (21)$$

Для обыкновенного дифференциального оператора (6) интерполяционный операторный многочлен (21) преобразуется к виду

$$B_{m,1}(F;x) = f\left(t, x_0(t), x'_0(t), x''_0(t), \ldots, x_0^{(s)}(t)\right) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{s} \frac{\partial}{\partial x_k^{(\nu)}} f\left(t, x_k(t), x'_k(t), x''_k(t), \ldots, x_k^{(s)}(t)\right) \frac{\partial^\nu}{\partial t^\nu} q_{m,k}(x(t)) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \int_0^1 h_{m,k}\left(x(\tau)\right) d_\tau f\left(\theta, \xi_k(\theta,\tau), \frac{\partial}{\partial\theta}\xi_k(\theta,\tau), \ldots, \frac{\partial^s}{\partial\theta^s}\xi_k(\theta,\tau)\right), \quad (22)$$

где $\xi_k(\theta,\tau) = x_0(\theta) + \chi(\tau,\theta)\left(x_k(\theta) - x_0(\theta)\right)$, $k = 1,2,\ldots,m$.

Погрешность интерполирования $r_{m,1}(x) = F(x) - B_{m,1}(F;x)$ многочленом (22) имеет представление

$$r_{m,1}(x) = \sum_{k=1}^{m+1} \int_0^1 \left\{h_{m+1,k}\left(x(\tau)\right) - h_{m,k}\left(x(\tau)\right)\right\} d_\tau f\left(\theta, \xi_k(\theta,\tau), \frac{\partial}{\partial\theta}\xi_k(\theta,\tau), \ldots, \frac{\partial^s}{\partial\theta^s}\xi_k(\theta,\tau)\right) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{m+1} \sum_{\nu=0}^{s} \frac{\partial}{\partial x_k^{(\nu)}} f\left(t, x_k(t), x'_k(t), x''_k(t), \ldots, x_k^{(s)}(t)\right) \frac{\partial^\nu}{\partial t^\nu}\left\{q_{m+1,k}(x(t)) - q_{m,k}(x(t))\right\},$$

где $x_{m+1} = x$, $h_{m,m+1}(x) = q_{m,m+1}(x) \equiv 0$.

Частные случаи формул Эрмита – Биркгофа. Рассмотрим интерполяционные операторные формулы Эрмита – Биркгофа, соответствующие различным матрицам $I_{m,n}$.

1. Если множество $N_{m,0} = \{(0,0)\}$, то $\sigma_m(x(t)) = H_{00}^{(m)}(x(t))$. В этом случае вторая группа слагаемых в правой части формул (7) и (18) будет отсутствовать и соответствующий интерполяционный многочлен запишется как

$$B_{m,n}(x) = F(x_0) + \sum_{(i,j)\in M_{m,n}} \tilde{D}_j F\left[x_i; \frac{H_{ij}^{(m)}(x) H_{00}^{(m)}(x_i)}{H_{00}^{(m)}(x)}\right], \quad (23)$$

где x_0 – фиксированный узел, соответствующий ненулевому элементу ε_{00} матрицы $I_{m,n}$.

Рассмотрим частный случай формулы (23). В качестве чебышевской системы $\{\varphi_k(t)\}_{k=0}^{2}$ выберем экспоненциальную на $\mathbb{R}$ систему функций $\{e^t, e^{2t}, e^{3t}\}$, а в качестве D_j – операторы дифференцирования: $D_j\varphi(t) = \varphi^{(j)}(t)$, и, соответственно, $\tilde{D}_j F(x) = \delta^j F[x; h_1 h_2 \ldots h_j]$, $j = 1,2$. Пусть матрица

$$I_{1,2}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Тогда для многочлена Эрмита – Биркгофа вида (23), удовлетворяющего условиям

$$B_{1,2}(x_0)=F(x_0);\, \delta B_{1,2}[x_1;h_1]=\delta F[x_1;h_1],\, \delta^2 B_{1,2}[x_1;h_1h_2]=\delta^2 F[x_1;h_1h_2],$$

справедливо представление

$$B_{1,2}(x)=F(x_0)+\sum_{j=1}^{2}\delta^j F\left[x_1;\frac{H_{1j}^{(1)}(x)H_{00}^{(1)}(x_1)}{H_{00}^{(1)}(x)}\right],$$

