ISSN 1561-2430 (print)
УДК 512.548

Поступила в редакцию 15.04.2016
Received 15.04.2016

А. М. Гальмак[1], А. Д. Русаков[2]

[1]Могилевский государственный университет продовольствия, Могилев, Беларусь
[2]Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь

О ПОЛИАДИЧЕСКОЙ ОПЕРАЦИИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

В статье продолжается изучение полиадической операции $\eta_{s,\sigma,k}$, которая была определена ранее на декартовой степени A^k n-арного группоида $< A, \eta >$ с помощью подстановки $\sigma \in \mathbf{S}_k$ и n-арной операции η. Частным случаем полиадической операции $\eta_{s,\sigma,k}$ является l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$, которую один из авторов определил для любых целых $k \geq 2$, $l \geq 2$ и любой подстановки σ множества $\{1, \ldots, k\}$ на k-й декартовой степени A^k полугруппы A. В свою очередь, частными случаями l-арной операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$ являются две полиадические операции Э. Поста, одну из которых он определил на декартовой степени симметрической группы, вторую – на декартовой степени полной линейной группы над полем комплексных чисел. В статье приведены новые результаты об операции $\eta_{s,\sigma,k}$. В частности, получено новое доказательство ассоциативности этой полиадической операции.

Ключевые слова: полиадическая операция, ассоциативность, подстановка, группоид, полугруппа

A. M. Gal'mak[1], A. D. Rusakov[2]

[1]Mogilev State University of Food Technologies, Mogilev, Belarus
[2]Francisk Scorina Gomel State University, Gomel, Belarus

POLYADIC OPERATION OF SPECIAL TYPE

In the article the authors continue to study the polyadic operation $\eta_{s,\sigma,k}$ that was earlier defined at the Cartesian power A^k of the nth groupoid $< A, \eta >$ by the substitution of $\sigma \in \mathbf{S}_k$ and the nth operation η. The special case of the polyadic operation $\eta_{s,\sigma,k}$ is the lth operation $[\ ]_{l,\sigma,k}$ that is defined by one of the authors for any integer $k \geq 2$, $l \geq 2$ and for any substitution of the σ set $\{1, \ldots, k\}$ at the Cartesian power A^k of the semigroup A. In turn, the special case of the lth operation $[\ ]_{l,\sigma,k}$ consists of two polyadic operations by E. Post, one of which he defined at the Cartesian power of the symmetric group and the second – at the Cartesian power of the general linear group over the field of complex numbers. The properties of the operations $\eta_{s,\sigma,k}$ are studied in the article. In particular, a new proof of the associativity of the polyadic operation $\eta_{s,\sigma,k}$ was obtained.

Keywords: polyadic operation, associativity, substitution, groupoid, semi-group

Введение. Полиадическая операция $\eta_{s,\sigma,k}$ была определена в [1] следующим образом.

Пусть $< A, \eta >$ – n-арный группоид, $n \geq 2$, $s \geq 1$, $l = s(n-1)+1$, $k \geq 2$, $\sigma \in \mathbf{S}_k$. Определим на A^k вначале n-арную операцию

$$\eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n) = \eta_{1,\sigma,k}((x_{11}, \ldots, x_{1k}) \ldots (x_{n1}, \ldots, x_{nk})) =$$
$$= \left(\eta\left(x_{11}x_{2\sigma(1)} \ldots x_{n\sigma^{n-1}(1)}\right), \ldots, \eta\left(x_{1k}x_{2\sigma(k)} \ldots x_{n\sigma^{n-1}(k)}\right)\right), \quad (1)$$

а затем l-арную операцию

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_l) = \eta_{s,\sigma,k}((x_{11}, \ldots, x_{1k}) \ldots (x_{l1}, \ldots, x_{lk})) =$$
$$= \eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{n-1}\eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{x}_n \ldots \mathbf{x}_{2(n-1)}\eta_{1,\sigma,k}(\ldots$$
$$\ldots \eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{x}_{(s-2)(n-1)+1} \ldots \mathbf{x}_{(s-1)(n-1)}\eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{x}_{(s-1)(n-1)+1} \ldots \mathbf{x}_{s(n-1)+1})) \ldots))). \quad (2)$$

При $s = 1$ l-арная операция $\eta_{s,\sigma,k}$ совпадает с n-арной операцией $\eta_{1,\sigma,k}$.

