ISSN 1561-2430 (print)
УДК 517.544.8

Поступила в редакцию 04.11.2016
Received 04.11.2016

М. М. Юхимук

Брестский государственный технический университет, Брест, Беларусь

ОДНОРОДНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА РИМАНА С МЕРОМОРФНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНО СВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ

В исследованиях эффективных свойств двумерных композиционных материалов наиболее изученным является случай материалов с периодической микроструктурой. Это связано с возможностью представления решений соответствующих краевых задач через значения некоторых эллиптических функций. В данной работе рассматривается однородная краевая задача Римана для бесконечно связных областей и мероморфных коэффициентов. В замкнутой форме дается решение задачи в классе кусочно-аналитических функций, допускающих мероморфное продолжение на всю комплексную плоскость. Как частный случай решается вопрос существования и единственности двоякопериодических решений задачи с эллиптическим коэффициентом. Приводится пример задачи, имеющей единственное, с точностью до произвольного числового множителя, решение, и пример задачи, решение которой зависит от произвольных независимых параметров. Полученные результаты могут служить базой для исследования случая, когда коэффициенты задачи являются различными для каждого из контуров, а также при решении неоднородной задачи Римана с мероморфными коэффициентами и свободными членами в бесконечно связных областях.

Ключевые слова: краевая задача Римана, мероморфный коэффициент, бесконечно связная область, эллиптические функции

M. M. Yukhimuk

Brest State Technical University, Brest, Belarus

HOMOGENEOUS RIEMANN BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH MEROMORPHIC COEFFICIENTS FOR INFINITELY CONNECTED DOMAINS

Homogeneous Riemann boundary value problem with meromorphic coefficients for infinitely connected domains is considered. In the closed form the problem is solved in the class of piece-wise analytic functions, possessing meromorphic continuation to the whole complex plane. Special attention is paid to the existence of doubly periodic solutions to the problem with elliptic coefficients. The example of the problem having a unique solution up to an arbitrary constant multiplier is presented, as well as of the problem with a solution depending on a number of arbitrary parameters. The obtained results can be used for solving of an inhomogeneous Riemann boundary value problem with meromorphic coefficients in an infinitely connected domain in the general statement.

Keywords: Riemann boundary value problem, meromorphic coefficient, infinitely connected domain, elliptic functions

Введение. Краевая задача для бесконечно связной области впервые была рассмотрена в работе [1]. В дальнейшем к этой тематике, а также к связанным с ней задачам с бесконечным индексом обращались многие математики (см., напр., [2] и обзор в монографии [3, § 49]). В связи с исследованием эффективных свойств двумерных композиционных материалов (см., напр., [4]) возникает интерес к решению в замкнутой форме специальных типов краевых задач для бесконечно связных областей. При этом наиболее изученным оказался случай материалов с двоякопериодической структурой. Это связано, в частности, с возможностью представления решений соответствующих краевых задач в явной форме через значения эллиптических функций (см., напр., [5, 6]).

В настоящей работе рассматривается однородная задача Римана для случая бесконечно связной области и мероморфных коэффициентов. Как частный случай такой задачи исследуется вопрос о существовании двоякопериодических решений задачи с эллиптическим коэффициентом, общим для всех контуров.

1. Однородная задача Римана с мероморфными коэффициентами. В данном разделе решается задача нахождения кусочно-аналитической в бесконечно связной области функции, допускающей мероморфное продолжение своих компонент на всю комплексную плоскость и удовлетворяющей заданному однородному граничному условию.

Уточним постановку задачи. Пусть задано счетное семейство простых гладких замкнутых попарно непересекающихся контуров $\{L_m \mid m \in \mathbf{N}\}$, ограничивающих непересекающиеся области D_m^+, причем $\min\limits_{t \in L_m} |t| \xrightarrow[m \to \infty]{} \infty$ и $\exists \delta > 0 \ \forall m \in \mathbf{N} \ \exists z_m \in D_m^+ \ \forall t \in L_m \ \left(|t - z_m| \geq \delta\right)$. Пусть также $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, ..., \mathrm{I}_N \subset \mathbf{N}$, причем $\coprod\limits_{k=1}^{N} \mathrm{I}_k = \mathbf{N}$. Обозначим $L_{(k)} = \bigcup\limits_{m \in \mathrm{I}_k} L_m$, $D_{(k)}^+ = \bigcup\limits_{m \in \mathrm{I}_k} D_m^+ \ \left(k = \overline{1, N}\right)$, $D^+ = \bigcup\limits_{m \in \mathbf{N}} D_m^+$, $D^- = \mathbf{C} \setminus \overline{D^+}$. Пусть также заданы мероморфные функции $G_k(z) \ \left(k = \overline{1, N}\right)$, не имеющие полюсов на множестве $\{L_m \mid m \in \mathbf{N}\}$. Требуется найти кусочно-аналитическую в области $D^- \bigcup D^+$ функцию

$$\Phi(z) = \begin{cases} \Phi^-(z), \ z \in D^-, \\ \Phi_k^+(z), \ z \in D_{(k)}^+ \ \left(k = \overline{1, N}\right), \end{cases}$$

компоненты которой $\Phi^-(z)$, $\Phi_1^+(z)$, ... , $\Phi_N^+(z)$ непрерывны вплоть до кривых $L_m \ (m \in \mathbf{N})$, допускают мероморфные (вообще говоря, различные) продолжения из множеств $\overline{D^-}$, $\overline{D_{(1)}^+}$, ... , $\overline{D_{(N)}^+}$ соответственно на всю комплексную плоскость и удовлетворяют на контурах граничным условиям

$$\Phi_k^+(t) = \Phi^-(t) \cdot G_k(t), \ t \in L_{(k)}, \ k = \overline{1, N}. \tag{1}$$

Заметим, что в постановке задачи каких-либо требований на поведение решения на бесконечности не накладывается.