где фундаментальные многочлены интерполирования $H_{00}^{(1)}(x)$, $H_{11}^{(1)}(x)$ и $H_{12}^{(1)}(x)$ задаются равенствами

$$H_{00}^{(1)}(x)=Ke^{x-x_0}\left(e^{2x}+3e^{2x_1}-3e^{x+x_1}\right),$$

$$H_{11}^{(1)}(x)=\frac{K}{2}e^{x-2x_1}\left(e^{x}-e^{x_0}\right)\left(e^{x+x_0}+9e^{2x_1}-4e^{x_1}(e^{x}+e^{x_0})\right),$$

$$H_{12}^{(1)}(x)=-\frac{K}{2}e^{x-2x_1}\left(e^{x}-e^{x_0}\right)\left(e^{x+x_0}+3e^{2x_1}-2e^{x_1}(e^{x}+e^{x_0})\right),$$

$$K=\left(e^{2x_0}+3e^{2x_1}-3e^{x_0+x_1}\right)^{-1}.$$

Указанный многочлен $B_{1,2}(x)$ инвариантен относительно операторных полиномов

$$P_{2,\nu}(x)=\sum_{k=0}^{2}\int_{\mathbb{R}}a_k(\nu;s,t)\frac{d^\nu}{dt^\nu}\frac{e^{(k+1)x(t)}}{H_{00}^{(1)}(x(t))}dt\ (\nu=0,1,2,...),$$

где $a_k(\nu;s,t)$ – фиксированные функции $(s,t\in\mathbb{R})$.

Рассмотрим еще один частный случай формулы (23). В качестве чебышевской системы $\{\varphi_k(t)\}_{k=0}^2$ выберем тригонометрическую на $[0,2\pi)$ систему функций $\{1,\sin t,\cos t\}$. Пусть оператор

$$D_j\varphi(t)=\varphi^{(j)}(t),\ \ \tilde{D}_jF(x)=\delta^jF[x;h_1h_2...h_j]\ \ (j=1,2),$$

а матрица

$$I_{1,3}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Тогда для интерполяционного многочлена Эрмита – Биркгофа (23), удовлетворяющего условиям

$$B_{1,3}(x_0)=F(x_0);\ \delta^2 B_{1,3}[x_1;h_1h_2]=\delta^2F[x_1;h_1h_2],\ \delta^3B_{1,3}[x_1;h_1h_2h_3]=\delta^3F[x_1;h_1h_2h_3],$$

справедливо представление

$$B_{1,3}(x)=F(x_0)+\sum_{j=2}^{3}\delta^jF\left[x_1;H_{1j}^{(1)}(x)\right],$$

где $H_{12}^{(1)}(x)=\cos(x_0-x_1)-\cos(x-x_1)$, $H_{13}^{(1)}(x)=\sin(x_0-x_1)-\sin(x-x_1)$.

Операторный многочлен $B_{1,3}(x)$ инвариантен относительно операторных полиномов $P_{2,\nu}(x)$ вида (4), где $q=2$, $\{\varphi_k(t)\}_{k=0}^2=\{1,\sin x(t),\cos x(t)\}$, $\sigma_1(x(t))\equiv 1$, $T=[0,2\pi)$.

Рассмотрим несколько интерполяционных формул для функций от случайных процессов. Пусть S – множество процессов вида $\eta(t)=F\left(\xi(t)\right)$, где $\xi=\xi(t)$ – гауссовский случайный процесс со средним $m=m(t)$ и дисперсией $\sigma=\sigma(t)$ $\left(t\in T\subseteq\mathbb{R}\right)$; случайные процессы $\xi_0=\xi_0(t)$, $\xi_1=\xi_1(t)$ с той же областью определения, что и $\xi(t)$, – узлы интерполирования.

