ISSN 1561-2430 (print)
УДК 517.977

Поступила в редакцию 18.10.2016
Received 18.10.2016

Л. И. Минченко, Д. Е. Бережнов

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь

О ПСЕВДОЛИПШИЦЕВОСТИ МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ

Исследование свойств множества решений параметрических задач оптимизации представляет собой достаточно актуальную проблему. Значительные усилия направлены, в частности, на поиск условий различных типов обобщенной липшицевости множества решений, в частности условий их устойчивости (calmness) и псевдолипшицевости (Aubin property) [1]. Новый интересный подход к исследованию устойчивости множества решений предложен в работе М. Кановас и др. [2] в случае параметрической задачи линейного программирования и распространен Д. Клатте и Б. Куммером [3] на существенно более широкий круг задач. В данном подходе устойчивость множества решений связывается с устойчивостью некоторой ассоциированной системы, представляющей ограничение множества уровня целевой функции на множестве допустимых точек задачи. В настоящей статье предлагается расширить применение подхода [3] на исследование псевдолипшицевости множества решений; представлены некоторые достаточные условия псевдолипшицевости множества решений, а также обобщение леммы Хоффмана.

Ключевые слова: нелинейное программирование, множество решений, устойчивость, псевдолипшицевость

L. I. Minchenko, D. E. Berezhnov

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Belarus

PSEUDO-LIPSCHITZIAN CONTINUITY OF SOLUTION MAPPINGS IN PARAMETRICAL OPTIMIZATION PROBLEMS

The study of the properties of solution mappings in parametrical optimization problems represents an urgent problem. Particularly, considerable efforts are directed to finding the conditions of different types of generalized Lipschitzian continuity of solution mappings, namely their calmness and pseudo-Lipschitzian continuity (also referred to as the Aubin property) [1]. A new interesting approach to investigating the calmness of solution mappings has recently been proposed by Canovas et al. [2] for parametrical linear programming problems and applied to a much wider range of problems by Klatte and Kummer [3]. In this approach, the calmness of solution mappings is related to the calmness of an associated system representing a constraint on the level set of the objective function on the domain of the problem. In our note, we propose to expand the use of the approach [3] for investigating the pseudo-Lipschitzian continuity of solution mappings. Several sufficient conditions for the pseudo-Lipschitzian continuity of solution mappings, as well as the generalization of the Hoffman lemma are presented.

Keywords: nonlinear programming, solution mapping, calmness, pseudo-Lipschitzian continuity

1. Введение и постановка задачи. В данной статье мы рассматриваем задачу параметрической нелинейной оптимизации в конечномерных пространствах. Проблема изучения характера зависимости множества решений относительно изменений параметров представляет значительный интерес [1]. В частности, это касается наличия различных типов обобщенной и ослабленной липшицевости для многозначного отображения (solution mapping), связывающего вектор параметров с совокупностью всех решений задачи. (В дальнейшем для простоты будем говорить о зависимости множества решений от вектора параметров.) Одним из свойств ослабленной липшицевости является так называемая устойчивость относительно параметров (calmness), изучению которой посвящено достаточно много публикаций (см., напр., [1, 4–6]). Более сильной разновидностью ослабленной липшицевости является псевдолипшицевость, именуемая также свойством Обена [1]. В статьях [2, 3] предложен новый подход к исследованию устойчивости (calmness), а в [3] получены новые достаточные условия устойчивости для общей задачи оптимизации с параметрами.

Целью данного исследования является получение условий, при которых множество решений параметрической задачи оптимизации псевдолипшицево относительно вектора параметров. Для исследования псевдолипшицевости множества решений применяется подход [2, 3] и получаются достаточные условия псевдолипшицевости для задачи математического программирования.

Рассмотрим задачу $P(x)$ минимизации функции $f(x, y)$ по переменной $y \in F(x)$, где $x \in R^n$ – вектор параметров, $y \in R^m$, F – многозначное отображение, ставящее в соответствие каждому $x \in R^n$ множество допустимых точек $F(x) \subset R^m$. Множество решений данной задачи при заданном значении вектора параметров $x \in R^n$ будем обозначать через $S(x)$.

Обозначим область определения и график отображения F через $\mathrm{dom}F = \{x \in R^n \mid F(x) \neq \varnothing\}$ и $\mathrm{gr}F = \{(x, y) \mid y \in F(x), \quad x \in R^n\}$ соответственно. Пусть $v \in R^s$, $C \subset R^s$, где $s = m$ или $s = n$. Через $d(v, C)$ обозначим евклидово расстояние от вектора v до множества C, через $|v|$ – евклидову норму вектора v. Под нормой вектора $(x, y) \in R^n \times R^m$ будем понимать $|(x, y)| = |x| + |y|$. Обозначим также через B открытый единичный шар, а через $V_r(z)$ – окрестность точки z радиуса r в соответствующем пространстве R^n или R^m. Будем предполагать, что многозначное отображение F замкнуто (т. е. $\mathrm{gr}F$ – замкнутое множество в $R^n \times R^m$), $(x^0, y^0) \in \mathrm{gr}F$ – заданная точка, функция f липшицева в окрестности (x^0, y^0).