Частными случаями l-арной операции $\eta_{s,\sigma,k}$ являются две полиадические операции, которые Э. Пост определил в [2]. Одна из них была определена им на декартовой степени симметрической группы, вторая – на декартовой степени полной линейной группы над полем комплексных чисел.

Конструкция, которую Э. Пост использовал при построении своих полиадических операций, допускает различные обобщения. Некоторые из таких обобщений реализованы в книге [3], где любых целых $k \geq 2$, $l \geq 2$ и любой подстановки σ множества $\{1, \ldots, k\}$ на k-й декартовой степени A^k полугруппы A определена l-арная операция $[\ ]_{l, \sigma, k}$, частными случаями которой являются отмеченные выше полиадические операции Э. Поста. Обе эти операции и почти все их обобщения характеризуются тем, что в определении каждой из них присутствует бинарная операция. В связи с этим возникает необходимость определения и изучения обобщений, в которых бинарная операция заменяется полиадической операцией арности больше двух. Такие полиадические операции были определены в работе [1]. В данной статье продолжается изучение полиадической операции $\eta_{s, \sigma, k}$. Проверка читателями приводимых далее в статье выкладок существенно упростится, если элементы декартовой степени A^k представлять столбцами.

1. Используемые результаты. Явный вид l-арной операции $\eta_{s, \sigma, k}$ описывает

Т е о р е м а 1 [1]. *Если*

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \ldots, x_{ik}),\ i = 1, 2, \ldots, l,$$

$$\eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_l) = (y_1, \ldots, y_k),$$

то для любого $j \in \{1, \ldots, k\}$ *компонента* y_j *находится по формуле*

$$y_j = \eta(x_{1j} x_{2\sigma(j)} \ldots x_{(n-1)\sigma^{n-2}(j)} \eta(x_{n\sigma^{n-1}(j)} \ldots x_{(2(n-1))\sigma^{2(n-1)-1}(j)} \eta(\ldots$$

$$\ldots \eta(x_{((s-1)(n-1)+1)\sigma^{(s-1)(n-1)}(j)} \ldots x_{(s(n-1)+1)\sigma^{s(n-1)}(j)}) \ldots))). \tag{3}$$

З а м е ч а н и е 1. Если n-арная операция η ассоциативна, то (3) может быть переписано следующим образом:

$$y_j = \eta\left(x_{1j} x_{2\sigma(j)} \ldots x_{(s(n-1)+1)\sigma^{s(n-1)}(j)}\right) = \eta\left(x_{1j} x_{2\sigma(j)} \ldots x_{l\sigma^{l-1}(j)}\right). \tag{4}$$

Если η – бинарная операция, обозначаемая символом $\circ$, то бинарная операция $\eta_{1, \sigma, k}$ совпадает с бинарной операцией $\overset{\sigma}{\circ}$, а l-арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$, где $l = s + 1$, совпадает с $(s + 1)$-арной операцией $[\ ]_{s+1, \sigma, k}$ из [4]. При этом равенства (1)–(4) принимают вид

$$\mathbf{x}_1 \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{x}_2 = (x_{11}, \ldots, x_{1k}) \overset{\sigma}{\circ} (x_{21}, \ldots, x_{2k}) = (x_{11} x_{2\sigma(1)}, \ldots, x_{1k} x_{2\sigma(k)}),$$

$$[\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_l]_{l, \sigma, k} = \mathbf{x}_1 \overset{\sigma}{\circ} (\mathbf{x}_2 \overset{\sigma}{\circ} (\ldots (\mathbf{x}_{l-2} \overset{\sigma}{\circ} (\mathrm{x}_{l-1} \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{x}_l)) \ldots)),$$

$$y_j = x_{1j}\left(x_{2\sigma(j)}\left(\ldots \left(x_{s\sigma^{s-1}(j)} x_{(s+1)\sigma^{s}(j)}\right) \ldots \right)\right),$$

$$y_j = x_{1j} x_{2\sigma(j)} \ldots x_{(s+1)\sigma^{s}(j)} = x_{1j} x_{2\sigma(j)} \ldots x_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)} x_{l\sigma^{l-1}(j)}.$$

Для сокращения записей в правых частях последних двух равенств символ операции $\circ$ не указан. Заметим, что именно последнее равенство использовалось в [3, определение 3.1.4] для определения l-арной операции $[\ ]_{l, \sigma, k}$ на k-й декартовой степени полугруппы A.