Введем обозначения

$$H_1(\xi)=\sin(\xi-\xi_1)-\sin(\xi_0-\xi_1),$$

$$H_2(x)=\cos(\xi_0-\xi_1)-\cos(\xi-\xi_1),$$

где области значений функций $F(\xi)$, $H_1(\xi)$ и $H_2(\xi)$ совпадают. Тогда для случайного процесса

$$T_{10}\left(\xi\right)=F\left(\xi_0\right)+F'\left(\xi_1\right)H_1\left(\xi\right)+F''\left(\xi_1\right)H_2\left(\xi\right) \tag{24}$$

выполняются интерполяционные условия

$$T_{10}\left(\xi_0\right)=F\left(\xi_0\right),\;\; T'_{10}\left(\xi_1\right)=F'\left(\xi_1\right),\;\; T''_{10}\left(\xi_1\right)=F''\left(\xi_1\right).$$

Несложно проверить, что и для случайного процесса

$$T_{11}\left(\xi\right)=F\left(\xi_0\right)+F''\left(\xi_1\right)H_2\left(\xi\right)-F'''\left(\xi_1\right)H_1\left(\xi\right) \tag{25}$$

справедливы равенства $T_{11}\left(\xi_0\right)=F\left(\xi_0\right)$, $T''_{11}\left(\xi_1\right)=F''\left(\xi_1\right)$, $T'''_{11}\left(\xi_1\right)=F'''\left(\xi_1\right)$, а для процесса

$$T_{12}\left(\xi\right)=F\left(\xi_0\right)-F^{(4)}\left(\xi_1\right)H_2\left(\xi\right)+F^{(5)}\left(\xi_1\right)H_1\left(\xi\right) \tag{26}$$

условия вида $T_{12}\left(\xi_0\right)=F\left(\xi_0\right)$, $T_{12}^{(4)}\left(\xi_1\right)=F^{(4)}\left(\xi_1\right)$, $T_{12}^{(5)}\left(\xi_1\right)=F^{(5)}\left(\xi_1\right)$.

В общем случае аналогичные интерполяционные формулы имеют вид

$$T_n\left(\xi\right)=F\left(\xi_0\right)+(-1)^{n-1}\left[F^{(2n)}\left(\xi_1\right)H_2\left(\xi\right)+F^{(2n-1)}\left(\xi_1\right)H_1\left(\xi\right)\right],$$

$$\tilde{T}_n\left(\xi\right)=F\left(\xi_0\right)+(-1)^{n+1}\left[F^{(2n)}\left(\xi_1\right)H_2\left(\xi\right)-F^{(2n+1)}\left(\xi_1\right)H_1\left(\xi\right)\right], \tag{27}$$

для которых соответственно имеют место равенства

$$T_n\left(\xi_0\right)=F\left(\xi_0\right),\;\; T_n^{(2n-1)}\left(\xi_1\right)=F^{(2n-1)}\left(\xi_1\right),\;\; T_n^{(2n)}\left(\xi_1\right)=F^{(2n)}\left(\xi_1\right);$$

$$\tilde{T}_n\left(\xi_0\right)=F\left(\xi_0\right),\;\; \tilde{T}_n^{(2n)}\left(\xi_1\right)=F^{(2n)}\left(\xi_1\right),\;\; \tilde{T}_n^{(2n+1)}\left(\xi_1\right)=F^{(2n+1)}\left(\xi_1\right)$$

$$\left(n=1,2,3,...\right).$$

Эти условия выполняются в силу соотношений

$$\left(\cos x\right)^{(2n)}=\left(-1\right)^n\cos x,\;\; \left(\cos x\right)^{(2n+1)}=\left(-1\right)^{n+1}\sin x,$$

$$\left(\sin x\right)^{(2n)}=\left(-1\right)^n\sin x,\;\; \left(\sin x\right)^{(2n+1)}=\left(-1\right)^n\cos x.$$

Формулы (24)–(27) точны для любых тригонометрических многочленов первой степени вида $F\left(x\right)=a\cos x+b\sin x+c$ $\left(a,b,c\in\mathbb{C}\right)$.

Приведем еще одну интерполяционную формулу такого вида для операторов $F\left(\xi(t)\right)$ общего вида. Пусть $F:S\to Y$, где Y – заданное множество детерминированных или случайных на T функций и для оператора F существуют дифференциалы Гато первого и второго порядка:

$\delta F[\xi;h]$, $\delta^2 F[\xi;h_1,h_2]$ $(h,h_1,h_2\in S)$. Будем считать, что в дифференциале второго порядка $\delta^2 F[\xi;h]$ первое направление $h_1(t)\equiv 1$, а второе направление $h_2(t)=h(t)$.