Введем также функцию оптимального значения

$$\varphi(x) = \inf\{f(x, y) \mid y \in F(x)\}$$

и, следуя [3], многозначное отображение L, ставящее в соответствие каждой точке $(x, \mu) \in R^n \times R$ множество $L(x, \mu) = L(x, x^0, \mu) = \{y \in F(x) \,|\, f(x^0, y) \leq \mu\}$.

Многозначное отображение F называется *устойчивым* (*calm*) в точке $(x^0, y^0) \in \mathrm{gr}F$, если существуют положительные числа l, ε и δ такие, что

$$F(x) \cap V_\varepsilon(y^0) \subset F(x^0) + l\left|x - x^0\right| B \quad \forall x \in V_\delta(x^0). \tag{1}$$

Отметим, что при этом возможно $F(x) \cap V_\varepsilon(y^0) = \varnothing$ при $x \neq x^0$.

Многозначное отображение F называется *псевдолипшицевым* (относительно $\mathrm{dom}F$) в точке $(x^0, y^0) \in \mathrm{gr}F$, если существуют положительные числа l, ε и δ такие, что

$$F(\tilde{x}) \cap V_\varepsilon(y^0) \subset F(x) + l\left|\tilde{x} - x\right| B, \quad \forall x, \tilde{x} \in V_\delta(x^0), \quad \left(\forall x, \tilde{x} \in V_\delta(x^0) \cap \mathrm{dom}F\right). \tag{2}$$

Многозначное отображение F называется *полунепрерывным снизу по Липшицу* (Lipschitz l.s.c.) в точке $(x^0, y^0) \in \mathrm{gr}F$, если существуют положительные числа l и δ такие, что

$$d(y^0, F(x)) \leq l\left|x - x^0\right| \quad \forall x \in V_\delta(x^0). \tag{3}$$

Отметим, что из (3) следует, что $F(x) \cap V_\varepsilon(y^0) \neq \varnothing$ для любого $\varepsilon > 0$, если $\left|x - x^0\right| < \min\{\delta, \varepsilon / l\}$.

Нижним топологическим пределом (Painleve-Kuratowski lower limit) многозначного отображения F в точке $x^0 \in \mathrm{dom}F$ называется множество $\lim\limits_{x \to x^0} \inf F(x) = \{y \in R^m \mid \forall x^k \to$ $\to x^0$ $\exists$ *последовательность* $\{y^k\}$ *такая, что* $y^k \in F(x^k)$ *и* $y^k \to y$ *при* $k = 1, 2, \ldots\}$.

Многозначное отображение F будем называть *полунепрерывным снизу* (п.н.сн.) в точке $(x^0, y^0) \in \mathrm{gr}F$, если $y^0 \in \lim\limits_{x \to x^0} \inf F(x)$.

Следуя [3], наряду с многозначным отображением S и функцией $\varphi(x)$ будем рассматривать для произвольного замкнутого множества $V \subset R^m$ отображение

$$S_V(x) = \arg\min_y \{f(x, y) \,|\, y \in F(x) \cap V\}$$

и функцию

$$\varphi_V(x) = \min_y \{f(x, y) \,|\, y \in F(x) \cap V\}.$$

В работе [3] получен следующий основной результат.

У т в е р ж д е н и е. *Пусть* $(x^0, y^0) \in \mathrm{gr}S$. *Тогда, если*
(*i*) *отображение F устойчиво и полунепрерывно снизу по Липшицу в точке* (x^0, y^0),
(*ii*) *отображение L устойчиво в точке* $\left(\left(x^0, \varphi(x^0)\right), y^0\right)$,
то отображение S устойчиво в точке (x^0, y^0).

2. Основные результаты. Рассмотрим задачу $P(x)$, относительно которой приняты предположения о замкнутости многозначного отображения F и липшицевости целевой функции f в окрестности точки $(x^0, y^0) \in \mathrm{gr}S$.