Таким образом, l-арная операция $[\ ]_{l, \sigma, k}$ из [3], определенная на k-й декартовой степени полугруппы, является частным случаем l-арной операции $[\ ]_{l, \sigma, k}$ из [4], определенной на k-й декартовой степени группоида. Последняя операция, в свою очередь, является частным случаем l-арной $\eta_{s, \sigma, k}$.

Частным случаем l-арной операции $\eta_{s, \sigma, k}$ является и n-арная операция $\tilde{\eta}$ из [3, с. 227], совпадающая с n-арной операцией $\eta_{1, (12 \ldots n-1), n-1}$, с помощью которой, в свою очередь, определяется l-арная операция $\eta_{s, (12 \ldots n-1), n-1}$. Укажем явный вид этой операции.

П р и м е р. Положим в определении l-арной операции $\eta_{s,\sigma,k}$:

$$k = n-1,\ \sigma = (12\ \dots\ n-1).$$

В этом случае на $(n-1)$-й декартовой степени A^{n-1} n-арного группоида $< A, \eta >$ определены n-арная операция

$$\eta_{1,(12\ \dots\ n-1),n-1}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n) = \eta_{1,(12\ \dots\ n-1),n-1}((x_{11}, \dots, x_{1(n-1)}) \dots (x_{n1}, \dots, x_{n(n-1)})) =$$
$$= (\eta(x_{11}x_{22} \dots x_{(n-1)(n-1)}x_{n1}), \eta(x_{12} \dots x_{(n-2)(n-1)}x_{(n-1)1}x_{n2}), \dots, \eta(x_{1(n-1)}x_{21} \dots x_{n(n-1)}))$$

и l-арная операция

$$\eta_{s,(12\ \dots\ n-1),n-1}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_l) = (y_1, \dots, y_{n-1}),$$

где $l = s(n-1)+1$, а компонента y_j, согласно теореме 1, находится по формуле

$$y_j = \eta(x_{1j}x_{2(j+1)} \dots x_{(n-j)(n-1)}x_{(n-j+1)1} \dots x_{(n-1)(j-1)}$$
$$\eta(x_{nj}x_{(n+1)(j+1)} \dots x_{(2(n-1)-j+1)(n-1)}x_{(2(n-1)-j+2)1} \dots x_{(2(n-1))(j-1)}$$
$$\eta(\dots \eta(x_{((s-1)(n-1)+1)j} \dots x_{(s(n-1)-j+1)(n-1)}x_{(s(n-1)-j+2)1} \dots x_{(s(n-1))(j-1)}x_{(s(n-1)+1)j})\dots))).$$

В частности,

$$y_1 = \eta(x_{11}x_{22} \dots x_{(n-1)(n-1)}\eta(x_{n1}x_{(n+1)2} \dots x_{(2(n-1))(n-1)}$$
$$\eta(\dots \eta(x_{((s-1)(n-1)+1)1}x_{((s-1)(n-1)+2)2} \dots x_{(s(n-1))(n-1)}x_{(s(n-1)+1)1})\dots))),$$
$$y_2 = \eta(x_{12}x_{23} \dots x_{(n-2)(n-1)}x_{(n-1)1}\eta(x_{n2}x_{(n+1)3} \dots x_{(2(n-1)-1)(n-1)}x_{(2(n-1))1}$$
$$\eta(\dots \eta(x_{((s-1)(n-1)+1)2} \dots x_{(s(n-1)-1)(n-1)}x_{(s(n-1))1}x_{(s(n-1)+1)2})\dots))),$$
$$y_3 = \eta(x_{13}x_{24} \dots x_{(n-3)(n-1)}x_{(n-2)1}x_{(n-1)2}\eta(x_{n3}x_{(n+1)4} \dots x_{(2(n-1)-2)(n-1)}x_{(2(n-1)-1)1}x_{(2(n-1))2}$$
$$\eta(\dots \eta(x_{((s-1)(n-1)+1)3} \dots x_{(s(n-1)-2)(n-1)}x_{(s(n-1)-1)1}x_{(s(n-1))2}x_{(s(n-1)+1)3})\dots))),$$

……………………………………………………………………………

$$y_{n-1} = \eta(x_{1(n-1)}x_{21} \dots x_{(n-1)(n-2)}\eta(x_{n(n-1)}x_{(n+1)1} \dots x_{(2(n-1))(n-2)}$$
$$\eta(\dots \eta(x_{((s-1)(n-1)+1)(n-1)}x_{((s-1)(n-1)+2)1} \dots x_{(s(n-1)+1))(n-1)})\dots))).$$