Тогда для интерполяционной формулы

$$\hat{T}_{10}(\xi)=F(\xi_0)+\delta F[\xi_1;H_1(\xi)]+\delta^2 F[\xi_1;H_2(\xi)]$$

выполняются условия

$$\hat{T}_{10}(\xi_0)=F(\xi_0),$$

$$\delta\hat{T}_{10}[\xi_1;h]=\delta F[\xi_1;h],$$

$$\delta^2\hat{T}_{10}[\xi_1;h_1h_2]=\delta^2 F[\xi_1;h_1h_2].$$

Эти равенства справедливы в силу соотношений $\delta H_i[\xi;h]=H_i'(\xi)h$, $\delta^2 H_i[\xi;h_1h_2]=H_i''(\xi)h_1h_2$ $(i=1,2)$.

2. Пусть $I_{m,m}$ – квадратная диагональная матрица размерности $(m+1)\times(m+1)$ и рассматривается интерполяционная задача Абеля – Гончарова. Тогда множество $N_{m,0}$ состоит из нулевой пары (0,0), а множество $M_{m,m}$ – из элементов (k,k), $k=1,2,\ldots,m$. В этом случае $\sigma_m(x(t))=H_{00}^{(m)}(x(t))$ и, следовательно, формула (23) примет вид

$$B_{m,m}(x)=F(x_0)+\sum_{k=1}^{m}\tilde{D}_k F\left[x_k;\frac{H_{kk}^{(m)}(x)H_{00}^{(m)}(x_k)}{H_{00}^{(m)}(x)}\right]. \tag{28}$$

Операторный многочлен $B_{m,m}(x)$ вида (28) удовлетворяет интерполяционным условиям

$$B_{m,m}(x_0)=F(x_0);\ \tilde{D}_k B_{m,m}(x_k)=\tilde{D}_k F(x_k),\ k=1,2,\ldots,m.$$

Для погрешности $r_{m,m}(x)=F(x)-B_{m,m}(x)$, где $B_{m,m}(x)$ – интерполяционный полином вида (28), имеет место представление $r_{m,m}(x)=\tilde{D}_{m+1}F[x;H_{m+1\,m+1}^{(m+1)}(x)]$. Через $\tilde{D}_{m+1}F[x;h]$, как и ранее, обозначен оператор вида (5), когда направления $h_\nu(t)\equiv 1$ для $\nu=1,2,\ldots,m$, а $h_{m+1}(t)=h(t)$.

Если формула (3) точна для обобщенных многочленов (1) при некотором фиксированном значении q и любых различных узлах t_i $(i=0,1,\ldots,m)$, то интерполяционная формула (28) будет инвариантна относительно операторных многочленов вида (4) с тем же значением q.

Если $D_j\varphi(t)=\varphi^{(j)}(t)$, а $\tilde{D}_j F(x)=\delta^j F[x;h_1h_2\ldots h_j]$, $j=1,2,\ldots,m$, то интерполяционная формула (28) примет вид

$$B_{m,m}(x)=F(x_0)+\sum_{k=1}^{m}\delta^k F\left[x_k;\frac{H_{kk}^{(m)}(x)H_{00}^{(m)}(x_k)}{H_{00}^{(m)}(x)}\right]. \tag{29}$$

Операторный многочлен $B_{m,m}(x)$, заданный формулой (29), удовлетворяет интерполяционным условиям

$$B_{m,m}(x_0)=F(x_0),\ \delta^k B_{m,m}[x_k;h_1h_2\ldots h_k]=\delta^k F[x_k;h_1h_2\ldots h_k],\ k=1,2,\ldots,m.$$

Для погрешности $r_{m,m}(x)=F(x)-B_{m,m}(x)$, где $B_{m,m}(x)$ – интерполяционный полином вида (29), имеет место представление

$$r_{m,m}(x)=\delta^{m+1}F\left[x;H_{m+1\,m+1}^{(m+1)}(x)\right]. \tag{30}$$

Здесь, как и раньше, $\delta^{m+1}F[x;h]$ означает, что направления $h_\nu(t)\equiv 1$ для $\nu=1,2,\ldots,m$, а $h_{m+1}(t)=h(t)$.

Предположим, что X и Y – нормированные пространства. Если в точке $x \in X$ для дифференциалов $\tilde{D}_j F[x;h]$ выполняются неравенства $\| \tilde{D}_j F[x;h] \| \le c \| h \|$ $(0 \le c < \infty)$, тогда для погрешности интерполирования (30) справедлива оценка

$$\| r_{m,m}(x) \| \le c \| H^{(m+1)}_{m+1\, m+1}(x) \|. \tag{31}$$

Одна из возникающих здесь экстремальных задач состоит в нахождении узлов интерполяции $x_k(t)$ $(k = 0,1,\dots,m)$, для которых норма в правой части оценки погрешности (31) принимает наименьшее значение.