Л е м м а 1. *Пусть отображение F псевдолипшицево в точке* $(x^0, y^0) \in \mathrm{gr}S$ *относительно* $\mathrm{dom}F$ *с параметрами* $\varepsilon, \delta, l_F > 0$ *такими, что* $\varepsilon > \delta l_F$, *и функция f липшицева в окрестности множества* $V_\delta(x^0) \times V_\varepsilon(y^0)$ *с постоянной Липшица* $l_f > 0$. *Тогда при* $V = clV_\varepsilon(y^0)$ *справедливо* $F(x) \cap V \neq \varnothing \ \ \forall x \in V_\delta(x^0) \cap \mathrm{dom}F$ *и выполняется условие*

$$\varphi(x) - \varphi_V(\tilde{x}) \le l_\varphi |\tilde{x} - x|, \ \ \varphi(\tilde{x}) - \varphi_V(x) \le l_\varphi |\tilde{x} - x|$$
$$\forall x, \tilde{x} \in V_\delta(x^0) \cap \mathrm{dom}F, \tag{4}$$

где $l_\varphi = l_f(1 + l_F)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $F(x) \cap V = \varnothing$ при некотором $x \in V_\delta(x^0) \cap \mathrm{dom}F$. Тогда $d(y^0, F(x)) \ge \varepsilon$. Но $y^0 \in F(x^0) \cap V_\varepsilon(y^0)$, и, следовательно, $y^0 \in F(x) + l_F \left|x - x^0\right| B$ в силу (2). Таким образом, $\varepsilon \le d\left(y^0, F(x)\right) < l_F \delta$, что противоречит условию $\varepsilon > \delta l_F$. Следовательно, $F(x) \cap V \neq \varnothing$ для всех $x \in V_\delta(x^0) \cap \mathrm{dom}F$.

Далее, возьмем любые $\tilde{x}, x \in V_\delta(x^0) \cap \mathrm{dom}F$. Выберем точку $y(x) \in F(x) \cap V$ такую, что $\varphi_V(x) = f(x, y(x))$. Обозначим через $\tilde{y}(\tilde{x})$ точку из $F(\tilde{x})$, ближайшую к $y(x)$. Тогда

$$\varphi(\tilde{x}) - \varphi_V(x) \le f(\tilde{x}, \tilde{y}(\tilde{x})) - f(x, y(x)) \le$$
$$\le l_f(|\tilde{x} - x| + |\tilde{y}(\tilde{x}) - y(x)|) \le l_f(|\tilde{x} - x| + l_F|\tilde{x} - x|) = l_\varphi |\tilde{x} - x|.$$

Поскольку справедливо и обратное неравенство $\varphi(x) - \varphi_V(\tilde{x}) \le l_\varphi |\tilde{x} - x|$, то получаем (4). Лемма 1 доказана.

Т е о р е м а 1. *Пусть*
(*i*) *многозначное отображение F псевдолипшицево в точке* $(x^0, y^0) \in \mathrm{gr}S$ *относительно* $\mathrm{dom}F$,
(*ii*) *многозначное отображение L псевдолипшицево в точке* $\left(\left(x^0, \varphi(x^0)\right), y^0\right)$ *относительно* $\mathrm{dom}L$.
Тогда найдутся положительное число l_S, *окрестность U точки* x^0 *и замкнутая окрестность V точки* y^0 *такие, что*

$$S(x) \cap V \subset S(\tilde{x}) + l_S |\tilde{x} - x| B \tag{5}$$

для всех $x, \tilde{x} \in U$ *таких, что* $S(x) \cap V \neq \varnothing$ *и* $S(\tilde{x}) \cap V \neq \varnothing$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего покажем, что для любого замкнутого $V \subset R^m$ справедливо

$$S(x) \cap V \neq \varnothing \Rightarrow S_V(x) = S(x) \cap V. \tag{6}$$

Действительно, если $S(x) \cap V \neq \varnothing$, то $\varphi(x) = \varphi_V(x)$. Следовательно,

$$S_V(x) = F(x) \cap V \cap \{y \,|\, f(x, y) = \varphi(x)\} = S(x) \cap V.$$

Возьмем числа δ, ε и множество V таким образом, чтобы они удовлетворяли условиям леммы 1. Тогда постоянная Липшица функции f в окрестности множества $V_\delta(x^0) \times V_\varepsilon(y^0)$ будет равна $l_f > 0$.

Положим $\mu^0 = \varphi(x^0)$. Поскольку F и L псевдолипшицевы в точках (x^0, y^0) и $\left(\left(x^0, \varphi(x^0)\right), y^0\right)$ с постоянными Липшица l_F и l_L соответственно, то выполняются условия

$$\begin{gathered} F(\tilde{x}) \cap V_\varepsilon(y^0) \subset F(x) + l_F \left|\tilde{x} - x\right| B \quad \forall x, \tilde{x} \in V_\delta(x^0) \cap \operatorname{dom} F, \\ L(\tilde{x}, \tilde{\mu}) \cap V_\varepsilon(y^0) \subset L(x, \mu) + l_L (\left|\tilde{x} - x\right| + \left|\tilde{\mu} - \mu\right|) B \\ \forall x, \tilde{x} \in V_\delta(x^0), \quad \forall \mu, \tilde{\mu} \in V_\delta(\mu^0) \end{gathered} \tag{7}$$

таких, что $(x, \mu), (\tilde{x}, \tilde{\mu}) \in \operatorname{dom} L$.