С помощью n-арной операции η n-арного группоида $< A, \eta >$ можно для всякого $l = s(n-1)+1$, где $s \geq 1$, на том же множестве A определить l-арную операцию

$$\eta^{(s)}(x_1 \dots x_l) = \eta(x_1 \dots x_{n-1}\eta(x_n \dots x_{(2n-1)}\eta(\ \dots \eta(x_{(s-1)(n-1)+1} \dots x_{s(n-1)+1})\ \dots))),$$

которая, согласно определению операции $\eta_{s,\sigma,k}$, позволяет определить на множестве A^k l-арную операцию

$$(\eta^{(s)})_{1,\sigma,k}(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_l) = (\eta^{(s)})_{1,\sigma,k}((x_{11}, \dots, x_{1k}) \dots (x_{l1}, \dots, x_{lk})) = (z_1, \dots, z_k),$$

где

$$z_j = \eta^{(s)}(x_{1j}x_{2\sigma(j)} \dots\ x_{l\sigma^{l-1}(j)}),\ j = 1, 2, \dots, k.$$

Имеет место

Т е о р е м а 2 [1]. *Для n-арной операции η, определенной на множестве A, и любого $s \geq 1$ l-арные операции $\eta_{s,\sigma,k}$ и $(\eta^{(s)})_{1,\sigma,k}$ совпадают.*

Согласно следующей теореме, тождественность подстановки σ^{l-1}влечет за собой перенос ассоциативности с n-арной операции η на l-арную операцию $\eta_{s,\sigma,k}$.

Т е о р е м а 3 [1]. *Если n-арная операция* η *– ассоциативна, подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, *то l-арная операция* $\eta_{s,\sigma,k}$ *ассоциативна.*

Отметим, что в справедливости сформулированных выше теорем 1–3 читатель может убедиться самостоятельно, не обращаясь к [1].

2. Основные результаты. В доказательстве теоремы 3 существенно использовалась теорема 2 о совпадении l-арных операциий $\eta_{s,\sigma,k}$ и $(\eta^{(s)})_{1,\sigma,k}$. Докажем более общий результат, не применяя при этом теорему 2. Для этого нам понадобится

Л е м м а 1. *Пусть* α *– автоморфизм n-арного группоида* $< A, \eta >$, *который обладает такими элементами* $c_1, \ldots, c_{n-1}, d_1, \ldots, d_{n-1}$, *что*

$$\eta(c_1 \ldots c_{n-1}x) = \eta(d_1 \ldots d_{n-1}x)$$

для любого $x \in A$. *Тогда*

$$\eta(c_1^{\alpha} \ldots c_{n-1}^{\alpha} y) = \eta(d_1^{\alpha} \ldots d_{n-1}^{\alpha} y)$$

для любого $y \in A$.

Справедлива аналогичная

Л е м м а 2. *Пусть* α *– автоморфизм n-арного группоида* $< A, \eta >$, *который обладает такими элементами* $c_1, \ldots, c_{n-1}, d_1, \ldots, d_{n-1}$, *что*

$$\eta(xc_1 \ldots c_{n-1}) = \eta(xd_1 \ldots d_{n-1})$$

для любого $x \in A$. *Тогда*

$$\eta(y c_1^{\alpha} \ldots c_{n-1}^{\alpha}) = \eta(y d_1^{\alpha} \ldots d_{n-1}^{\alpha})$$

для любого $y \in A$.

Следующая теорема является полиадическим аналогом утверждения, обратного к теореме Поста – Глускина – Хоссу для полугрупп.

Т е о р е м а 4. *Пусть* $n \geq 2$, $s \geq 1$, $l = s(n-1) + 1$, $< A, \eta >$ *– n-арная полугруппа*; *ее автоморфизм* α *и элементы* $c_1, \ldots, c_{n-1}$ *удовлетворяют условиям*

$$\eta(c_1^{\alpha} \ldots c_{n-1}^{\alpha} x) = \eta(c_1 \ldots c_{n-1}x), \tag{5}$$

$$\eta(x^{\alpha^{l-1}} c_1 \ldots c_{n-1}) = \eta(c_1 \ldots c_{n-1}x) \tag{6}$$