Явный вид алгебраических многочленов $H^{(m)}_{kk}(t)$, для которых выполняются условия $D_j H^{(m)}_{kk}(t_j) = \delta_{kj}$ $(k, j = 0,1,...,m)$, приведен в [14].

3. Пусть $I_{m,m+s} = \{\varepsilon_{ij}\}^{m,m+s}_{i,j=0}$ – матрица порядка $(m+1)\times(m+s+1)$, $s \ge 1$, соответствующая следующей интерполяционной задаче: множество $N_{m,0}$ состоит из пар $(k,0)$, а множество $M_{m,m+s}$ – из элементов $(k, m+s)$, $k = 0,1,\dots m$ (т. е. крайние столбцы матрицы $I_{m,m+s}$ являются единичными, а остальные – нулевыми).

В этом случае $\sigma_m(x) = \sum\limits_{i=0}^{m} H^{(m)}_{i0}(x)$, где $H^{(m)}_{i0}(t)$ – многочлены класса (1), удовлетворяющие условиям $D_\nu H^{(m)}_{i0}(t_k) = \delta_{ik}\delta_{\nu 0}$, а δ_{ij} – символ Кронекера $\left(0 \le i,k \le m;\ 0 \le \nu \le m+s\right)$. Здесь, как и ранее, в верхнем индексе (m) обозначения $H^{(m)}_{i0}(t)$ указан номер последней строки в соответствующей матрице $I_{m,m+s}$. Операторный многочлен (7) примет вид

$$B_{m,m+s}(x) = F(x_p) + \\ + \sum_{i=0}^{m}\int_0^1 \delta F\left[x_p + \tau(x_i - x_p); \frac{H^{(m)}_{i0}(x)}{\sigma_m(x)}(x_i - x_p)\right] d\tau + \sum_{i=0}^{m} \tilde{D}_{m+s} F\left[x_i; \frac{H^{(m)}_{i\, m+s}(x)}{\sigma_m(x)}\right]. \tag{32}$$

Операторный многочлен (32) удовлетворяет интерполяционным условиям

$$B_{m,m+s}(x_k) = F(x_k);\ \tilde{D}_{m+s} B_{m,m+s}(x_k) = \tilde{D}_{m+s} F(x_k),\ k = 0,1,...,m. \tag{33}$$

Для погрешности $r_{m,m+s}(x) = F(x) - B_{m,m+s}(x)$, где $B_{m,m+s}(x)$ – интерполяционный полином вида (32), имеет место формула

$$r_{m,m+s}(x) = \int_0^1 \delta F\left[x_p + \tau(x - x_p); H^{(m+1)}_{m+1,0}(x)(x - x_p)\right] d\tau + \tilde{D}_{m+s} F\left[x; H^{(m+1)}_{m+1\, m+s}(x)\right]. \tag{34}$$

Если $D_j \varphi(t) = \varphi^{(j)}(t)$, а $\tilde{D}_j F(x) = \delta^j F[x; h_1 h_2 ... h_j]$, $j = 0, m+s$, то равенства (32)–(34) преобразуются соответственно к виду

$$B_{m,m+s}(x) = F(x_p) + \sum_{i=0}^{m}\int_0^1 \delta F\left[x_p + \tau(x_i - x_p); \frac{H^{(m)}_{i0}(x)}{\sigma_m(x)}(x_i - x_p)\right] d\tau + \sum_{i=0}^{m} \delta^{m+s} F\left[x_i; \frac{H^{(m)}_{i\, m+s}(x)}{\sigma_m(x)}\right],$$

$$r_{m,m+s}(x) = \int_0^1 \delta F\left[x_p + \tau(x - x_p); H^{(m+1)}_{m+1,0}(x)(x - x_p)\right] d\tau + \delta^{m+s} F\left[x; H^{(m+1)}_{m+1\, m+s}(x)\right],$$

$$B_{m,m+s}(x_k) = F(x_k);\ \delta^{m+s} B_{m,m+s}\left[x_k; h_1 h_2 ... h_k\right] = \delta^{m+s} F\left[x_k; h_1 h_2 ... h_k\right],\ k = 0,1,...,m.$$

Известно явное представление алгебраических многочленов $H^{(m)}_{ij}(t), i = 0,1,...,m;\ j = 0, m+s$, для которых выполняются условия $D_\nu H^{(m)}_{ij}(t_k) = \delta_{ik}\delta_{\nu j}, i,k = 0,1,...,m; \nu, j = 0, m+s$.