Для данной задачи установлено следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть*

$$G_k(z) = \frac{a_k(z) \cdot b_k(z)}{c_k(z) \cdot d_k(z)} \ \left(k = \overline{1, N}\right), \tag{2}$$

где $a_k(z)$, $b_k(z)$, $c_k(z)$, $d_k(z)$ *– целые функции, причем нули* $a_k(z)$ *содержатся в* $D_{(k)}^+$, *нули* $b_k(z)$ *– в* $\mathbf{C} \setminus D_{(k)}^+$, *нули* $c_k(z)$ *– в* D^+, *а нули* $d_k(z)$ *– в* D^-. *Тогда всякое решение задачи может быть представлено в виде*

$$\Phi(z) = \begin{cases} \dfrac{\prod\limits_{m=1}^{N} c_m(z)}{\prod\limits_{m=1}^{N} a_m(z)} \cdot h(z), \ z \in D^-, \\[2ex] \dfrac{b_k(z) \cdot \prod\limits_{\substack{m=\overline{1,N} \\ m \neq k}} c_m(z)}{d_k(z) \cdot \prod\limits_{\substack{m=\overline{1,N} \\ m \neq k}} a_m(z)} \cdot h(z), \ z \in D_{(k)}^+ \ \left(k = \overline{1, N}\right), \end{cases} \tag{3}$$

где $h(z)$ *– некоторая целая функция.*

Доказательство. Очевидно, всякая функция вида (3) является кусочно-аналитической в области $D^- \bigcup D^+$ и ее предельные значения удовлетворяют граничным условиям (1). Пусть теперь функции $\Phi^-(z)$, $\Phi_1^+(z)$, ... , $\Phi_N^+(z)$ аналитичны в областях D^-, $D_{(1)}^+$, $D_{(2)}^+$, ... , $D_{(N)}^+$ соответственно, а их предельные значения удовлетворяют условиям (1). Тогда при фиксированном натуральном $k \in [1; N]$

$$\Phi_k^+(t) = \Phi^-(t) \cdot \frac{a_k(t) \cdot b_k(t)}{c_k(t) \cdot d_k(t)},$$

откуда

$$\Phi_k^+(t) \cdot \frac{d_k(t)}{b_k(t)} = \Phi^-(t) \cdot \frac{a_k(t)}{c_k(t)}.$$

Обе части последнего равенства можно рассматривать как предельные значения полных аналитических функций $\Phi_k^+(z) \cdot \frac{d_k(z)}{b_k(z)}$ и $\Phi^-(z) \cdot \frac{a_k(z)}{c_k(z)}$ на множестве $L_{(k)}$. Так как функции $\Phi_k^+(z) \cdot \frac{d_k(z)}{b_k(z)}$ и $\Phi^-(z) \cdot \frac{a_k(z)}{c_k(z)}$ аналитичны соответственно в областях $D_{(k)}^+$ и D^-, при этом непрерывны и совпадают на множестве $L_{(k)}$, то

$$\Phi_k^+(z) \cdot \frac{d_k(z)}{b_k(z)} = \Phi^-(z) \cdot \frac{a_k(z)}{c_k(z)} = h_k(z),$$

где $h_k(z)$ – целая функция. Таким образом, для любого натурального $k \in [1; N]$ существует целая функция $h_k(z)$, для которой

$$\Phi^-(z) = \frac{c_k(z)}{a_k(z)} \cdot h_k(z),$$

откуда следует, что

$$\Phi^-(z) = \frac{\prod_{m=1}^{N} c_m(z)}{\prod_{m=1}^{N} a_m(z)} \cdot h(z),$$

где $h(z)$ – некоторая целая функция. Выражая $\Phi_k^+(z)$ из соотношений

$$\Phi_k^+(z) \cdot \frac{d_k(z)}{b_k(z)} = \Phi^-(z) \cdot \frac{a_k(z)}{c_k(z)},$$

получим решение задачи в виде (3). Очевидно, представление функций $G_k(z)$ в виде (2) не является однозначным. Пусть

$$G_k(z) = \frac{A_k(z) \cdot B_k(z)}{C_k(z) \cdot D_k(z)},$$

причем нули целых функций $A_k(z), B_k(z), C_k(z), D_k(z)$ содержатся в областях $D_{(k)}^+, \mathbf{C} \setminus D_{(k)}^+$, D^+, D^- соответственно. Тогда, очевидно,

$$\frac{C_k(z)}{A_k(z)} = \frac{c_k(z)}{a_k(z)} \cdot \exp \varphi_k(z), \quad \frac{B_k(z)}{D_k(z)} = \frac{b_k(z)}{d_k(z)} \cdot \exp \varphi_k(z),$$

где $\varphi_k(z)$ $\left(k = \overline{1, N}\right)$ – некоторые целые функции, и мы снова приходим к решению вида (3). Теорема 1 доказана.

Заметим, что факторизация коэффициента задачи, т. е. представление его в виде (2), является, вообще говоря, нетривиальной задачей для случая бесконечно связных областей. Полученный результат позволяет, в частности, строить примеры задач с ограниченными и исчезающими на бесконечности мероморфными решениями.