для любого $x \in A$. *Тогда l-арный группоид* $< A, \mu >$ *с l-арной операцией*

$$\mu(x_1 \ldots x_l) = \eta(x_1 x_2^{\alpha} \ldots x^{\alpha^{l-1}} c_1 \ldots c_{n-1}) \tag{7}$$

является l-арной полугруппой. При этом биекция α *является ее автоморфизмом.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применив к (5) лемму 1, убеждаемся в справедливости для любого $x \in A$ и любого целого $t \geq 2$ равенства

$$\eta(c_1^{\alpha^t} \ldots c_{n-1}^{\alpha^t} x) = \eta(c_1^{\alpha^{t-1}} \ldots c_{n-1}^{\alpha^{t-1}} x).$$

Используя полученное соотношение, ассоциативность n-арной операции η, а также (5), (6) и (7), будем иметь для любого $i \in \{1, \ldots, l\}$

$$\mu(x_1 \ldots x_{i-1}\mu(x_i \ldots x_{i+l-1})x_{i+l} \ldots x_{2l-1}) =$$

$$= \eta(x_1 x_2^{\alpha} \ldots x_{i-1}^{\alpha^{i-2}} \mu(x_i \ldots x_{i+l-1})^{\alpha^{i-1}} x_{i+l}^{\alpha^{i}} \ldots x_{2l-1}^{\alpha^{l-1}} c_1 \ldots c_{n-1}) =$$

$$= \eta(x_1 \ldots x_{i-1}^{\alpha^{i-2}} \eta(x_i x_{i+1}^{\alpha} \ldots x_{i+l-1}^{\alpha^{l-1}} c_1 \ldots c_{n-1})^{\alpha^{i-1}} x_{i+l}^{\alpha^{i}} \ldots x_{2l-1}^{\alpha^{l-1}} c_1 \ldots c_{n-1}) =$$

$$= \eta(x_1 x_2^{\alpha} \ldots x_{i-1}^{\alpha^{i-2}} \eta(x_i^{\alpha^{i-1}} x_{i+1}^{\alpha^{i}} \ldots x_{i+l-1}^{\alpha^{i+l-2}} c_1^{\alpha^{i-1}} \ldots c_{n-1}^{\alpha^{i-1}}) x_{i+l}^{\alpha^{i}} \ldots x_{2l-1}^{\alpha^{l-1}} c_1 \ldots c_{n-1}) =$$

$$= \eta(x_1 x_2^{\alpha} \ldots x_{i-1}^{\alpha^{i-2}} x_i^{\alpha^{i-1}} x_{i+1}^{\alpha^{i}} \ldots x_{i+l-1}^{\alpha^{i+l-2}} \eta(c_1^{\alpha^{i-1}} \ldots c_{n-1}^{\alpha^{i-1}} x_{i+l}^{\alpha^{i}}) x_{i+l+1}^{\alpha^{i+1}} \ldots x_{2l-1}^{\alpha^{l-1}} c_1 \ldots c_{n-1}) =$$

$$= \eta(x_1 x_2^{\alpha} \ldots x_i^{\alpha^{i-1}} x_{i+1}^{\alpha^{i}} \ldots x_{i+l-1}^{\alpha^{i+l-2}} \eta(c_1^{\alpha^{i}} \ldots c_{n-1}^{\alpha^{i}} x_{i+l}^{\alpha^{i}}) x_{i+l+1}^{\alpha^{i+1}} \ldots x_{2l-1}^{\alpha^{l-1}} c_1 \ldots c_{n-1}) =$$

$$= \eta(x_1 x_2^{\alpha} \ldots x_i^{\alpha^{i-1}} x_{i+1}^{\alpha^{i}} \ldots x_{i+l-1}^{\alpha^{i+l-2}} \eta((x_{i+l}^{\alpha^{i}})^{\alpha^{l-1}} c_1^{\alpha^{i}} \ldots c_{n-1}^{\alpha^{i}}) x_{i+l+1}^{\alpha^{i+1}} \ldots x_{2l-1}^{\alpha^{l-1}} c_1 \ldots c_{n-1}) =$$

$$= \eta(x_1 x_2^{\alpha} \ldots x_i^{\alpha^{i-1}} \eta(x_{i+1}^{\alpha^{i}} \ldots x_{i+l-1}^{\alpha^{i+l-2}} (x_{i+l}^{\alpha^{i}})^{\alpha^{l-1}} c_1^{\alpha^{i}} \ldots c_{n-1}^{\alpha^{i}}) x_{i+l+1}^{\alpha^{i+1}} \ldots x_{2l-1}^{\alpha^{l-1}} c_1 \ldots c_{n-1}) =$$