Построим замкнутую окрестность $U = cl(x^0 + \delta_0 B)$ точки x^0 с радиусом $\delta_0 < \delta$ таким, что для всех $x, \tilde{x} \in U$ и всех $y \in V$ выполняются неравенства

$$l_\varphi \left|x - \tilde{x}\right| \le \delta / 4, \quad \left|f(x, y) - f(\tilde{x}, y)\right| \le l_f \left|x - \tilde{x}\right| \le \delta / 4. \tag{8}$$

Возьмем точки $x, \tilde{x} \in U$ такие, что $S(x) \cap V \ne \varnothing$ и $S(\tilde{x}) \cap V \ne \varnothing$. Тогда $\varphi(x) = \varphi_V(x)$, и с учетом леммы, условия которой выполнены, получим $\left|\varphi(\tilde{x}) - \varphi(x)\right| \le l_\varphi \left|\tilde{x} - x\right|$.

Далее,

$$\begin{gathered} y \in S(x) \Leftrightarrow (y \in F(x) \;\; и \;\; f(x, y) \le \varphi(x)) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (y \in F(x) \;\; и \;\; f(x^0, y) \le \varphi(x) + f(x^0, y) - f(x, y)) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (y \in L(x, \mu(x, y))), \end{gathered}$$

где $\mu(x, y) = \varphi(x) + f(x^0, y) - f(x, y)$, причем $(x, \mu(x, y)) \in \operatorname{dom} L$.

В силу (4) и (8) получаем

$$\begin{gathered} \left|\mu(x, y) - \varphi\left(x^0\right)\right| \le \left|\varphi(x) + f\left(x^0, y\right) - f(x, y) - \varphi\left(x^0\right)\right| \le \\ \le \left|\varphi(x) - \varphi\left(x^0\right)\right| + \left|f\left(x^0, y\right) - f(x, y)\right| \le \delta / 2, \end{gathered} \tag{9}$$

$$\begin{gathered} \left|\mu(\tilde{x}, y) - \varphi\left(x^0\right)\right| \le \left|\varphi(\tilde{x}) + f\left(x^0, y\right) - f(\tilde{x}, y) - \varphi\left(x^0\right)\right| \le \\ \le \left|\varphi(\tilde{x}) - \varphi\left(x^0\right)\right| + \left|f\left(x^0, y\right) - f(\tilde{x}, y)\right| \le \delta / 2. \end{gathered} \tag{10}$$

Следовательно, $\mu(x, y), \mu(\tilde{x}, y) \in V_\delta(\mu^0)$ и $(\tilde{x}, \mu(\tilde{x}, y)), (x, \mu(x, y)) \in \operatorname{dom} L$. С другой стороны, $L(x, \mu(x, y)) = S(x)$ и $L(\tilde{x}, \mu(\tilde{x}, y)) = S(\tilde{x})$, а условия (9), (10) обеспечивают справедливость (7) в точках $x, \tilde{x}$. Тогда, в силу (7),

$$\begin{gathered} S(x) \cap V = L\left(x, \mu(x, y)\right) \cap V \subset \\ \subset L\left(\tilde{x}, \mu(\tilde{x}, y)\right) + l_L \left(\left|\mu(x, y) - \mu(\tilde{x}, y)\right| + \left|x - x^0\right|\right) B \subset \\ \subset S(\tilde{x}) + l_L \left(\left|\mu(x, y) - \mu(\tilde{x}, y)\right| + \left|x - x^0\right|\right) B. \end{gathered}$$

При этом

$$\begin{gathered} \left|\mu(x, y) - \mu(\tilde{x}, y)\right| = \\ = \left|\varphi(x) + f\left(x^0, y\right) - f(x, y) - \varphi(\tilde{x}) - f\left(x^0, y\right) + f(\tilde{x}, y)\right| \le \\ \le \left|\varphi(x) - \varphi\left(x^0\right)\right| + \left|f(\tilde{x}, y) - f(x, y)\right| \le l_\varphi \left|x - \tilde{x}\right| + l_f \left|x - \tilde{x}\right|. \end{gathered}$$

Следовательно, окончательно получаем

$$S(x)\cap V\subset S(\tilde{x})+l_L\left(1+l_\varphi+l_f\right)\left|x-x^0\right|B.$$

Таким образом, (5) справедливо при $l_S=l_L(1+l_\varphi+l_f)$. Теорема 1 доказана.

Условие (5) теоремы 1 можно рассматривать как ослабленное свойство псевдолипшицевости множества решений $S(x)$. Подобного рода ослабленное свойство псевдолипшицевости вводилось в работе [7].