2. Эллиптические решения однородной задачи Римана. В этом разделе решается вопрос существования двоякопериодических решений однородной краевой задачи Римана в бесконечно связной области с заданным эллиптическим коэффициентом, общим для всех контуров. Приводятся примеры задач, допускающих такие решения.

Пусть задано счетное семейство простых гладких замкнутых попарно непересекающихся контуров $\left\{L_{m,n} \mid m,n \in \mathbf{Z}\right\}$, ограничивающих непересекающиеся области $D^+_{m,n}$ и образующих на комплексной плоскости двоякопериодическую структуру: $\exists \omega_1, \omega_2 \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ $\forall m,n \in \mathbf{Z}$ $\left(\operatorname{Im}\dfrac{\omega_2}{\omega_1} > 0 \ \wedge \ L_{m,n} = \left\{ t + 2\omega_1 m + 2\omega_2 n \mid t \in L_{0,0} \right\}\right)$. Пусть также задана эллиптическая функция $G(z)$ с основными периодами $2\omega_1$, $2\omega_2$, не имеющая полюсов на множестве $\left\{L_{m,n} \mid m,n \in \mathbf{Z}\right\}$. Обозначим $D^+ = \bigcup\limits_{m,n \in \mathbf{Z}} D^+_{m,n}$, $D^- = \mathbf{C} \setminus \overline{D^+}$. Требуется выяснить, существует ли эллиптическая функция $\Phi^-(z)$, аналитическая в области D^-, и эллиптическая функция $\Phi^+(z)$, аналитическая в области D^+, предельные значения которых непрерывны вплоть до кривых $L_{m,n}$ и удовлетворяют на них граничным условиям

$$\Phi^+(t) = \Phi^-(t) \cdot G(t), \ t \in \left\{L_{m,n} \mid m,n \in \mathbf{Z}\right\}. \tag{4}$$

Методы решения краевых задач для абстрактной римановой поверхности описаны в [7]. Параллелограмм с попарно отождествленными противоположными сторонами топологически эквивалентен тору, т. е. римановой поверхности рода 1. Задача Римана на торе рассматривалась, например, в работах [8, 9]. Здесь же мы решим поставленную задачу как частный случай задачи, рассмотренной в предыдущем разделе.

Выберем некоторый параллелограмм периодов функции $G(z)$, например, параллелограмм Π с вершинами в точках 0, $2\omega_1$, $2\omega_2$ и $2\omega_1+2\omega_2$ (для определенности будем считать, что отрезки, соединяющие точку $2\omega_1+2\omega_2$ с точками $2\omega_1$ и $2\omega_2$, этому параллелограмму не принадлежат). Обозначим через a_j нули $G(z)$ кратности k_j, принадлежащие множеству $\Pi \cap D^+$ $\left(j = \overline{1, N^+}\right)$, через b_j – нули кратности l_j, принадлежащие множеству $\Pi \cap \overline{D^-}$ $\left(j = \overline{1, N^-}\right)$, через c_j – полюсы $G(z)$ кратности m_j, принадлежащие множеству $\Pi \cap D^+$ $\left(j = \overline{1, P^+}\right)$, через d_j – полюсы кратности n_j, принадлежащие множеству $\Pi \cap D^-$ $\left(j = \overline{1, P^-}\right)$. Тогда, согласно [10, с. 18], число указанных нулей и полюсов совпадает:

$$\sum_{j=1}^{N^+} k_j + \sum_{j=1}^{N^-} l_j = \sum_{j=1}^{P^+} m_j + \sum_{j=1}^{P^-} n_j,$$

причем их суммы конгруэнтны друг другу относительно периодов $2\omega_1$, $2\omega_2$:

$$\sum_{j=1}^{N^+} k_j a_j + \sum_{j=1}^{N^-} l_j b_j \equiv \sum_{j=1}^{P^+} m_j c_j + \sum_{j=1}^{P^-} n_j d_j \ \left(\operatorname{mod}\left(2\omega_1, 2\omega_2\right)\right).$$

Заменяя, если потребуется, один из нулей или полюсов конгруэнтной величиной (обозначая его тем же символом), можно добиться равенства

$$\sum_{j=1}^{N^+} k_j a_j + \sum_{j=1}^{N^-} l_j b_j = \sum_{j=1}^{P^+} m_j c_j + \sum_{j=1}^{P^-} n_j d_j.$$

Так как функция $G(z)$ является эллиптической, то, согласно [10, с. 56], ее можно выразить через сигма-функцию Вейерштрасса

$$\sigma(z) = z \cdot \prod_{\substack{m,n\in\mathbf{Z} \\ (m;n)\neq(0;0)}} \left[\left(1 - \frac{z}{\Omega_{m,n}}\right) \cdot \exp\left(\frac{z}{\Omega_{m,n}} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{\Omega_{m,n}}\right)^2 \right) \right] \quad (\Omega_{m,n} = 2\omega_1 m + 2\omega_2 n)$$

с теми же основными периодами $2\omega_1$, $2\omega_2$:

$$G(z) = C \cdot \frac{\prod_{j=1}^{N^+} \sigma^{k_j}(z - a_j) \cdot \prod_{j=1}^{N^-} \sigma^{l_j}(z - b_j)}{\prod_{j=1}^{P^+} \sigma^{m_j}(z - c_j) \cdot \prod_{j=1}^{P^-} \sigma^{n_j}(z - d_j)} \quad (C = \mathrm{const} \neq 0). \tag{5}$$

Поскольку в любом параллелограмме периодов эллиптической функции содержится конечное число нулей и полюсов, то каждое из произведений в равенстве (5) также является конечным.