$$= \eta(x_1 x_2^{\alpha} \ldots x_i^{\alpha^{i-1}} \eta(x_{i+1}^{\alpha^{i}} \ldots x_{i+l-1}^{\alpha^{i+l-2}} x_{i+l}^{\alpha^{i+l-1}} c_1^{\alpha^{i}} \ldots c_{n-1}^{\alpha^{i}}) x_{i+l+1}^{\alpha^{i+1}} \ldots x_{2l-1}^{\alpha^{l-1}} c_1 \ldots c_{n-1}) =$$

$$= \eta(x_1 x_2^{\alpha} \ldots x_i^{\alpha^{i-1}} \eta(x_{i+1} x_{i+2}^{\alpha} \ldots x_{i+l}^{\alpha^{l-1}} c_1 \ldots c_{n-1})^{\alpha^{i}} x_{i+l+1}^{\alpha^{i+1}} \ldots x_{2l-1}^{\alpha^{l-1}} c_1 \ldots c_{n-1}) =$$

$$= \eta(x_1 x_2^{\alpha} \ldots x_i^{\alpha^{i-1}} \mu(x_{i+1} \ldots x_{i+l})^{\alpha^{i}} x_{i+l+1}^{\alpha^{i+1}} \ldots x_{2l-1}^{\alpha^{l-1}} c_1 \ldots c_{n-1}) =$$

$$= \mu(x_1 \ldots x_i\mu(x_{i+1} \ldots x_{i+l})x_{i+l+1} \ldots x_{2l-1}),$$

т. е.

$$\mu(x_1 \ldots x_{i-1}\mu(x_i \ldots x_{i+l-1})x_{i+l} \ldots x_{2l-1}) = \mu(x_1 \ldots x_i\mu(x_{i+1} \ldots x_{i+l})x_{i+l+1} \ldots x_{2l-1}).$$

Следовательно, l-арная операция η ассоциативна.

Используя ассоциативность n-арной операции η, а также (5), (6) и (7), будем иметь

$$\mu(x_1 \ldots x_l)^{\alpha} = \eta(x_1 x_2^{\alpha} \ldots x_l^{\alpha^{l-1}} c_1 \ldots c_{n-1})^{\alpha} = \eta(x_1^{\alpha} x_2^{\alpha^2} \ldots x_{l-1}^{\alpha^{l-1}} x_l^{\alpha^{l}} c_1^{\alpha} \ldots c_{n-1}^{\alpha}) =$$

$$= \eta(x_1^{\alpha} x_2^{\alpha^2} \ldots x_{l-1}^{\alpha^{l-1}} \eta((x_l^{\alpha})^{\alpha^{l-1}} c_1^{\alpha} \ldots c_{n-1}^{\alpha})) = \eta(x_1^{\alpha} x_2^{\alpha^2} \ldots x_{l-1}^{\alpha^{l-1}} \eta(c_1^{\alpha} \ldots c_{n-1}^{\alpha} x_l^{\alpha})) =$$

$$= \eta(x_1^{\alpha} x_2^{\alpha^2} \ldots x_{l-1}^{\alpha^{l-1}} \eta(c_1 \ldots c_{n-1} x_l^{\alpha})) = \eta(x_1^{\alpha} x_2^{\alpha^2} \ldots x_{l-1}^{\alpha^{l-1}} \eta((x_l^{\alpha})^{\alpha^{l-1}} c_1 \ldots c_{n-1})) =$$

$$= \eta(x_1^{\alpha} (x_2^{\alpha})^{\alpha} \ldots (x_{l-1}^{\alpha})^{\alpha^{l-2}} (x_l^{\alpha})^{\alpha^{l-1}} c_1 \ldots c_{n-1}) = \mu(x_1^{\alpha} x_2^{\alpha} \ldots x_l^{\alpha}),$$

т. е.

$$\mu(x_1 \ldots x_l)^{\alpha} = \mu(x_1^{\alpha} x_2^{\alpha} \ldots x_l^{\alpha}).$$

Следовательно, α – автоморфизм l-арной полугруппы $< A, \mu >$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 2. Для полиадических групп результат, аналогичный теореме 4, доказан в статье [5].