Из анализа доказательства теоремы 1 вытекает, что для утверждения о классической псевдолипшицевости $S(x)$ необходимо к предположениям теоремы 1 добавить требование полунепрерывности отображения S снизу в точке $(x^0,y^0)\in \mathrm{gr}S$. То есть справедливо

Следствие. *Пусть*

(*i*) *отображение F псевдолипшицево в точке* $(x^0,y^0)\in \mathrm{gr}S$ *относительно* dom*F*,

(*ii*) *отображение* $L(x,\mu)$ *псевдолипшицево в точке* $\left(\left(x^0,\varphi(x^0)\right),y^0\right)$ *относительно* dom*L*,

(*iii*) *отображение S полунепрерывно снизу на* dom*S в точке* (x^0, y^0).

Тогда найдутся положительные числа l_S, ε *и* δ *такие, что*

$$S(x)\cap V_\varepsilon(y^0)\subset S(\tilde{x})+l_S\left|\tilde{x}-x\right|B\quad \forall x,\tilde{x}\in V_\delta(x^0)\cap \mathrm{dom}S,$$

т. е. многозначное отображение S псевдолипшицево относительно dom*S в точке* (x^0, y^0).

Достаточное условие полунепрерывности снизу отображения S дает

Лемма 2. *Пусть*

(*i*) *отображение S равномерно ограничено в точке* x^0,

(*ii*) *функция* φ *полунепрерывна сверху в точке* x^0,

(*iii*) $S(x^0)=\{y^0\}$.

Тогда отображение S полунепрерывно снизу в точке (x^0, y^0) *относительно* dom*S*.

Доказательство. Возьмем произвольную последовательность $x^k\to x^0$ в dom$S$ и рассмотрим любую последовательность $y^k\in S(x^k)\neq\varnothing$. Вследствие равномерной ограниченности отображения S можно из $\{y^k\}$ извлечь сходящуюся подпоследовательность $\{y^{k_l}\}$, т. е. $y^{k_l}\to\tilde{y}$. При этом $\tilde{y}\in F(x^0)$ в силу замкнутости отображения F. С другой стороны, $f(x^{k_l},y^{k_l})=\varphi(x^{k_l})$, откуда $f(x^0,\tilde{y})\le\varphi(x^0)$. Таким образом, $\tilde{y}\in S(x^0)$ и, следовательно, $\tilde{y}=y^0$. Последнее справедливо для любой сходящейся подпоследовательности из $\{y^k\}$, следовательно, $y^k\to y^0$. Таким образом, S п.н.сн. в точке (x^0, y^0). Лемма 2 доказана.

Теорема 2. *Пусть*

(*i*) *отображение F псевдолипшицево в точке* $(x^0,y^0)\in \mathrm{gr}S$ *относительно* dom*F*,

(*ii*) *отображение* $L(x,\mu)$ *псевдолипшицево в точке* $\left(\left(x^0,\varphi(x^0)\right),y^0\right)$ *относительно* dom*L*,

(*iii*) *S равномерно ограничено в точке* x^0 *и* $S(x^0)=\{y^0\}$.

Тогда найдутся положительные числа l_S, ε *и* δ *такие, что*

$$S(x)\cap V_\varepsilon(y^0)\subset S(\tilde{x})+l_S\left|\tilde{x}-x\right|B\quad \forall x,\tilde{x}\in V_\delta(x^0)\cap \mathrm{dom}\,F,$$

т. е. многозначное отображение S псевдолипшицево в точке (x^0, y^0) *относительно* dom*F*.

Доказательство. В силу леммы 1, условия которой можно считать выполненными, $\varphi(x)-\varphi_V(x^0)\le l_\varphi\left|x-x^0\right|$ для всех $x\in V_\delta(x^0)\cap\mathrm{dom}F$. Но $\varphi_V(x^0)=\varphi(x^0)$, таким образом, из последнего неравенства следует $\limsup\limits_{x\to x^0,x\in\mathrm{dom}F}\varphi(x)\le\varphi(x^0)$.

Получаем, что выполнены условия леммы 2 и отображение S п.н.сн. в (x^0, y^0). Тогда в силу следствия S псевдолипшицево в точке (x^0, y^0) относительно dom$F$. Теорема 2 доказана.

З а м е ч а н и е 1. Следует отметить, что условие $S(x^0) = \{y^0\}$ не является слишком жестким предположением в теореме 2, поскольку известно (теорема 2 [8]), что отображение S может быть псевдолипшицевым в точке $(x^0, y^0) \in \mathrm{gr}S$ только в случае, когда множество $S(x^0)$ состоит из одной точки.

3. Примеры. Рассмотрим задачу математического программирования $P(x)$: $f(x, y) \to \min$, $y \in F(x)$, где $F(x) = \{y \in R^m \mid h_i(x, y) \le 0 \quad i \in I\}$, $x \in R^n$, $I = \{1, ..., p\}$, функции f, h_i непрерывно дифференцируемы.