В случае если область D^+ не содержит нулей функции $G(z)$, будем полагать $N^+ = 0$, $\sum_{j=1}^{N^+} k_j = \sum_{j=1}^{N^+} k_j a_j = 0$, $\prod_{j=1}^{N^+} \sigma^{k_j}(z - a_j) = 1$. Подобные допущения примем и для остальных случаев, когда одна из областей не содержит нулей либо полюсов функции $G(z)$. Будем называть ненулевое решение задачи кусочно-эллиптическим, если каждая из его компонент $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$ является двоякопериодической функцией в области D^+ и D^- соответственно (наша постановка задачи согласуется с этим термином). Условимся также называть решение задачи единственным, если любые два решения задачи отличаются лишь постоянным множителем.

Обозначим символом χ алгебраическую сумму порядков нулей и полюсов функции $G(z)$, принадлежащих области $D^+_{0,0}$.

Теорема 2. *Пусть* $\chi = \sum_{j=1}^{N^+} k_j - \sum_{j=1}^{P^+} m_j$. *Тогда*

1) *если* $\chi > 0$, *то однородная задача Римана с коэффициентом* (5) *и краевым условием* (4) *имеет кусочно-эллиптические решения, причем*

1а) *при* $\chi = 1$ *решение единственно,*

1б) *при* $\chi > 1$ *решение зависит от* $\chi - 1$ *произвольных независимых параметров;*

2) *если* $\chi = 0$, *то кусочно-эллиптическое решение существует лишь при выполнении условия* $\sum_{j=1}^{N^+} k_j a_j = \sum_{j=1}^{P^+} m_j c_j$, *при этом данное решение является единственным;*

3) *если* $\chi < 0$, *то кусочно-эллиптических решений задача не имеет.*

Доказательство. Согласно утверждению теоремы 1 для случая $N = 1$, кусочно-аналитическое решение задачи с граничным условием (4) запишется в виде (3):

$$\Phi(z) = \begin{cases} \dfrac{c_1(z)}{a_1(z)} \cdot h(z), \ z \in D^-, \\ \dfrac{b_1(z)}{d_1(z)} \cdot h(z), \ z \in D^+, \end{cases}$$

или

$$\Phi^-(z) = \frac{\prod_{j=1}^{P^+} \sigma^{m_j}(z - c_j)}{\prod_{j=1}^{N^+} \sigma^{k_j}(z - a_j)} \cdot h(z); \quad \Phi^+(z) = \frac{C \cdot \prod_{j=1}^{N^-} \sigma^{l_j}(z - b_j)}{\prod_{j=1}^{P^-} \sigma^{n_j}(z - d_j)} \cdot h(z), \tag{6}$$

где $C = \mathrm{const}$, а $h(z)$ – произвольная целая функция. Рассмотрим возможные случаи.

1. Пусть

$$\chi = \sum_{j=1}^{N^+} k_j - \sum_{j=1}^{P^+} m_j > 0.$$

Из равенства

$$\sum_{j=1}^{N^+} k_j + \sum_{j=1}^{N^-} l_j = \sum_{j=1}^{P^+} m_j + \sum_{j=1}^{P^-} n_j$$

следует, что и

$$\sum_{j=1}^{P^-} n_j - \sum_{j=1}^{N^-} l_j = \chi > 0.$$

При $\chi > 1$ (случай 1б)) выберем произвольный вектор $H = \left(h_1; h_2; ...; h_{\chi-1}\right) \in \mathbf{C}^{\chi-1}$ и построим целую функцию $h(z) = C_1 \cdot \prod_{j=1}^{\chi} \sigma\left(z - h_j\right)$, где C = const, а h_χ – пока неизвестное число. Для того чтобы функция $\Phi^-(z)$ в (6) являлась эллиптической, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\sum_{j=1}^{P^+} m_j c_j + \sum_{j=1}^{\chi} h_j = \sum_{j=1}^{N^+} k_j a_j,$$

откуда

$$h_\chi = \sum_{j=1}^{N^+} k_j a_j - \sum_{j=1}^{P^+} m_j c_j - \sum_{j=1}^{\chi-1} h_j.$$

В этом случае обе компоненты решения (6) будут эллиптическими функциями, зависящими от произвольных независимых параметров h_1, h_2, … , $h_{\chi-1}$. При $\chi = 1$ (случай 1а)) получим единственную функцию $h(z) = C_1 \cdot \sigma\left(z - h_1\right)$, где C_1 = const и $h_1 = \sum_{j=1}^{N^+} k_j a_j - \sum_{j=1}^{P^+} m_j c_j$.

2. Пусть

$$\sum_{j=1}^{N^+} k_j = \sum_{j=1}^{P^+} m_j,$$

т. е. $\chi = 0$. В этом случае решения (6) будут кусочно-эллиптическими лишь тогда, когда

$$\sum_{j=1}^{N^+} k_j a_j = \sum_{j=1}^{P^+} m_j c_j, \quad h(z) \equiv C_1 = \text{const}.$$

При этом также имеют место равенства

$$\sum_{j=1}^{N^-} l_j = \sum_{j=1}^{P^-} n_j, \quad \sum_{j=1}^{N^-} l_j b_j = \sum_{j=1}^{P^-} n_j d_j,$$

откуда следует, что функция $G(z)$ представима в виде отношения двух эллиптических функций,

$$G_1(z) = \frac{CC_1 \cdot \prod_{j=1}^{N^-} \sigma^{l_j}\left(z - b_j\right)}{\prod_{j=1}^{P^-} \sigma^{n_j}\left(z - d_j\right)},$$