4. Пусть $I_{m,m+s} = \{\varepsilon_{ij}\}_{i,j=0}^{m,m+s}$, $s \geq 1$, – прямоугольные матрицы размерности $(m+1)\times(m+s+1)$, соответствующие следующей интерполяционной задаче: множество $N_{m,0}$ состоит из пар (i, 0), где i = 0,1,2,…,m, а множество $M_{m,m+s}$ – из элементов (s, j), где $j = m+1, m+2, ..., m+s$, а s – фиксированный номер одного из узлов ($0 \leq s \leq m$).

В этом случае $\sigma_m(x) = \sum_{i=0}^{m} H_{i0}^{(m)}(x)$, а операторный многочлен (7) при p = 0 примет вид

$$B_{m,m+s}(x) = F(x_0) + \sum_{i=1}^{m}\int_0^1 \delta F\left[x_0 + \tau(x_i - x_0); \frac{H_{i0}^{(m)}(x)}{\sigma_m(x)}(x_i - x_0)\right]d\tau + \sum_{j=m+1}^{m+s} \tilde{D}_j F\left[x_s; \frac{H_{sj}^{(m)}(x)}{\sigma_m(x)}\right]. \quad (35)$$

Операторный многочлен (35) удовлетворяет интерполяционным условиям

$$B_{m,m+s}(x_k) = F(x_k),\ k = 0,1,...,m;\ \tilde{D}_j B_{m,m+s}(x_s) = \tilde{D}_j F(x_s),\ j = m+1, m+2, ..., m+s. \quad (36)$$

Для погрешности $r_{m,m+s}(x) = F(x) - B_{m,m+s}(x)$, где $B_{m,m+s}(x)$ – интерполяционный полином вида (35), имеет место представление

$$r_{m,m+s}(x) = \int_0^1 \delta F\left[x_0 + \tau(x - x_0); H_{m+1,0}^{(m+1)}(x)(x - x_0)\right]d\tau + \tilde{D}_{m+s+1} F\left[x_s; H_{s\,m+s+1}^{(m+1)}(x)\right]. \quad (37)$$

Пусть $D_j \varphi(t) = \varphi^{(j)}(t)$, а $\tilde{D}_j F(x) = \delta^j F[x; h_1 h_2 ... h_j]$, $j = m+1, ..., m+s$. Тогда равенства (35)–(37) примут соответственно вид

$$B_{m,m+s}(x) = F(x_0) + \sum_{i=1}^{m}\int_0^1 \delta F\left[x_0 + \tau(x_i - x_0); \frac{H_{i0}^{(m)}(x)}{\sigma_m(x)}(x_i - x_0)\right]d\tau + \sum_{j=m+1}^{m+s} \delta^j F\left[x_s; \frac{H_{sj}^{(m)}(x)}{\sigma_m(x)}\right],$$

$$B_{m,m+s}(x_k) = F(x_k),\ k = 0,1,...,m;\ \delta^j B_{m,m+s}\left[x_s; h_1 h_2 ... h_j\right] = \delta^j F\left[x_s; h_1 h_2 ... h_j\right],\ j = m+1, m+2, ..., m+s,$$

$$r_{m,m+s}(x) = \int_0^1 \delta F\left[x_0 + \tau(x - x_0); H_{m+1,0}^{(m+1)}(x)(x - x_0)\right]d\tau + \delta^{m+s+1} F\left[x_s; H_{s\,m+s+1}^{(m+1)}(x)\right].$$

Явный вид алгебраических многочленов $H_{ij}^{(m)}(t), i = 0,1,...,m;\ j = 0, m+1, ..., m+s$, для которых выполняются условия $D_\nu H_{ij}^{(m)}(t_k) = \delta_{ik}\delta_{\nu j}, i,k = 0,1,...,m; \nu, j = 0, m+1, ..., m+s$, приведен в работе [7].