Следуя [9, 10], многозначное отображение F будем называть *R-регулярным* (относительно dom$F$) в точке $(x^0, y^0) \in \mathrm{gr}F$, если найдутся число $\alpha > 0$ и окрестности $V(y^0)$ точки y^0 и $V(x^0)$ точки x^0 такие, что $d(y, F(x)) \le \alpha \max\{0, h_i(x, y) \quad i \in I\}$ для всех $y \in V(y^0)$ и $x \in V(x^0)$ $\left(x \in V(x^0) \cap \mathrm{dom}F\right)$.

Следующее утверждение обобщает известную лемму Хоффмана [11]. Доказательство данного утверждения представляет развитие схемы доказательства леммы Хоффмана в [9].

Л е м м а 3. *Пусть* $F(x) = \{y \in R^m \mid h_i(x, y) \le 0 \quad i \in I\}$, *где* $h_i(x, y) = \langle a_i, y\rangle + b_i(x)$, a_i – *векторы,* $b_i(x)$ – *скалярные функции,* $I = \{1, ..., p\}$. *Тогда существует число* $M = \mathrm{const} > 0$ *такое, что для любого вектора* $v \in R^m$ *и любого* $x \in \mathrm{dom}F$ *справедливо неравенство*

$$d(v, F(x)) \le M \max\{0, \ \langle a_i, v\rangle + b_i(x) \mid i = 1, ..., p\}. \tag{11}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть выполнены условия леммы. Положим $h(x, y) = \max\{h_i(x, y) \mid i = 1, ..., p\}$. Тогда $F(x) = \{y \in R^m \,|\, h(x, y) \le 0\}$. Зафиксируем любую точку $x \in \mathrm{dom}F$. Если $v \in F(x)$, то неравенство (11) выполняется при любом $M > 0$.

Пусть y – произвольная граничная точка множества $F(x)$. Известно (см., напр., [9, 12]), что нормальный конус $N_{F(x)}(y)$ к множеству $F(x)$ в точке y задается условием $N_{F(x)}(y) = \left\{ \sum\limits_{i \in I(x,y)} \lambda_i a_i \,\middle|\, \lambda_i \ge 0 \quad i \in I \right\}$, где $I(x, y) = \{i \in I \,|\, h_i(x, y) = 0\}$. Соответственно, множество точек $v \in R^m$ таких, что $v \notin F(x)$ и $d(v, F(x)) = |v - y|$, совпадает с множеством $\{v = y(t) \,|\, y(t) = y + tl, \ l \in N_{F(x)}(y), \ |l| = 1\}$, причем $t = d(y(t), F(x))$.

Тогда, обозначив $N(x, y) = \{l \in R^m \,|\, l \in N_{F(x)}(y), \ |l| = 1\}$, для каждого $l \in N(x, y)$ получим

$$\begin{aligned} h(x, y(t)) &\ge \max_{i \in I(x,y)} h_i(x, y(t)) = \max_{i \in I(x,y)} \{\langle a_i, y\rangle + t\langle a_i, l\rangle + b_i(x)\} = \\ &= t \max_{i \in I(x,y)} \langle a_i, l\rangle \ge t \min_{l \in N(x,y)} \max_{i \in I(x,y)} \langle a_i, l\rangle = t\delta(x, y). \end{aligned} \tag{12}$$

Покажем, что $\delta(x,y) > 0$. Предположим противное, т. е. что $\delta(x,y) \le 0$. Тогда найдется вектор $l^0 \in N(x, y)$ такой, что

$$\delta(x, y) = \max_{i \in I(x,y)} \langle a_i, l^0\rangle \le 0. \tag{13}$$

Так как $h_i(x, y) < 0$ при $i \notin I(x, y)$, то вследствие непрерывности функций $h_i(x, y)$ по y существует число $t_0 > 0$ такое, что $h_i(x, y + tl^0) = \langle a_i, y\rangle + b_i(x) + t\langle a_i, l^0\rangle < 0$ при всех $i \notin I(x, y)$ для всех положительных $t \le t_0$. Следовательно, поскольку $y + tl^0 \notin F(x)$ при всех $t > 0$ и $h(x, y + tl^0) = \max\limits_{i \in I(x,y)} h_i(x, y + tl^0)$ при всех $t \in (0, t_0]$, то при положительных $t \le t_0$ справедливо

$$\begin{aligned} 0 < h(x, y + tl^0) &= \max_{i \in I(x,y)} h_i(x, y + tl^0) = \\ &= \max_{i \in I(x,y)} \{\langle a_i, y\rangle + t\langle a_i, l^0\rangle + b_i(x)\} = \\ &= t \max_{i \in I(x,y)} \langle a_i, l^0\rangle = t\delta(x, y) \le 0. \end{aligned}$$

Полученное противоречие говорит о том, что $\delta(x,y) > 0$.