Если в теореме 4 $c_1 \ldots c_{n-1}$ – пустая последовательность, то равенство (5) выполняется тривиально ($x = x$), равенство (6) принимает вид $x^{\alpha^{l-1}} = x$, что равносильно тождественности подстановки α^{l-1}, а равенство (7) переписывается следующим образом:

$$\mu(x_1 \ldots x_l) = \eta(x_1 x_2^{\alpha} \ldots x_{l-1}^{\alpha^{l-2}} x_l).$$

Поэтому из теоремы 4 вытекает

С л е д с т в и е 1. *Пусть $n \geq 2$, $s \geq 1$, $l = s(n - 1) + 1$, $< A, \eta >$ – n-арная полугруппа, α – ее автоморфизм, удовлетворяющий условию $\alpha^l = \alpha$. Тогда l-арный группоид $< A, \mu >$ с l-арной операцией*

$$\mu(x_1 \ldots x_l) = \eta(x_1 x_2^{\alpha} \ldots x_{l-1}^{\alpha^{l-2}} x_l)$$

является l-арной полугруппой. При этом биекция α является ее автоморфизмом.

З а м е ч а н и е 3. Если в следствии 1 *n*-арную полугруппу заменить полугруппой, то получим лемму 2.4.3 из [3].

Нам понадобится еще одна лемма, приведенная в [3].

Л е м м а 3 [3, с. 142]. *Пусть A – множество, $k \geq 2$, σ – подстановка из $\mathbf{S}_k$, f_σ – преобразование декартовой степени A^k по правилу*

$$f_\sigma\colon (x_1, x_2, \ldots, x_k) \to (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(k)}).$$

Тогда:

1) f_σ *– биекция*;

2) *для любого $i \geq 2$ преобразование f_σ^i множества A^k осуществляется по правилу*

$$f_\sigma^i : (x_1, x_2, \ldots, x_k) \to (x_{\sigma^i(1)}, x_{\sigma^i(2)}, \ldots, x_{\sigma^i(k)});$$

3) $f_\sigma^i = f_{\sigma^i}$ *для любого $i \geq 2$*;

4) *если $a \in A$, $\mathbf{a} = (\underbrace{a, \ldots, a}_{k})$, то* $\mathrm{a}^{f_\sigma} = \mathbf{a}$;

5) *если $< A, * >$ – группоид, то f_σ – автоморфизм группоида $< A^k, * >$ с операцией*

$$\mathbf{x} * \boldsymbol{y} = (x_1, \ldots, x_k) * (y_1, \ldots, y_k) = (x_1 * y_1, \ldots, x_k * y_k).$$

Утверждение 5) леммы 3 обобщается следующей леммой.

Л е м м а 4. *Если в условиях леммы 3 $< A, \eta >$ – n-арный группоид, то f_σ – автоморфизм n-арного группоида $< A^k, \eta >$ с n-арной операцией η, которая определяется покомпонентно с помощью операции η*:

$$\eta(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n) = \eta((x_{11}, \ldots, x_{1k}) \ldots (x_{n1}, \ldots, x_{nk})) = (\eta(x_{11} \ldots x_{n1}), \ldots, \eta(x_{1k} \ldots x_{nk})).$$

Следующая теорема получается с помощью леммы 4 и следствия 1.

Т е о р е м а 5. *Пусть $< A, \eta >$ – n-арная полугруппа, σ – подстановка из $\mathbf{S}_k$, удовлетворяющая условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда l-арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ является ассоциативной и для всех*

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ik}) \in A^k,\ i = 1, 2, \ldots, l$$

верны равенства

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_l) = \eta(\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2^{f_\sigma} \ldots \mathbf{x}_{l-1}^{f_\sigma^{l-2}} \mathbf{x}_l) = \eta(\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2^{f_\sigma} \ldots \mathbf{x}_{l-1}^{f_{\sigma^{l-2}}} \mathbf{x}_l), \tag{8}$$

где отображение $f_\sigma: A^k \to A^k$ *определяется следующим образом:*

$$f_\sigma: (x_1, x_2, \ldots, x_k) \to (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(k)}).$$

Если σ – тождественная подстановка, то f_σ – тождественное отображение. Поэтому из теоремы 5 вытекает

С л е д с т в и е 2. *Пусть* $< A, \eta >$ – *n-арная полугруппа*, σ – *тождественная подстановка из* $\mathbf{S}_k$. *Тогда l-арная операция* $\eta_{s,\sigma,k}$ *является ассоциативной и для всех*

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ik}) \in A^k,\ i = 1, 2, \ldots, l$$

верно равенство

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_l) = \eta(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_l),$$

т. е. l-арная операция $\eta_{s,\sigma,k}$ *является производной от n-арной операцией* η, *которая определяется покомпонентно на* A^k *с помощью n-арной операции* η (*лемма* 2.4).