В заключение отметим, что достаточно полная теория операторного интерполирования изложена в монографии [15], в которой, в частности, рассмотрены и специальные случаи интерполяционной задачи Эрмита – Биркгофа.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф15-35).

Acknowledgements. This work was supported by the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (Project No. F15-35).

Список использованных источников

1. Мысовских, И. П. Лекции по методам вычислений / И. П. Мысовских. – СПб: изд-во С.-Петерб. ун-та, 1998. – 470 с.
2. Турецкий, А. Х. Теория интерполирования в задачах / А. Х. Турецкий. – Минск: Выш. шк., 1968. – 317 с.
3. Shi, Y. G. Theory of Birkhoff Interpolation / Y. G. Shi. – New York: Nova Science Publishers, 2003. – 253 p.
4. Nazarzadeh, A. Another case of incidence matrix for bivariate Birkhoff interpolation / A. Nazarzadeh, Kh. Rahsepar Fard, A. Mahmoodi // J. Comput. Appl. Math. – 2016. – № 2 (122). – P. 55–70.
5. Zhao, T. G. On Two Birkhoff-Type Interpolations with First- and Second-Order Derivative / T. G. Zhao, Y. J. Li // J. Appl. Math. Phys. – 2016. – № 4. – P. 1269–1274.
6. Янович, Л. А. Обобщенная интерполяционная задача Абеля – Гончарова / Л. А. Янович, В. В. Дорошко // Вестн. фонда фундам. исслед. – 1999. – № 4. – С. 34–44.

7. Янович, Л. А. Интерполяционные операторные многочлены Эрмита – Биркгофа в пространстве гладких функций / Л. А. Янович, М. В. Игнатенко // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2009. – Т. 53, № 5. – С. 15–21.

8. Янович, Л. А. Специальный случай интерполяционной задачи Эрмита – Биркгофа для операторов в пространстве гладких функций / Л. А. Янович, М. В. Игнатенко // Актуальные проблемы анализа: сб. науч. тр. – Гродно: ГрГУ, 2009. – С. 198–215.

9. Худяков, А. П. Интерполяционные формулы Эрмита – Биркгофа относительно алгебраической и тригонометрической систем функций с одним специальным узлом / А. П. Худяков, А. А. Трофимук // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фiз.-мат. навук. – 2017. – № 1. – С. 14–28.

10. Янович, Л. А. Обобщенная интерполяционная задача Эрмита – Биркгофа для операторов / Л. А. Янович, М. В. Игнатенко // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений: сб. науч. тр. 5-й междунар. конф. – Минск, Ин-т математики НАН Беларуси, 2010. – Т. 1. – С. 140–147.

11. Янович, Л. А. Формулы операторного интерполирования, основанные на интерполяционных многочленах для числовых функций / Л. А. Янович, В. В. Дорошко // Вычислительная математика и математические проблемы механики: тр. Укр. мат. конгресса. – Киев, 2002. – С. 137–145.

12. Янович, Л. А. Об одном классе интерполяционных многочленов для нелинейных обыкновенных дифференциальных операторов / Л. А. Янович, М. В. Игнатенко // Математическое моделирование. – 2014. – Т. 26, № 11. – С. 90–96.

13. Янович, Л. А. Об одном классе формул операторного интерполирования Эрмита – Биркгофа в пространстве дифференцируемых функций / Л. А. Янович, М. В. Игнатенко // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фiз.-мат. навук. – 2005. – № 2. – С. 11–16.

14. Евграфов, М. А. Интерполяционная задача Абеля – Гончарова / М. А. Евграфов. – М.: ГИТТЛ, 1954. – 128 с.

15. Makarov, V. L. Methods of Operator Interpolation / V. L. Makarov, V. V. Khlobystov, L. A. Yanovich // Праці Ін-ту математики НАН України. – Київ, 2010. – Vol. 83. – P. 1–517.

References

1. Mysovskikh I. P. *Lectures on numerical methods*. St. Petersburg, Publishing House of St. Petersburg University, 1998. 470 p. (in Russian).

2. Turetskii A. Kh. *The theory of interpolation in problems.* Minsk, Vysheishaya shkola, 1968. 317 p. (in Russian).

3. Shi Y. G. *Theory of Birkhoff Interpolation*. New York, Nova Science Publishers, 2003. 253 p.

4. Nazarzadeh A., Rahsepar Fard KH., Mahmoodi A. Another case of incidence matrix for bivariate Birkhoff interpolation. *Zhurnal obchislyuval'noї ta prikladnoї matematiki* = Journal of Computational and Applied Mathematics, 2016, no. 2 (122), pp. 55–70.