Положим

$$\tilde{\Lambda}(x,y) = \left\{ \lambda \in R^p \middle| \lambda_j \geq 0 \quad j \in I(x,y),\ \lambda_j = 0 \quad j \notin I(x,y),\ \left| \sum_{j\in I(x,y)} \lambda_j a_j \right| = 1 \right\}.$$

Тогда

$$\delta(x,y) = \min_{l\in N(x,y)} \max_{i\in I(x,y)} \langle a_i, l\rangle = \min_{\lambda\in\tilde{\Lambda}(x,y)} \max_{i\in I(x,y)} \langle a_i, \sum_{j\in I(x,y)} \lambda_j a_j \rangle .$$

Так как $\delta(x,y)$ определяется множеством $I(x,y)$ и существует лишь конечное число подмножеств множества $I = \{1,\ldots,p\}$, то $\delta(x,y) \geq \delta > 0$, когда y пробегает все граничные точки множества $F(x)$, а x пробегает все точки dom$F$. Поскольку любая точка $v \notin F(x)$ представима в виде $v = y + tl$, где $l \in N_{F(x)}(y)$, $|l| = 1$, $t > 0$, y – граничная точка $F(x)$, то из (12) следует, что для любого $v \notin F(x)$ справедливо $h(x,v) \geq \delta t \geq \delta d(v, F(x))$, откуда вытекает утверждение леммы.

П р и м е р 1. Положим $f(x,y) = \langle c(x), y\rangle$, $h_i(x,y) = \langle a_i, y\rangle + b_i(x)$, где a_i – векторы, $c(x)$ – векторная функция, $b_i(x)$ – функции. Пусть $(x^0, y^0) \in \mathrm{gr}S$. Тогда отображение F R-регулярно относительно dom$F$ в силу леммы 3 и, значит, [10, 13] псевдолипшицево в точке (x^0, y^0) относительно dom$F$. С другой стороны, $L(x,\mu) = \{y \in F(x) | \langle c(x^0), y\rangle \leq \mu\}$ удовлетворяет условиям леммы 3, и в силу этой леммы отображение L является R-регулярным в $\left((x^0,\mu^0), y^0\right)$ относительно dom$L$, а значит, псевдолипшицевым в точке $\left((x^0,\mu^0), y^0\right)$ относительно dom$L$, где $\mu^0 = \varphi(x^0)$. Таким образом, условия теоремы 1 выполнены и справедливо (5).

Если дополнительно потребовать равномерной ограниченности $S(x)$ или $F(x)$ в точке x^0 и $S(x^0) = \{y^0\}$, то в силу теоремы 2 отображение S будет псевдолипшицевым в (x^0, y^0).

З а м е ч а н и е 2. Хотя лемма 3 играет важную роль в примере 1, тем не менее она неприменима непосредственно к отображению S и сама по себе не может обеспечить псевдолипшицевость множества решений.

Следующий пример показывает, что для утверждения о псевдолипшицевости множества решений $S(x)$ существенны требования равномерной ограниченности и однозначности (или полунепрерывности снизу) отображения S.

П р и м е р 2. Пусть $y_2 - xy_1 \to \min$, $|y_1| \leq 1$, $|y_2| \leq 1$, $x \in R, y \in R^2$. Тогда $S(x) = \{(-1,-1)\}$ при $x < 0$, $S(0) = \{(y_1,-1), |y_1| \leq 1\}$ и $S(x) = \{(1,-1)\}$ при $x > 0$. Многозначное отображение S не является псевдолипшицевым в точке $(0,(0,-1))$, в которой $S(x^0) \neq \{y^0\}$ и не выполнено условие полунепрерывности S снизу.

Список использованных источников

1. Rockafellar, R. T. Variational Analysis / R. T. Rockafellar, R.J.-B. Wets. – Berlin: Springer, 1998. – 732 p.
2. Calmness of the argmin mapping in linear semi-infinite optimization / M. J. Canovas [et al.] // J. on Optimization Theory and Applications. – 2014. – Vol. 160. – P. 111–126.
3. Klatte, D. On calmness of the argmin mapping in parametric optimization problems / D. Klatte, B. Kummer // J. on Optimization Theory and Applications. – 2015. – Vol. 165, № 3. – P. 708–719.
4. Henrion, R. Calmness of constraint systems with applications / R. Henrion, J. Outrata // Math. Programming. – 2005. – Vol. 104, № 2/3. – P. 437–464.
5. Ioffe, A. D. On metric and calmness qualification conditions in subdifferential calculus / A. D. Ioffe, J. Outrata // Set-Valued Analysis. – 2008. – Vol. 16. – P. 199–227.
6. Dontchev, A. L.Implicit functions and solution mappings / A. L. Dontchev, R. T. Rockafellar. – New York: Springer, 2009. – 574 p.
7. Shu Lu. Implications of the constant rank constraint qualification / Shu Lu // Math. Programming. – 2009. – Vol. 126. – P. 365–392.
8. Klatte, D. Aubin property and uniqueness of solutions in cone constrained optimization / D. Klatte, B. Kummer // Math. Methods of Operational Research. – 2013. – Vol. 77, № 3. – P. 291–304.