Полагая в теореме 5 $n = 2$, получим следующую теорему 3.2.2 из [3] об ассоциативности *l*-арной операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$.

Т е о р е м а 6 [3, с. 144]. *Пусть A – полугруппа*, σ – *подстановка из* $\mathbf{S}_k$, *удовлетворяющая условию* $\sigma^l = \sigma$. *Тогда l-арная операция* $[\ ]_{l,\sigma,k}$ *является ассоциативной и для всех*

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ik}) \in A^k,\ i = 1, 2, \ldots, l$$

верны равенства

$$[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_l]_{l,\sigma,k} = \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2^{f_\sigma} \ldots \mathbf{x}_{l-1}^{f_\sigma^{l-2}} \mathbf{x}_l = \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2^{f_\sigma} \ldots \mathbf{x}_{l-1}^{f_{\sigma^{l-2}}} \mathbf{x}_l.$$

Список использованных источников

1. Гальмак, А. М. О полиадических операциях на декартовых степенях / А. М. Гальмак, А. Д. Русаков / Изв. ГГУ им. Ф. Скорины. – 2014. – № 3. – С. 35–40.

2. Post, E. L. Polyadic groups / E. L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.

3. Гальмак, А. М. Многоместные операции на декартовых степенях / А. М. Гальмак. – Минск: Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.

4. Гальмак, А. М. Об операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$ / А. М. Гальмак // Весн. МДУ ім. А. А. Куляшова. – 2010. – № 1 (35). – С. 34–38.

5. Гальмак, А. М. Приводимость полиадических групп / А. М. Гальмак // Докл. АН БССР. – 1985. – Т. 29, № 10. – С. 874–877.

References

1. Gal'mak A. M., Rusakov A. D. On polyadic operations on Cartesian powers. *Izvestiya Gomel'skogo gosudarstvennogo universiteta imeni F. Skoriny* [Proceedings of Francisk Scorina Gomel state university], 2014, no. 3, pp. 35–40. (in Russian).

2. Post E. L. Polyadic groups. *Transactions of the American Mathematical Society.*, 1940, vol. 48, no. 2, pp. 208–350. Doi: 10.1090/s0002-9947-1940-0002894-7

3. Gal'mak A. M. *Multiple operations at Cartesian powers*. Minsk, Publishing Center of the Belarusian State University, 2009. 265 p. (in Russian).

4. Gal'mak A. M. Operations $[\ ]_{l,\sigma,k}$. *Vestnik MDU imia A.A. Kuliashova. Series B. Mathematics, Physics, Biolog*, 2010, no. 1 (35), pp. 34–38. (in Russian).

5. Gal'mak A. M. Reducibility of polyadic groups. *Doklady Akademii nauk SSSR* [Proceedings of the Academy of Sciences of the USSR], 1985, vol. 29, no. 10, pp. 874–877. (in Russian).

Информация об авторах

Гальмак Александр Михайлович – доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой высшей математики, Могилевский государственный университет продовольствия (пр. Шмидта, 3, 212027, г. Могилев, Республика Беларусь). E-mail: halm54@mail.ru

Русаков Антон Дмитриевич – аспирант, Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины (ул. Советская, 104, 246019, г. Гомель, Республика Беларусь). E-mail: 5346200@gmail.com

Для цитирования

Гальмак, А. М. О полиадической операции специального вида / А. М. Гальмак, А. Д. Русаков // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фiз.-мат. навук. – 2017. – № 2. – С. 44–51.

Information about the authors

Gal'mak Aleksandr Mikhailovich – D. Sc. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Head of the Department of Mathematics, Mogilev State University of Food Technologies (3, Schmidt Ave., 212027, Mogilev, Republic of Belarus). E-mail: halm54@mail.ru

Rusakov Anton Dmitrievich – Postgraduate, Francisk Scorina Gomel State University (104, Sovets-kaya Str., 246019, Gomel, Republic of Belarus). E-mail: 5346200@gmail.com

For citation

Gal'mak A. M., Rusakov A. D. Polyadic operation of special type. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk* [Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series], 2017, no. 2, pp. 41–51. (in Russian).