имеющей нули на множестве $\overline{D^-}$ и полюсы в области D^-, и

$$G_2(z) = \frac{C_1 \cdot \prod_{j=1}^{P^+} \sigma^{m_j}\left(z - c_j\right)}{\prod_{j=1}^{N^+} \sigma^{k_j}\left(z - a_j\right)},$$

имеющей нули и полюсы лишь в области D^+. В частности, при $P^+ = N^+ = 0$ либо $P^- = N^- = 0$ решение (6) задачи запишется в виде

$$\Phi(z) = \begin{cases} h(z), \ z \in D^-, \\ \dfrac{C \cdot \prod_{j=1}^{N^-} \sigma^{l_j}\left(z - b_j\right)}{\prod_{j=1}^{P^-} \sigma^{n_j}\left(z - d_j\right)} \cdot h(z), \ z \in D^+ \end{cases}$$

либо соответственно

$$\Phi(z) = \begin{cases} \dfrac{\prod_{j=1}^{P^+} \sigma^{m_j}\left(z - c_j\right)}{\prod_{j=1}^{N^+} \sigma^{k_j}\left(z - a_j\right)} \cdot h(z), \ z \in D^-, \\ C \cdot h(z), \ z \in D^+. \end{cases}$$

При $h(z) \equiv C_1 = \text{const}$ (и только в этом случае) получим единственное кусочно-эллиптическое решение

$$\Phi(z) = \begin{cases} C_1, \ z \in D^-, \\ C_1 \cdot G(z), \ z \in D^+ \end{cases}$$

либо

$$\Phi(z) = \begin{cases} \dfrac{C_1}{G(z)}, \ z \in D^-, \\ C_1, \ z \in D^+, \end{cases}$$

одна из компонент которого является эллиптической дробно-рациональной функцией, а другая – постоянной.

3. Пусть $\chi < 0$, откуда

$$\sum_{j=1}^{P^+} m_j > \sum_{j=1}^{N^+} k_j, \quad \sum_{j=1}^{N^-} l_j > \sum_{j=1}^{P^-} n_j.$$

Тогда при любом выборе целой функции $h(z)$ компоненты $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$ решения (6) не являются эллиптическими функциями, поскольку в любом параллелограмме периодов число нулей этих компонент заведомо больше числа полюсов (с учетом порядка). В частности, если $N^+ = 0$, $P^+ > 0$ либо $P^- = 0$, $N^- > 0$, то одна из компонент решения является целой функцией, отличной от постоянной. Теорема 2 доказана.

Заметим, что в случае 1б) параметры $h_1, h_2, \ldots, h_{\chi-1}$, являющиеся нулями «компенсирующей» функции $h(z)$, могут принимать любые, в том числе и повторяющиеся значения. Укажем, в частности, способ построения функции $h(z)$, имеющей в любом параллелограмме периодов функции $G(z)$ лишь один нуль порядка χ. Пусть $h(z) = C_1 \cdot \sigma^{\chi}\left(z - h_0\right)$. Для того чтобы функция

$$\Phi^-(z) = \frac{\left(\prod_{j=1}^{P^+} \sigma^{m_j}\left(z - c_j\right)\right) \cdot \left(C_1 \cdot \sigma^{\chi}\left(z - h_0\right)\right)}{\prod_{j=1}^{N^+} \sigma^{k_j}\left(z - a_j\right)}$$

являлась эллиптической, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\sum_{j=1}^{P^+} m_j c_j + \chi h_0 = \sum_{j=1}^{N^+} k_j a_j,$$

откуда

$$h_0 = \frac{1}{\chi}\left(\sum_{j=1}^{N^+} k_j a_j - \sum_{j=1}^{P^+} m_j c_j\right).$$

При этом получим решение

$$\Phi(z) = \begin{cases} C_1 \dfrac{\prod_{j=1}^{P^+} \sigma^{m_j}\left(z - c_j\right)}{\prod_{j=1}^{N^+} \sigma^{k_j}\left(z - a_j\right)} \cdot \sigma^{\chi}\left(z - \dfrac{1}{\chi}\left(\sum_{j=1}^{N^+} k_j a_j - \sum_{j=1}^{P^+} m_j c_j\right)\right), & z \in D^-, \\[2ex] CC_1 \dfrac{\prod_{j=1}^{N^-} \sigma^{l_j}\left(z - b_j\right)}{\prod_{j=1}^{P^-} \sigma^{n_j}\left(z - d_j\right)} \cdot \sigma^{\chi}\left(z - \dfrac{1}{\chi}\left(\sum_{j=1}^{N^+} k_j a_j - \sum_{j=1}^{P^+} m_j c_j\right)\right), & z \in D^+, \end{cases}$$

не зависящее явно от параметров.