9. Федоров, В. В. Численные методы максимина / В. В. Федоров. – М.: Наука, 1979. – 280 с.

10. Luderer, B. Multivalued analysis and nonlinear programming problems with perturbations / B. Luderer, L. Minchenko, T. Satsura. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2002. – 207 p.

11. Hoffman, A. J. On approximate solutions of systems of linear inequalities / A. J. Hoffman // J. of Research of Natl. Bureau Stand. – 1952. – Vol. 49, № 4. – P. 263–265.

12. Пшеничный, Б. Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи / Б. Н. Пшеничный. – М.: Наука,1980. – 320 с.

13. Minchenko, L. I. On second order derivatives of value functions / L. I. Minchenko, A. N. Tarakanov // Optimization. – 2015. – Vol. 64, № 2. – P. 389–407.

References

1. Rockafellar R. T., Wets R. J.-B. *Variational analysi*s. Springer, Berlin, 1998. 732 p. Doi: 10.1007/978-3-642-02431-3

2. Canovas M. J., Hantoute A., Parra J., Toledo F. J. Calmness of the argmin mapping in linear semi-infinite optimization. *Journal on Optimization Theory and Applications*, 2014, vol. 160, pp. 111–126. Doi: 10.1007/s10957-013-0371-z

3. Klatte D., Kummer B. On calmness of the argmin mapping in parametric optimization problems. *Journal on Optimization Theory and Applications*, 2014, vol. 165, no. 3, pp. 708–719. Doi: 10.1007/s10957-014-0643-2

4. Henrion R., Outrata J. Calmness of constraint systems with applications. *Mathematical Programming*, 2005, vol. 104, no. 2-3, pp. 437–464. Doi: 10.1007/s10107-005-0623-2

5. Ioffe A. D., Outrata J. On metric and calmness qualification conditions in subdifferential calculus. *Set-Valued Analysis*, 2008, vol. 16, pp. 199–227. Doi: 10.1007/s11228-008-0076-x

6. Dontchev A. L., Rockafellar R. T. *Implicit functions and solution mappings.* New York, Springer, 2009. 574 p. Doi: 10.1007/978-0-387-87821-8

7. Shu Lu. Implications of the constant rank constraint qualification. *Mathematical Programming*, 2009, vol. 126, pp. 365–392. Doi: 10.1007/s10107-009-0288-3

8. Klatte D., Kummer B. Aubin property and uniqueness of solutions in cone constrained optimization. *Mathematical Methods of Operational Research*, 2013, vol. 77, no. 3, pp. 291–304. Doi: 10.1007/s00186-013-0429-6

9. Fedorov V. V. *Numerical Maximilian Methods*. Moscow, Nauka Publ., 1979. 280 p. (in Russian).

10. Luderer B., Minchenko L., Satsura T. *Multivalued analysis and nonlinear programming problems with perturbations*. Dordrecht, Kluwer Acad. Publ., 2002. 207 p. Doi: 10.1007/978-1-4757-3468-3

11. Hoffman A. J. On approximate solutions of systems of linear inequalities. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, 1952, vol. 49, no. 4, pp. 263–265.

12. Pshenichnyi B. N. *Convex Analysis and Extremum Problems.* Moscow, Nauka Publ., 1980. 320 p. (in Russian).

13. Minchenko L. I., Tarakanov A. N. On second order derivatives of value functions. *Optimization*, 2015, vol. 64, no. 2, pp. 389–407.

Информация об авторах

Минченко Леонид Иванович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры информатики, Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (ул. П. Бровки, 6, 220013, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: inform@bsuir.by

Бережнов Даниил Евгеньевич – ассистент, кафедра информатики, Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (ул. П. Бровки, 6, 220013, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: daniilberezhnov@gmail.com

Information about the authors

Minchenko Leonid Ivanovich – D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Professor of the Department of Informatics, Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (P. Brovka Str., 6, 220013, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: inform@bsuir.by

Berezhnov Daniil Evgenyevich – Assistant of the Department of Informatics, Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (P. Brovka Str., 6, 220013, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: daniilberezhnov@gmail.com

Для цитирования

Минченко, Л. И. О псевдолипшицевости множества решений параметрических задач оптимизации / Л. И. Минченко, Д. Е. Бережнов // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2017. – № 2. – С. 36–43.

For citation

Minchenko L. I., Berezhnov D. E. Pseudo-lipschitzian continuity of solution mappings in parametrical optimization problems. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series], 2017, no. 2, pp. 36–43. (in Russian).