5. Zhao T. G., Li Y. J. On Two Birkhoff-Type Interpolations with First- and Second-Order Derivative. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 2016, no. 4, pp. 1269–1274. Doi: 10.4236/jamp.2016.47133

6. Yanovich L. A., Doroshko V. V. Generalized interpolation problem of Abel – Goncharov. *Vestnik fonda fundamental'nykh issledovanii* [Vestnik of the Foundation for Fundamental Research], 1999, vol. 4, pp. 34–44. (in Russian).

7. Yanovich L. A., Ignatenko M. V. Interpolation operator polynomials of Hermite – Birkhoff in the space of smooth functions. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi* [Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus], 2009, vol. 53, no. 5, pp. 15–21. (in Russian).

8. Yanovich L. A., Ignatenko M. V. A special case of the Hermite – Birkhoff interpolation problem for operators in the space of smooth functions. *Aktual'nye problemy analiza. Sbornik nauchnykh trudov* [Actual problems of analysis Collection of Scientific Papers]. Grodno, Grodno State University, 2009, pp. 198–215. (in Russian).

9. Khudyakov A. P., Trofimuk A. A. The Hermite – Birkhoff interpolation formulas for algebraic and trigonometric systems of functions with one special node. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series], 2017, no. 1, pp. 14–28. (in Russian).

10. Yanovich L. A., Ignatenko M. V. Generalized interpolation problem of Hermite – Birkhoff for operators. *Analiticheskie metody analiza i differentsial'nykh uravnenii: Sbornik nauchnykh trudov 5-i mezhdunarodnoi konferentsii* [Analytical methods of analysis and differential equations: Collection of Scientific Papers of the 5th International Conference]. Minsk, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, 2010, vol. 1, pp. 140–147. (in Russian).

11. Yanovich L. A., Doroshko V. V. Formulas of operator interpolation based on interpolation polynomials for scalar functions. *Vychislitel'naya matematika i matematicheskie problemy mekhaniki: Trudy Ukrainskogo matematicheskogo kongressa* [Computational Mathematics and Mathematical Problems in Mechanics: Proceedings of the Ukrainian Mathematical Congress]. Kiev, 2002, pp. 137–145. (in Russian).

12. Yanovich L. A., Ignatenko M. V. On a class of interpolation polynomials for nonlinear ordinary differential operators. *Matematicheskoe Modelirovanie* [Mathematical Models and Computer Simulations], 2014, vol. 26, no. 11, pp. 90–96.

13. Yanovich L. A., Ignatenko M. V. On a class of Hermite – Birkhoff operator interpolation formulas in the space of differentiable functions. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk*

[Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics Series], 2005, no. 2, p. 11–16. (in Russian).

14. Evgrafov M. A. *Abel – Goncharov interpolation problem*. Moscow, State Publishing House of Technical and Theoretical Literature, 1954. 127 p. (in Russian).

15. Makarov V. L., Khlobystov V. V., Yanovich L. A. Methods of Operator Interpolation. *Pratsi institutu matematiki NAN Ukraïni* [Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine], Kiev, 2010, vol. 83, pp. 1–517.

Информация об авторах

Янович Леонид Александрович – член-корреспондент, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: yanovich@im.bas-net.by

Игнатенко Марина Викторовна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: ignatenkomv@bsu.by

Information about the authors

Yanovich Leonid Aleksandrovich – Corresponding Member, D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Chief Researcher, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: yanovich@im.bas-net.by

Ignatenko Marina Viktorovna – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Associate Professor of Web-Technologies and Computer Simulation Department, Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: ignatenkomv@bsu.by

Для цитирования

Янович, Л. А. К теории интерполирования Эрмита – Биркгофа нелинейных обыкновенных дифференциальных операторов / Л. А. Янович, М. В. Игнатенко // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2017. – № 2. – С. 7–23.

For citation

Yanovich L. A., Ignatenko M. V. To the theory of Hermite – Birkhoff interpolation of nonlinear ordinary differential operators. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series], 2017, no. 2, pp. 7–23. (in Russian).