П р и м е р 1. Построим соответствующие случаю 1а) эллиптическую функцию $G(z)$ и семейство контуров $\left\{L_{m,n} \,\middle|\, m, n \in \mathbf{Z}\right\}$. Пусть основные периоды функции $G(z)$ равны 4 и $4i$, ее простые нули находятся в точках $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $b_1 = 3i$, а ее простые полюсы – в точках $c_1 = i$, $d_1 = 2i$, $d_2 = 3$. Пусть также внутри контуров $L_{m,n}$ $\left(m, n \in \mathbf{Z}\right)$ находятся точки a_1, a_2, c_1 и им конгруэнтные, а вне их – точки b_1, d_1, d_2 и им конгруэнтные (относительно периодов 4, $4i$). Учитывая, что $a_1 + a_2 + b_1 = c_1 + d_1 + d_2$, построим функцию $G(z)$ в виде (5):

$$G(z) = C \cdot \frac{\sigma\left(z - a_1\right) \cdot \sigma\left(z - a_2\right) \cdot \sigma\left(z - b_1\right)}{\sigma\left(z - c_1\right) \cdot \sigma\left(z - d_1\right) \cdot \sigma\left(z - d_2\right)} \quad \left(C = \text{const} \neq 0\right).$$

Тогда кусочно-аналитическое решение задачи с краевым условием (4) запишется в виде (6):

$$\Phi(z)=\begin{cases}\Phi^-(z)=\dfrac{\sigma(z-c_1)}{\sigma(z-a_1)\cdot\sigma(z-a_2)}\cdot h(z),\ z\in D^-;\\ \Phi^+(z)=\dfrac{C\cdot\sigma(z-b_1)}{\sigma(z-d_1)\cdot\sigma(z-d_2)}\cdot h(z),\ z\in D^+.\end{cases}$$

Подберем целую функцию $h(z)=C_1\cdot\sigma(z-h_1)$ $(C_1=\text{const})$ таким образом, чтобы функция

$$\Phi^-(z)=C_1\cdot\frac{\sigma(z-c_1)\cdot\sigma(z-h_1)}{\sigma(z-a_1)\cdot\sigma(z-a_2)}$$

была эллиптической: $c_1+h_1=a_1+a_2 \Leftrightarrow h_1=a_1+a_2-c_1=3-i.$ Тогда кусочно-эллиптическое решение задачи запишется в виде

$$\Phi(z)=\begin{cases}C_1\cdot\dfrac{\sigma(z-i)\cdot\sigma(z-(3-i))}{\sigma(z-1)\cdot\sigma(z-2)},\ z\in D^-,\\ CC_1\cdot\dfrac{\sigma(z-3i)\cdot\sigma(z-(3-i))}{\sigma(z-2i)\cdot\sigma(z-3)},\ z\in D^+,\end{cases}$$

и, очевидно, будет единственным с точностью до постоянного множителя.

Рассмотрим теперь соответствующий случаю 1б) пример, когда выбор «компенсирующей» целой функции уже не является определенным.

П р и м е р 2. Пусть коэффициентом однородной задачи является $\wp$-функция Вейерштрасса

$$\wp(z)=\frac{1}{z^2}+\sum_{\substack{m,n\in\mathbf{Z}\\(m;n)\neq(0;0)}}\left[\frac{1}{(z-\Omega_{m,n})^2}-\frac{1}{\Omega_{m,n}{}^2}\right],$$

параллелограммы периодов которой являются прямоугольниками со сторонами, параллельными действительной и мнимой оси. В этом случаеее простые нули находятся в точках вида $\omega^{\pm}_{m.n}=\alpha(2m+1)\pm\gamma+\beta(2n+1)i$ $(0<\gamma<\alpha)$, а полюсы второго порядка – в точках $\Omega_{m,n}=2\alpha m+2\beta ni$ $(\alpha,\beta\in\mathbf{R}_+,\ m,n\in\mathbf{Z})$. Поскольку сумма простых нулей $\omega^-_{0,0}=\alpha-\gamma+\beta i$ и $\omega^+_{-1,-1}=-\alpha+\gamma-\beta i$ есть полюс второго порядка $\Omega_{0,0}=0$, то имеет место следующее представление $\wp$-функции Вейерштрасса в виде (5):

$$\wp(z)=C\cdot\frac{\sigma(z-(\alpha-\gamma+\beta i))\cdot\sigma(z+(\alpha-\gamma+\beta i))}{\sigma^2(z)},$$

где постоянная C зависит от чисел α и β. Рассмотрим всевозможные варианты расположения контуров $\{L_{m,n}\mid m,n\in\mathbf{Z}\}$, при которых ограничиваемые ими области $D^+_{m,n}$ образуют двоякопериодическую структуру на плоскости, согласованную с решеткой периодов функции $\wp(z)$: $\forall m,n\in\mathbf{Z}$ $\left(L_{m,n}=\{t+2\alpha m+2\beta ni \mid t\in L_{0,0}\}\right)$. Для каждого варианта рассмотрим вопрос о существовании двоякопериодических (как постоянных, так и дробно-рациональных) решений.

1. Пусть область $D^+_{0,0}$ не содержит нулей и полюсов функции $\wp(z)$, т. е. $P^+=N^+=0$ (случай $\chi=0$). Тогда, согласно (3), мероморфное решение задачи запишется в виде

$$\Phi(z)=\begin{cases}h(z),\ z\in D^-,\\ \dfrac{C\cdot\sigma(z-(\alpha-\gamma+\beta i))\cdot\sigma(z+(\alpha-\gamma+\beta i))}{\sigma^2(z)}\cdot h(z),\ z\in D^+.\end{cases}$$

При $h(z) \equiv C_1 = \text{const}$ получим единственное кусочно-эллиптическое решение

$$\Phi(z) = \begin{cases} C_1, \ z \in D^-, \\ C_1 \cdot \wp(z), \ z \in D^+. \end{cases}$$

2. Пусть область $D_{0,0}^+$ содержит оба нуля функции $\wp(z)$ в прямоугольнике периодов, а ее полюс принадлежит области D^-. Тогда, используя разложение (2), приведем равенство (3) к виду

$$\Phi(z) = \begin{cases} \dfrac{h(z)}{\sigma\big(z-(\alpha-\gamma+\beta i)\big)\cdot\sigma\big(z+(\alpha-\gamma+\beta i)\big)}, \ z \in D^-, \\ \dfrac{C\cdot h(z)}{\sigma^2(z)}, \ z \in D^+. \end{cases}$$

Следуя случаю 1б) теоремы 2, построим целую функцию $h(z) = C_1 \cdot \sigma\big(z-h_1\big)\cdot\sigma\big(z-h_2\big)$ $\big(C_1 = \text{const}\big)$, для которой функция $\Phi(z)$ будет эллиптической в обеих областях D^+ и D^-. Так как $\big(\alpha-\gamma+\beta i\big)+\big(-\alpha+\gamma-\beta i\big)=0$, то $h_1 + h_2 = 0$, откуда $h_2 = -h_1$ и $h(z) = C_1\cdot\sigma\big(z-h_1\big)\cdot\sigma\big(z+h_1\big)$. Таким образом, получим бесконечное множество кусочно-эллиптических решений вида

$$\Phi(z) = \begin{cases} C_1 \cdot \dfrac{\sigma\big(z-h_1\big)\cdot\sigma\big(z+h_1\big)}{\sigma\big(z-(\alpha-\gamma+\beta i)\big)\cdot\sigma\big(z+(\alpha-\gamma+\beta i)\big)}, \ z \in D^-, \\ CC_1 \cdot \dfrac{\sigma\big(z-h_1\big)\cdot\sigma\big(z+h_1\big)}{\sigma^2(z)}, \ z \in D^+, \end{cases}$$

зависящее от параметра $h_1 \in \mathbf{C}$. При $h_1 = 0$, $h_1 = \alpha-\gamma+\beta i$ или $h_1 = -\alpha+\gamma-\beta i$ одна из компонент решения будет постоянной, а в остальных случаях обе компоненты будут эллиптическими дробно-рациональными функциями.

3. Пусть область $D_{0,0}^+$ содержит полюс $z = 0$ функции $\wp(z)$, а оба нуля $\wp(z)$ лежат в области $\overline{D^-}$, что соответствует случаю $N^+ = 0$, $P^+ > 0$ $(\chi < 0)$. Тогда равенство (3) принимает вид

$$\Phi(z) = \begin{cases} \sigma^2(z)\cdot h(z), \ z \in D^-, \\ C\cdot\sigma\big(z-(\alpha-\gamma+\beta i)\big)\cdot\sigma\big(z+(\alpha-\gamma+\beta i)\big)\cdot h(z), \ z \in D^+, \end{cases}$$

и определяет кусочно-целую в области $D^- \cup D^+$ функцию. Эллиптических функций среди решений нет.

4. Пусть область $D_{0,0}^+$ содержит как полюс $\Omega_{0,0} = 0$ функции $\wp(z)$, так и оба ее нуля, т. е. $P^- = N^- = 0$ $(\chi = 0)$. В этом случае единственное двоякопериодическое решение задачи запишется в виде

$$\Phi(z) = \begin{cases} \dfrac{C_1}{\wp(z)}, \ z \in D^-, \\ C_1, \ z \in D^+. \end{cases}$$

5. Пусть полюс $\Omega_{0,0} = 0$ и один из нулей $\omega_{0,0}^- = \alpha-\gamma+\beta i$ функции $\wp(z)$ принадлежат области $D_{0,0}^+$, а нуль $\omega_{0,0}^+ = \alpha+\gamma+\beta i$ – области D^- (случай $\chi < 0$). Тогда равенство (3) примет вид

$$\Phi(z) = \begin{cases} \dfrac{\sigma^2(z)}{\sigma\big(z-(\alpha-\gamma+\beta i)\big)}\cdot h(z), \ z \in D^-, \\ C\cdot\sigma\big(z+(\alpha-\gamma+\beta i)\big)\cdot h(z), \ z \in D^+. \end{cases}$$

Очевидно, эллиптических функций среди решений нет.

6. Один из нулей $\omega_{0,0}^{-}=\alpha-\gamma+\beta i$ функции $\wp(z)$ принадлежат области $D_{0,0}^{+}$, а другой нуль $\omega_{0,0}^{+}=\alpha+\gamma+\beta i$ и полюс $\Omega_{0,0}=0$ – области D^{-} (случай $\chi<0$). В этом случае равенство (3) запишется в виде

$$\Phi(z)=\begin{cases}\dfrac{\sigma\big(z+(\alpha-\gamma+\beta i)\big)}{\sigma\big(z-(\alpha-\gamma+\beta i)\big)}\cdot h(z),\ z\in D^{-},\\ \dfrac{C}{\sigma^{2}(z)}\cdot h(z),\ z\in D^{+}.\end{cases}$$

Поскольку $\alpha-\gamma+\beta i\neq-\alpha+\gamma-\beta i,$ то эллиптических функций среди решений в этом случае также нет.

Заключение. В данной работе в замкнутой форме было получено решение однородной краевой задачи Римана с мероморфными коэффициентами для бесконечно связных областей, а также решен вопрос существования двоякопериодических решений задачи с эллиптическим коэффициентом, общим для всех контуров. Полученные результаты могут служить базой для исследования случая, когда коэффициенты задачи являются различными для каждого из контуров $L_k\ (k\in\mathbf{N}),$ а также при решении неоднородной задачи Римана с мероморфными коэффициентами и свободными членами в бесконечно связных областях.

Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность рецензенту за внимательное прочтение статьи и полезные советы по улучшению представления полученных результатов.

Acknowledgements. The author is grateful to the reviewer for careful reading of the article and useful advice how to better present the results obtained.

Список использованных источников

1. Ахиезер, Н. И. О некоторых формулах обращения сингулярных интегралов / Н. И. Ахиезер // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1945. – Т. 9. – С. 275–290.

2. Говоров, Н. В. Краевая задача Римана с бесконечным индексом / Н. В. Говоров. – М.: Наука, 1986. – 240 с.

3. Гахов, Ф. Д. Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. – М.: Наука, 1977. – 640 с.

4. Mityushev, V. V. Analytical Methods for Heat Conduction in Composites and Porous Media / V. V. Mityushev, E. V. Pesetskaya, S. V. Rogosin // Cellular and Porous Materials: Thermal Properties Simulation and Prediction / eds.: A. Öchsner, G. Murch, M. de Lemos. – Amsterdam: Wiley-VCH, 2007. – P. 124–167.

5. Чибрикова, Л. И. О граничных задачах для прямоугольника / Л. И. Чибрикова // Учен. зап. Казан. ун-та. – 1964. – Т. 123, кн. 10. – С. 15–39.

6. Аксентьева, Е. П. Задача Римана в случае двоякопериодического расположения дуг. I / Е. П. Аксентьева, И. Г. Салехова // Учен. зап. Казан. ун-та. – 2008. – Т. 150, кн. 4. – С. 66–79.

7. Зверович, Э. И. Краевые задачи теории аналитических функций в гёльдеровских классах на римановых поверхностях / Э. И. Зверович // Успехи мат. наук. – 1971. – Т. 26, вып. 1 (157). – С. 113–179.

8. Зверович, Э. И. Ядро Беенке – Штейна и решение в замкнутой форме краевой задачи Римана на торе / Э. И. Зверович // Докл. АН СССР. – 1969. – Т. 188, № 1. – С. 27–30.

9. Дегтяренко, Н. А. Двоякопериодический мероморфный аналог ядра Коши и некоторые его применения / Н. А. Дегтяренко // Изв. высш. учеб. заведений. Математика. – 1999. – № 8. – С. 11–19.

10. Ахиезер, Н. И. Элементы теории эллиптических функций / Н. И. Ахиезер. – М.: Наука, 1970. – 304 с.

References

1. Akhiezer N. I. On some inversion formulas for singular integrals. *Izvestiya AN SSSR. Seriya matematicheskaya* [Mathematics of the USSR - Izvestiya], 1945, vol. 9, pp. 275–290. (in Russian).

2. Govorov N. V. *Riemann's boundary problem with infinite index*. Moscow, Nauka Publ., 1986. 240 p. (in Russian).

3. Gakhov F. D. *Boundary value problems*. Moscow, Nauka Publ., 1977. 640 p. (in Russian).

4. Mityushev V. V., Pesetskaya E. V., Rogosin S. V. Analytical Methods for Heat Conduction in Composites and Porous Media. Öchsner A., Murch G., de Lemos M. (eds.). *Cellular and Porous Materials: Thermal Properties Simulation and Prediction*. Amsterdam, Wiley-VCH, 2007, pp. 124–167. Doi: 10.1002/9783527621408.ch5

5. Chibrikova L. I. Boundary value problems for a rectangle. *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta* [Bulletin of the Kazan University], 1964, vol. 123, book 10, pp. 15–39. (in Russian).

6. Aksent'eva E. P., Salekhova I. G. Riemann problem in a case of doubly periodic arrangements of arches. I. *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta* [Bulletin of the Kazan University], 2008, vol. 150, book 4, pp. 66–79. (in Russian).

7. Zverovich E. I. Boundary value problems in the theory of analytic functions in Hölder classes on Riemann surfaces. *Russian Mathematical Surveys*, 1971, vol. 26, no. 1, pp. 117–192. Doi: 10.1070/RM1971v026n01ABEH003811

8. Zverovich E. I. The Behnke – Stein kernel and closed-form solution of Riemann's boundary value problem on the torus. *Doklady Akademii nauk SSSR* [Proceedings of the Academy of Sciences of the USSR], 1969, vol. 188, no. 1, pp. 27–30. (in Russian).

9. Degtyarenko N. A. A doubly periodic meromorphic analogue of the Cauchy kernel and some of its applications. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Matematika* [Russian Mathematics], 1999, no. 8, pp. 11–19. (in Russian).

10. Akhiezer N. I. *Elements of theory of elliptic functions*. Moscow, Nauka Publ., 1970. 304 p. (in Russian).

Информация об авторе

Юхимук Михаил Михайлович – старший преподаватель кафедры высшей математики, Брестский государственный технический университет (ул. Московская, 267, 224017, г. Брест, Республика Беларусь). E-mail: umm@tut.by

Information about the author

Yukhimuk Mikhail Mikhailovich – Senior Lecturer of the Department of Higher Mathematics, Brest State Technical University (267, Moskovskaya Str., 224017, Brest, Republic of Belarus). E-mail: umm@tut.by

Для цитирования

Юхимук, М. М. Однородная краевая задача Римана с мероморфными коэффициентами для бесконечно связных областей / М. М. Юхимук // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2017. – № 2. – С. 24–35.

For citation

Yukhimuk M. M. Homogeneous Riemann boundary value problem with meromorphic coefficients for infinitely connected domains. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series], 2017, no. 2, pp. 24–35. (in Russian).